# উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণী

## বীজগণিত
## ত্রিকোণমিতি
## স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

ডঃ প্রাণরঞ্জন সেনগুপ্ত
ডঃ রামগোপাল রায়

*Written in accordance with the prescribed syllabus of the West Bengal council of Higher Secondary Education as a text book of Mathematics for classes XI—XII for the academic session 1976—78*

# উচ্চমাধ্যমিক গণিত

**প্রথম খণ্ড ]**

[ বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ]

( একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর পাঠ্য )

( GENERAL STREAM COURSE )



**ডঃ প্রাণরঞ্জন সেনগুপ্ত** এম. এস্-সি., পি-এইচ-ডি.
রীডার, গণিত বিভাগ
কল্যাণী বিশ্ববিদ্যালয়, কল্যাণী, নদীয়া

**ডঃ রামগোপাল রায়**, এম. এস্-সি., পি-এইচ-ডি.
অধ্যাপক, কৃষ্ণনগর কলেজ অব কমার্স,
কৃষ্ণনগর, নদীয়া



**ওরিয়েণ্টাল ডিস্ট্রিবিউটরস**
১৮ সি, টেমার লেন, কলিকাতা—৯

প্রকাশকঃ
শ্রীঅমলকান্তি পাল
১৮-সি টেমার লেন,
কলিকাতা-৯





প্রথম সংস্করণ, সেপ্টেম্বর' ৭৬

মুদ্রাকর :
নিউ শ্রীদুর্গা প্রেস,
২/১, বিধান সরণী, কলিকাতা-৬
তাপসী প্রিন্টার্স,
৬, শিবু বিশ্বাস লেন, কলিকাতা-৬
সুব্রত প্রিন্টিং ওয়ার্কস.
৫১, রামাপুকুর লেন, কলিকাতা-৯

পরম পূজনীয় এবং শ্রদ্ধেয় অধ্যাপক **ডঃ বিভূতিভূষণ সেন,**
ডি. এস-সি., এফ. এন. এ., মহাশয়ের করকমলে
এই পুস্তকখানি অর্পণ করা হইল।

# ভূমিকা

সম্প্রতি উচ্চমাধ্যমিক শিক্ষা সংসদ উচ্চমাধ্যমিক পর্যায়ে গণিতের যে নূতন পাঠ্যক্রম প্রবর্তন করিয়াছেন, তাহাকে অবলম্বন করিয়া গণিতের এই পুস্তকখানি রচনা করা হইয়াছে। পুস্তকটি রচনাকালে কয়েকটি বিষয়ের প্রতি বিশেষ দৃষ্টি রাখিয়া রচনাকার্য সমাধা করা হইয়াছে। এই কারণে পুস্তকখানি কিছু অভিনবত্ব ও বৈশিষ্টের দাবী রাখে।

বিদ্যালয়ে দশম শ্রেণী পর্যন্ত পাঠ সমাপন করিয়া ছাত্র-ছাত্রীরা এই নূতন পাঠক্রম আয়ত্ব করিবার ইচ্ছায় নূতন উদ্দীপনায় শিক্ষায়তনে সমবেত হইয়াছে। উচ্চমাধ্যমিক গণিত শিক্ষার প্রতি ছাত্র-ছাত্রীরা যাহাতে সহজেই আকৃষ্ট হয়, তাহার জন্য পুস্তকখানি যথাসাধ্য সহজ, সরল ও সহজবোধ্য করা হইয়ছে। উদাহরণ মালায় যথেষ্ট সংখ্যক চিত্তাকর্ষক প্রশ্ন ও অনুশীলনীর সমাবেশ করা হইয়াছে। অনুধাবনযোগ্য প্রচুর উদাহরণ সমাধান করা হইয়াছে। ইহা ছাত্র-ছাত্রীদের জটিলতর প্রশ্ন সমাধানে যথেষ্ট সহয়তা করিবে। শিক্ষার্থীরা নিজের প্রচেষ্টায় যাহাতে গণিতের বিষয় সমূহ বুঝিতে পারে এবং অনুশীলনী-সমূহ সমাধান করিতে পারে সেদিকে নজর রাখিয়া পুস্তকটি লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির প্রতিটি বিষয়কে চিত্রের সাহায্যে বোঝান হইয়াছে এবং যথাসাধ্য স্বয়ং সম্পূর্ণ করার চেষ্টা করা হইয়াছে। অনুরূপভাবে বীজগণিতের বিষয়সমূহকে সহজ, সরল, প্রাঞ্জল ও হৃদয়গ্রাহী করিবার প্রয়াস বিশেষভাবে লক্ষনীয়। স্বল্প পরিসরে লিখিবার নির্দেশে প্রয়োজনীয় বিষয়সমূহকে সংক্ষিপ্তভাবে লিখিত হইয়াছে; অথচ প্রতিটি বিষয়ের বৈশিষ্ট রক্ষা করিতে যথাসাধ্য চেষ্টা করা হইয়াছে।

বইখানাকে সমস্ত দিক হইতেই যাহাতে ছাত্র-ছাত্রীদের উপযোগী করা যায় সেইদিকে বিশেষ দৃষ্টি রাখা হইয়াছে। ইহাছাড়া শিক্ষক মহাশয়েরা এবং অভিভাবকেরাও যাহাতে বইখানাকে তাঁহাদের শিক্ষকতা কার্যে ব্যবহার করিতে

পারেন সেইদিকেও লক্ষ্য রাখা হইয়াছে। সমস্ত প্রচেষ্টা সত্বেও বইখানাতে যদি ভুল-ত্রুটি থাকে তাহা উল্লেখ করিলে বাধিত হইব এবং পরবর্তী সংস্করণে উহা সংশোধনের প্রচেষ্টায় প্রয়াসী হইব। যাহাদের জন্য বইখানি লেখা হইয়াছে তাহাদের দ্বারা ইহা সমাদৃত হইলে আমাদের পরিশ্রম সার্থক হইয়াছে বলিয়া মনে করিব

প্রকাশক শ্রীঅমলকান্তি পাল মহাশয়ের নীরলস প্রচেষ্টা ও কর্মনৈপুন্যে অত্যন্ত অল্প সময়ের মধ্যে বইখানি প্রকাশিত হওয়ায় তাহাকে আমাদের আন্তরিক ধন্যবাদ জ্ঞাপন করি।

বিনীত

২৩শে সেপ্টেম্বর, ১৯৭৬ গ্রন্থকারদ্বয়

## SYLLABUS IN MATHEMATICS FOR CLASSES XI-XII

Full Marks : 200 Paper I ( Marks : 100 )

### Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry of two Dimensions

**Algebra : 30 Marks**

Variation, Arithmetical progression, Geometrical progression. Surds, Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadratic equation, permutations and combinations. Binomial theorem for positive integral index, Idea of Infinite series, sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logarithms, Compound interest and annuties. Use of logarithmic and exponential series.

**Trigonometry : 30 Marks.**

Measure of an angle-Degrees, Radians. Trigonometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles, complementary and supplementary angles. Graphs of trigonometrical functions ; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles. Problems relating to heights and distances.

**Analytical Geometry of Two Dimensions : 40 Marks.**

Rectangular cartesian co-ordinates ; polar co-ordinates , Transformation from one system to another. Analytical representation of reflexion, translation and rotation. Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of a locus. Equations of straight lines ; Angle between two lines. conditions of prependicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given line. Position of a point with respect

to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections, Focus-Directrix definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of parabola, Ellipse, and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics ( Use of calculus may be indicated ).

# সূচীপত্র



## বীজগণিত

| | | পৃষ্ঠা |
|---|---|---|
| প্রথম অধ্যায়ঃ | সূচকের নিয়মাবলী .... | 1—10 |
| দ্বিতীয় অধ্যায়ঃ | করণী ... | 11—21 |
| তৃতীয় অধ্যায়ঃ | জটিল রাশি ... | 22—36 |
| চতুর্থ অধ্যায়ঃ | ভেদ ... | 37—44 |
| পঞ্চম অধ্যায়ঃ | সমান্তর শ্রেণী ... | 45—58 |
| ষষ্ঠ অধ্যায়ঃ | গুণোত্তর শ্রেণী ... | 59—67 |
| সপ্তম অধ্যায়ঃ | দ্বিঘাত সমীকরণ ... | 68—86 |
| অষ্টম অধ্যায়ঃ | বিন্যাস এবং সমবায় ... | 87—104 |
| নবম অধ্যায়ঃ | দ্বিপদ উপপাদ্য ... | 105—116 |
| দশম অধ্যায়ঃ | ভগ্নাংশ বা ধনাত্মক সূচকের উপপাদ্য | 117—123 |
| একাদশ অধ্যায়ঃ | অসীম শ্রেণী ... | 124—128 |
| দ্বাদশ অধ্যায়ঃ | লগারিদম্ ... | 129—138 |
| ত্রয়োদশ অধ্যায়ঃ | চক্রবৃদ্ধি সুদ ... | 139—143 |
| চতুর্দশ অধ্যায়ঃ | বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্ত ... | 144—150 |
| পঞ্চদশ অধ্যায়ঃ | সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণী | 151—158 |
| উত্তরমালাঃ | ... | 159—166 |

## ত্রিকোণমিতি

| | | |
|---|---|---|
| প্রথম অধ্যায়ঃ | কোণের পরিমাপ .... | 1—12 |
| দ্বিতীয় অধ্যায়ঃ | কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত | 13—34 |
| তৃতীয় অধ্যায়ঃ | মিশ্র কোণ ... | 35—49 |
| চতুর্থ অধ্যায়ঃ | গুণিতক কোণ এবং অংশ কোণ | 50—64 |
| পঞ্চম অধ্যায়ঃ | ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান | 65—73 |
| ষষ্ঠ অধ্যায়ঃ | বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক ... | 74—85 |
| সপ্তম অধ্যায়ঃ | ত্রিভুজের গুণাবলী ... | 86—101 |

অষ্টম অধ্যায় : ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের লৈখিক সমাধান ... 102—109
নবম অধ্যায় : ত্রিভুজের সমাধান ... 110—121
দশম অধ্যায় : উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্ন ও সমস্যাবলী ... 122—130
উত্তরমালা : ... 131—134
লগটেবল : ... I—XXIV

## স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায় : স্থানাঙ্ক, দূরত্ব, ক্ষেত্রফল ... 1—25
দ্বিতীয় অধ্যায় : সঞ্চার পথ ... 26—31
তৃতীয় অধ্যায় : সরল রেখা ... 32—66
চতুর্থ অধ্যায় : বৃত্ত ... 67—97
পঞ্চম অধ্যায় : শঙ্কুচ্ছেদ ... 98—123
ষষ্ঠ অধ্যায় : উপবৃত্ত ... 124—151
সপ্তম অধ্যায় : পরাবৃত্ত ... 152—166
অষ্টম অধ্যায় : স্পর্শক ও অভিলম্ব ... 167—174
নবম অধ্যায় : প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন ... 175—184
উত্তরমালা : ... 185—191

# প্রথম অধ্যায়

## সূচকের নিয়মাবলী ( Law of Indices )

**1.1. সূচক ও নিধান ( Index & Base) ঃ**

নীচের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ( 3টি 2-এর গুণফল )

$4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ ( 5টি 4-এর গুণফল )

$b^4 = b \times b \times b \times b$ ( 4টি $b$-এর গুণফল )

$a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

( $m$ সংখ্যক $a$-এর গুণফল )

এখানে $2^3$-তে 2-এর ঘাত ( Power ) বা সূচক ( Index ) হইল 3।

$4^5$-তে 4-এর ঘাত বা সূচক 5

$b^4$-তে $b$-এর ঘাত বা সূচক 4

$a^m$-তে $a$-এর ঘাত বা সূচক $m$ [ যেখানে $m$ কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা ( Positive Integer )]

3, 5, 4, $m$ সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে 2, 4, $b$, $a$-এর সূচক বলে এবং 2, 4, $b$, $a$ সংখ্যাগুলিকে নিধান ( Base ) বলে।

**1.2. সূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম ঃ**

$m$ ও $n$ যদি দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা ( Positive Integer ) হয় তবে প্রমাণ কর :—

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}, (m>n)$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^m = a^m b^m$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

এইগুলিকে Laws of Indices বলে। উপরিউক্ত নিয়মগুলির মধ্যে প্রথম নিয়মটিকে Fundamental Index Law বলে।

প্রমাণ। (i) $a^m = a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$a^n = a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$\therefore$ $a^m \times a^n = (a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $) \times$

$(a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $)$

$= a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+n}$.

মন্তব্য : $p, q, r, s \cdots\cdots$ যদি কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হয় তাহা হইলে $a^p \times a^q \times a^r \times a^s \cdots\cdots = a^{p+q+r+s+\cdots\cdots}$ উৎপাদকের সংখ্যা যাহা হউক না কেন এই নিয়ম প্রযোজ্য হইবে।

(ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots m \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}}{a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots n \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}}$

$= a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots (m-n)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m-n}$.

মন্তব্য : এই নিয়ম অনুসারে $\dfrac{a^7}{a^2} = a^{7-2} = a^5$ হইবে।

(iii) $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+m+\cdots\cdots}$ $n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m \times n} = a^{mn}$.

(iv) $(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $)$

$\times (b \times b \times b \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $)$

$= a^m \times b^m = a^m b^m$.

মন্তব্য : উপরের (iii) নং সূত্র অনুযায়ী $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$,

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m \times n}{n}} = a^m$.

উপরের (iv) নং সূত্র অনুযায়ী $(abc)^m = a^m b^m c^m$,

$(abcde)^m = a^m b^m c^m d^m e^m \cdots$

উদাহরণ। (i) $(a^m b^m c^m)^n = a^{mn} b^{mn} c^{mn}$

(ii) $(a^m b^m c^m d^m e^m \cdots)^n = a^{mn} b^{mn} c^{mn} d^{mn} e^{mn} \cdots$

**1.3. $m$ অখণ্ড ধনসংখ্যা ( Positive Integer ) না হইলে $a^m$-এর অর্থ কি বুঝায় :**

$m$ যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয় তাহা হইলে $a^m$ মানে $m$ সংখ্যক $a$-এর গুণফল বুঝায়। $m$ যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা না হয়, অর্থাৎ $m$ যদি ঋণাত্মক, ভগ্নাংশ অথবা শূন্য হয় তাহা হইলে $a^m$ কিন্তু $m$ সংখ্যক $a$-এর গুণফল হইবে না। তখন কিন্তু $a^m \times a^n = a^{m+n}$ সূত্রটি প্রযোজ্য হইবে। অর্থাৎ $m$ ও $n$ অখণ্ড ধনসংখ্যা না হইলেও $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হইবে।

এখন $a^{-5}$ বলিতে আমরা কি বুঝি তাহা লইয়া আলোচনা করা যাক।

$$a^{-5} \times a^7 = a^{-5+7} = a^2$$

$$\therefore \quad a^{-5} = \frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^5}$$

$\therefore$ $a^{-5}$ হইবে $a^5$-এর অন্যোন্যক ( reciprocal )।

**1.4.** (*i*) প্রমাণ কর $a^0 = 1$, যেখানে $a \neq 0$

আমরা জানি $a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$

$$\therefore \quad a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

**উদাহরণ**। $2^0 = 1,\ x^0 = 1,\ (p)^0 = 1,\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$

(*ii*) প্রমাণ কর $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

আমরা জানি $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\cdots$ (1)

$n = -m$ ধর

$\therefore$ ( ) হইতে পাই, $a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$

বা, $a^m \times a^{-m} = 1$

$$\therefore \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

অনুরূপে $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$.

**উদাহরণ**। $a^{-6} = \frac{1}{a^6}$, $\qquad a^8 = \frac{1}{a^{-8}}$

$\therefore$ $m$ অখণ্ড ধনসংখ্যা না হইলে এবং $a \neq 0$ হইলে

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ হইবে।}$$

$\therefore$ $a^{-m}$ হইল $a^m$-এর অন্যোন্যক (reciprocal)।

**1.5.** $a^{\frac{1}{m}}$ **এর অর্থ কি বুঝায়** ( $m$ অখণ্ড ধনসংখ্যা ) :

এখন $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{m}} \times \cdots\cdots$ $m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots\cdots}$ $m$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{\frac{1}{m}\times m} = a$

$\therefore \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^{m\times\frac{1}{m}} = a$

$\therefore a^{\frac{1}{m}}$ হইল $a$-এর $m$-তম মূল।

অর্থাৎ $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ .

**মন্তব্য :** (i) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ , $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ , $\sqrt[2]{4} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2,$

$\sqrt{25} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 5.$

(ii) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$

$\therefore a^{\frac{m}{n}}$ কে $a^m$ এর $n$-তম মূল ($n$th. root) বলা হয়।

(iii) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

$\therefore a^{\frac{m}{n}}$ এর আর এক অর্থ হইল $a^{\frac{1}{n}}$ এর $m$-তম শক্তি (Power)।

(iv) $\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^{\frac{p}{q}}$, যেখানে $n = \frac{p}{q}$

$= \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{mn}$

আবার, $(a^m)^n = (a^m)^{(-p)}$ , যেখানে $n = -p$

$= \frac{1}{(a^m)^p} = = a^{-mp} = a^{mn}$

অতএব দেখা গেল যে-কোন সূচকের ক্ষেত্রে $(a^m)^n = a^{mn}$ হইবে।

**উদাহরণ।** প্রমাণ কর $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

এখন, $\left(\frac{a}{b}\right)^m \times b^m = \left(\frac{a}{b} \times b\right)^m = a^m$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

উদা. 1. (i) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{3+2}{6}} = 5^{\frac{5}{6}}$

(ii) $2^4 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 2^4 = 16$

(iii) $(3^3 \times 2^3 \times 4^3)^2 = 3^6 \times 2^6 \times 4^6$

(iv) $\dfrac{2^{\frac{1}{4}} . 2^{\frac{1}{2}} . 2^{-\frac{1}{8}}}{2^{\frac{5}{8}}} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{5}{8}}$

$= 2^{\frac{2+4-1-5}{8}} = 2^{\frac{0}{8}} = 2^0 = 1$

উদা. 2. ধনাত্মক স্থচক দ্বারা প্রকাশ কর :

(i) $a^{-7}$, (ii) $a^{-\frac{2}{3}}$, (iii) $2^{-\frac{1}{2}}$, (iv) $\dfrac{1}{5^{-2}}$

(v) $\dfrac{a^3b^{-1}}{a^4b^2}$, (vi) $\dfrac{a^{-\frac{7}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^3b^3}$

(i) $a^{-7} = \dfrac{1}{a^7}$ (ii) $a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$

(iii) $2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ (iv) $\dfrac{1}{5^{-2}} = 5^2 = 25$

(v) $\dfrac{a^3b^{-1}}{a^4b^2} = \dfrac{1}{a^4a^{-3}b^2b} = \dfrac{1}{a^{4-3}b^{2+1}} = \dfrac{1}{ab^3}$

(vi) $\dfrac{a^{-\frac{7}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^3b^3} = \dfrac{1}{a^3a^{\frac{7}{3}}b^3b^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{a^{3+\frac{7}{3}}b^{3-\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{a^{\frac{16}{3}}b^{\frac{7}{3}}}$

উদা. 3. $\sqrt[2]{81}$ এর মান কত ?

$\sqrt[2]{81} = (81)^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4 \times \frac{1}{2}} = 3^2 = 9.$

উদা. 4. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{16^3}$, (ii) $(81^2)^{-\frac{2}{4}}$, (iii) $\sqrt[3]{(125)^4}$

(i) $(16^3)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{3}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^{4 \times \frac{3}{2}} = 2^6 = 64$

(ii) $(81)^{-\frac{2}{4}} = (81)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(81)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{(3^4)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

(iii) $\sqrt[3]{(125)^4} = (125)^{\frac{4}{3}} = (5^3)^{\frac{4}{3}} = 5^4 = 625$

উদা. 5. সরল কর :

(i) $\dfrac{a^2b^{-1}}{b^2a^{-1}}$ (ii) $\dfrac{4a^{-\frac{2}{3}}}{2a^{\frac{1}{3}}} \times 2ab$

(i) $\dfrac{a^2b^{-1}}{b^{-2}a^{-1}} = \dfrac{a^2a^1}{b^2b^1} = \dfrac{a^{2+1}}{b^{2+1}} = \dfrac{a^3}{b^3}.$

(ii) $\dfrac{4a^{-\frac{2}{3}}}{2a^{\frac{1}{3}}}.2ab = \frac{4}{2}\,.\,2ab.\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}$

$= \dfrac{4ab}{a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \dfrac{4ab}{a} = 4b.$

**উদা. 6. সরল কর :**

(i) $\left(\dfrac{a^l}{a^m}\right)^{l+m}.\left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^{m+n}.\left(\dfrac{a^n}{a^n}\right)^{n+l}$

(ii) $(a^{l-m})^{l^2+ml+m^2}(a^{m-n})^{m^2+mn+n^2}(a^{n-l})^{n^2+ln+l^2}$

(iii) $\sqrt[lm]{a^{l-m}} \times \sqrt[mn]{a^{m-n}} \times \sqrt[nl]{a^{n-l}}$

(iv) $\dfrac{1}{1+a^{m-l}+a^{n-l}} + \dfrac{1}{1+a^{l-m}+a^{n-m}} + \dfrac{1}{1+a^{l-n}+a^{m-n}}$

(i) $\left(\dfrac{a^l}{a^m}\right)^{l+m} \times \left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^{m+n} \times \left(\dfrac{a^n}{a^l}\right)^{n+l}$

$= (a^{l-m})^{l+m} \times (a^{m-n})^{m+n} \times (a^{n-l})^{n+l}$

$= a^{l^2-m^2} \times a^{m^2-n^2} \times a^{n^2-l^2}$

$= a^{l^2-m^2+m^2-n^2+n^2-l^2}$

$= a^0 = 1.$

(ii) $(a^{l-m})^{l^2+lm+m^2} \times (a^{m-n})^{m^2+mn+n^2} \times (a^{n-l})^{n^2+ln+l^2}$

$= a^{l^3-m^3} \times a^{m^3-n^3} \times a^{n^3-l^3}$

$= a^{l^3-m^3+m^3-n^3+n^3-l^3} = a^0 = 1.$

(iii) $\dfrac{1}{1+a^{m-l}+a^{n-l}} + \dfrac{1}{1+a^{l-m}+a^{n-m}} + \dfrac{1}{1+a^{l-n}+a^{m-n}}$

$= \dfrac{a^l}{a^l(1+a^{m-l}+a^{n-l})} + \dfrac{a^m}{a^m\,(1+a^{l-m}+a^{n-m})}$

$+ \dfrac{a^n}{a^n(1+a^{l-n}+a^{m-n})}$

$= \dfrac{a^l}{a^l+a^m+a^n} + \dfrac{a^m}{a^m+a^l+a^n} + \dfrac{a^n}{a^n+a^l+a^m}$

$= \dfrac{a^l+a^m+a^n}{a^l+a^m+a^n} = 1.$

উদা. 7. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, প্রমাণ কর $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$.

যেহেতু $a^x = b^y \quad \therefore \; a = b^{\frac{y}{x}}$

এবং যেহেতু $c^z = b^y \quad \therefore \; c = b^{\frac{y}{z}}$

আবার যেহেতু $b^2 = ac \quad \therefore \; b^2 = b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{y}{z}}$

বা, $b^2 = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

বা, $2 = \frac{y}{x}+\frac{y}{z}$

বা, $\frac{2}{y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{z} \qquad \therefore \; \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$. প্রমাণিত।

উদা. 8. যদি $m = a^x$, $n = a^y$, $a^2 = (m^y n^x)^z$. হয়,

প্রমাণ কর $xyz = 1$

এখন, $a^2 = (m^y n^x)^z$

বা, $a^2 = \{(a^x)^y . (a^y)^x\}^z$

বা, $a^2 = a^{xyz} . a^{xyz} = a^{2xyz}$

$\therefore \; 2 = 2xyz$

$\because \; xyz = 1$. প্রমাণিত।

উদা. 9. যদি $x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হয়,

প্রমাণ কর $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$

এখন যেহেতু $x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \; (x-2)^3 = \left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 2^2 + 2^1 + 3.2(x-2)$

[ যেহেতু $x - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ ]

বা, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 4 - 2 - 6x + 12 = 0$

বা, $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$.

**মন্তব্য ঃ** কোন সমীকরণের উভয় পক্ষে সূচক সমান হইলেই যে নিধান সমান হইবে এইরূপ নিশ্চিত সিদ্ধান্ত করা উচিত নয়।

যেমন, যদি $a^m = b^m$ হয় তাহা হইলে দুইদিকের সূচকের মান $m$ হওয়া সত্ত্বেও যে $a = b$ হইবে তাহা বলা চলে না।

মনে কর $m = 2, \quad a = 2, \quad b = -2$

তাহা হইলে $\quad a^m = (2)^2 = 4 \quad$ এবং $b^m = (-2)^2 = 4.$

$$\therefore \quad a^m = b^m$$

এক্ষেত্রে দেখা যাইতেছে যে $a^m = b^m$ কিন্তু $a = b$ হইবে না। কারণ $+2 \neq -2.$

## প্রশ্নমালা 1

1. ধনাত্মক সূচক দ্বারা প্রকাশ কর ঃ

(i) $\dfrac{x^4 y^{-2}}{x^5 y^3}$ (ii) $4x^{-\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \div x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

(iii) $x^{-1} y^2 \div y^{-1} x^2$

2. সরল কর ঃ

(i) $x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} \div x^{\frac{5}{12}}$

(ii) $\left(\dfrac{x^{-3} y^4}{x^2 y^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}} \div \left(x^5 y^{-1}\right)^2$

(iii) $\left\{\sqrt[3]{4} \times \dfrac{1}{\sqrt[9]{8}} \times \dfrac{1}{\sqrt[12]{16}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

(iv) $\left(8x^3 - 27a^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(64x^3 - 27a^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(v) $\left[(81)^{-\frac{3}{4}} \times \dfrac{16^{\frac{1}{4}}}{6^{-2}} \times \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}$

(vi) $4^{\frac{1}{3}} \times \left(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^7 \div 9^{\frac{1}{4}}$

(vii) $\dfrac{3 + 5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}\left(4 - 5^{\frac{1}{2}}\right)}$

(viii) $\dfrac{\left(32^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}\right)}{2{\cdot}5}\left[3(16)^{\frac{1}{4}} \div 2^{\frac{1}{2}}\right]$

(ix) $\left(\frac{a^l}{b^m}\right)^n \times \left(\frac{b_n}{c^l}\right)^m \times \left(\frac{c^m}{a^n}\right)^l$

(x) $\frac{x^{a+b} \cdot x^{a-b} \cdot x^{c-2a}}{x^{c-a}}$

(xi) $\left\{\frac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\left(3^{\frac{n+1}{2}}\right)}{3^{\frac{2-n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{3}}$

(xii) $\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^m\left(x-\frac{1}{y}\right)^n}{\left(y+\frac{1}{x}\right)^m\left(y-\frac{1}{x}\right)^n}$

(xiii) $\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}}+\frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}$

(xiv) $\frac{e^{2x}+e^{-x}-e^{x}-1}{e^{2x}-e^{-x}+e^{x}-1}$

(xv) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ac+a^2}$

(xvi) $x^{\frac{(b+c)}{(c-a)(a-b)}} \cdot x^{\frac{(c+a)}{(a-b)(b-c)}} \cdot x^{\frac{(a+b)}{(b-c)(c-a)}}$

(xvii) $x^{\frac{b-c}{bc}} \cdot x^{\frac{c-a}{ca}} \cdot x^{\frac{a-b}{ab}}$.

3. যদি $a=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে $2a^2-6a-3=0$.

4. যদি $a=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে $2a^2-6a-5=0$.

5. যদি $x^y=y^x$ হয়, দেখাও যে $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$ এবং

যদি $x=2y$ হয় দেখাও যে $y=2$.

6. যদি $a=x^{q+r}y^p$, $b=x^{r+p}y^q$, $c=x^{p+q}y^r$ হয়,

দেখাও যে $a^{q-r}.\,b^{r-p}.\,c^{p-q}=1$

7. যদি $a^x=z^y$, $a^z=z^x$ হয়, দেখাও যে $x^2=yz$

8. যদি $p=a^x$, $q=a^y$, $(p^y q^x)^z=a^2$ হয়,

প্রমাণ কর $xyz=1$

9. যদি $xy^{p-1}=a$, $xy^{q-1}=b$, $xy^{r-1}=c$ হয়, দেখাও যে

$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$

10. যদি $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে $x^3-3x^2-6x-4=0$

11. যদি $a=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে $a^3-6a-6=0$

12. যদি $y=x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে $y^3+3y=\frac{x^2-1}{x}$

13. সরল কর :

(i) $\frac{x^{a+b}+x^{a-b}.x^{m-2a}}{x^{m-a}}$

(ii) $\left(\sqrt[a-b]{x^a}\right)^{\frac{1}{a-c}}\times\left(\sqrt[b-c]{x^b}\right)^{\frac{1}{b-a}}\times\left(\sqrt[c-a]{x^c}\right)^{\frac{1}{c-b}}$

14. যদি $x=\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ হয়
দেখাও যে $x^3+3bx-2a=0$

15. যদি $x=a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে $x^3+3x=a-\frac{1}{a}$

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## করণী ( Surds )

**2.1. করণী ( Surds ) বা অমূলদ রাশি ( Irrational Numbers ) :**

যদি কোন সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে [$\frac{p}{q}$ আকারে, যেখানে $p$ ও $q$ দুইটি পূর্ণসংখ্যা ( integer )] প্রকাশ করা না যায় তাহা হইলে সেই সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বা অমূলদ রাশি ( Irrational Number ) বলে। অর্থাৎ যদি কোন রাশির কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা না যায় তখন সেই মূল ( root )-কে **করণী** বা **অমূলদ রাশি** বলে। যেমন—

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2+b^2}$ ইত্যাদি রাশিগুলি করণীর উদাহরণ।

**2.2. মূলদ রাশি ( Rational Number ) :**

যদি কোন সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে ($\frac{p}{q}$ আকারে, $p$ ও $q$ দুইটি পূর্ণসংখ্যা ) প্রকাশ করা যায় তাহা হইলে ঐ সংখ্যাকে মূলদ রাশি বা মূলদ সংখ্যা বলে। যেমন—

$\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt[3]{27}$ ইত্যাদি সংখ্যাগুলি করণীর মত দেখা গেলেও প্রকৃতপক্ষে ইহারা মূলদ রাশি।

কারণ $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$, $\sqrt[3]{27}=3$

অতএব এইগুলি মূলদ রাশি।

যদি করণীর মূল সূচকসংখ্যা দ্বিতীয় ক্রমের ( Second Order ) হয় তাহা হইলে করণীকে দ্বিতীয় করণী ( Quadratic Surd ) বা দ্বিতীয় ক্রমের করণী ( 2nd Order Surd ) বলা হয়। যদি করণীর মূল সূচকসংখ্যা তৃতীয় ক্রমের হয় তাহা হইলে করণীকে ত্রিঘাত করণী ( Cubic Surd ) বলে ইত্যাদি।

যেমন, $\sqrt{5}$ হইল দ্বিঘাত করণী

$\sqrt[3]{7}$ হইল ত্রিঘাত করণী

$\sqrt[4]{11}$ হইল চতুর্থ ক্রমের করণী ইত্যাদি।

আবার কতকগুলি করণী ( Surd ) যখন একই ক্রমের হয় তখন তাহাদের সমমূলীয় ( equiradical ) করণী বলে।

**মন্তব্য :** Radical Sign বলিতে আমরা $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ……… ইত্যাদি চিহ্নগুলিকে বুঝি।

**2.3. শুদ্ধ করণী এবং মিশ্র করণী ( Pure Surd and Mixed Surd ) :**

যে করণীতে মূলদ সংখ্যা থাকে না তাহাকে **শুদ্ধ করণী** ( Pure Surd ) বলে এবং যে করণীতে কোন মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যা থাকে তাহাকে **মিশ্র করণী** ( Mixed Surd ) বলে। একটি পদবিশিষ্ট করণীকে **সরল করণী** ( Simple Surd ) এবং যদি একের অধিক করণী '+' চিহ্ন অথবা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে তখন তাহাদের **যৌগিক করণী** ( Compound Surd ) বলে। একই মূলচিহ্ন বিশিষ্ট করণীগুলিকে **সমমূলীয়** (equiradical) করণী বলে। যেমন—

$\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$ ইত্যাদি হইল সরল করণী এবং $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ ইত্যাদি হইল যৌগিক করণী।

আবার $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[2]{7}$, $\sqrt[3]{10}$ ইত্যাদি হইল শুদ্ধ করণীর উদাহরণ এবং $2+\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}$, $5\sqrt{7}$ হইল মিশ্র করণীর উদাহরণ।

**করণীর নিম্নলিখিত ধর্মগুলি (Properties) জানা দরকার।**

যদি $m$ এবং $n$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ( positive integer ) হয় এবং $x$ ও $y$ মূলদ সংখ্যা ( rational numbers ) হয়, তাহা হইলে

(i) $(\sqrt[n]{x})^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ (ii) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$

(iii) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ (iv) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

**2.4. নিম্নলিখিত করণীগুলিকে শুদ্ধ করণীতে প্রকাশ :**

(i) $8\sqrt{3}$, (ii) $5\sqrt{2}$,

(i) $8.\sqrt{3} = (8^2)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{3} = (8^2)^{\frac{1}{2}}.(3)^{\frac{1}{2}} = (8^2\,.\,3)^{\frac{1}{2}} = (64\,.\,3)^{\frac{1}{2}}$

$= (192)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{192}.$

(ii) $5.\sqrt{2} = (5^2)^{\frac{1}{2}}.(2)^{\frac{1}{2}} = (5^2\,.\,2)^{\frac{1}{2}} = (25\,.\,2)^{\frac{1}{2}} = (50)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{50}.$

2.5. **নিম্নলিখিত করণীগুলিকে মিশ্র করণীতে প্রকাশ ঃ**

(i) $\sqrt{32}$. (ii) $\sqrt{50}$.

(i) $\sqrt{32}=(32)^{\frac{1}{2}}=(16.2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}.\sqrt{2}=(4^2)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$

(ii) $\sqrt{50}=(25.2)^{\frac{1}{2}}=(5^2)^{\frac{1}{2}}.(2)^{\frac{1}{2}}=5.\sqrt{2}.$

2.6. **মান নির্ণয় ঃ**

(i) $\sqrt[3]{36}\div\sqrt[3]{48}$ (ii) $\sqrt[4]{\dfrac{169x^6z^2}{y^4}}$

(i) $\sqrt[3]{36}\div\sqrt[3]{48}=\dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{48}}=\sqrt[3]{\frac{36}{48}}=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

(ii) $\sqrt[4]{\dfrac{169x^6z^2}{y^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{169x^6z^2}}{\sqrt[4]{y^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{169}\cdot\sqrt[4]{x^6}\cdot\sqrt[4]{z^2}}{\sqrt[4]{y^4}}$

$=\dfrac{\sqrt[4]{13^2}\cdot\sqrt[4]{x^6}\cdot\sqrt[4]{z^2}}{\sqrt[4]{y^4}}=\dfrac{13^{\frac{2}{4}}.x^{\frac{6}{4}}.z^{\frac{2}{4}}}{y^{\frac{4}{4}}}=\dfrac{13^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}.z^{\frac{1}{2}}}{y}$

$=\dfrac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{z}}{y}=\dfrac{\sqrt{13}\cdot x\sqrt{x}.\sqrt{z}}{y}=\dfrac{x}{y}\sqrt{13xz}.$

2.7. **বিভিন্ন ক্রমের করণীকে সমমূলীয় (equiradical) করণীতে প্রকাশ ঃ**

(i) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$-কে সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ কর।

এখানে 2, 3, 4-এর ল. সা. গু. = 12

$\therefore\quad \sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}.$

$\therefore$ নির্ণেয় করণীগুলি হইল $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{125}$

2.8. **কোন মূলদরাশিকে যে-কোন ক্রমে প্রকাশ ঃ**

$3=\sqrt{3^2}=\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[4]{3^4}=\sqrt[5]{3^5}=\sqrt[p]{3^p}=\sqrt[n]{3^n}$ ইত্যাদি।

2.9. **বিভিন্ন ক্রমের করণীর মধ্যে পরস্পর তুলনা করিয়া মানের ক্রম নির্ণয় ঃ**

$\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{20}$ ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি বড় ?

$\sqrt[3]{9}=\sqrt[12]{9^4}=\sqrt[12]{9\times9\times9\times9}=\sqrt[12]{6561}$

আবার $\sqrt[4]{20}=\sqrt[12]{20^3}=\sqrt[12]{8000}$

যেহেতু $8000>6561$ $\quad\therefore\quad \sqrt[12]{8000}>\sqrt[12]{6561}$

অর্থাৎ, $\sqrt[4]{20}>\sqrt[3]{9}$.

**2.10. কোন করণীর সরলতম আকারে প্রকাশ :**

$\sqrt{512}$-কে সরলতম আকারে প্রকাশ কর।

$\sqrt{512}=\sqrt{64\times8}=\sqrt{8^2\times2^2\times2}=\sqrt{8^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2}$

$=8.2\sqrt{2}=16\sqrt{2}.$

**2.11. সদৃশ ( Similar ) এবং অসদৃশ ( Dissimilar ) করণী :**

যে সমস্ত করণীর মধ্যে একই অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number ) থাকে তাহাদিগকে সদৃশ করণী বলে। যেমন—

$\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$ ইত্যাদি সদৃশ করণী।

যে সমস্ত করণীর মধ্যে একই অমূলদ সংখ্যা থাকে না তাহাদিগকে অসদৃশ করণী বলে। যেমন—

$\sqrt{27}, \sqrt{28}$ ইহারা অসদৃশ করণী।

কারণ $\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$

$\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$

**2.12. করণীর যোগ ও বিয়োগ ( Addition and Subtraction of Surds ) :**

করণীর যোগ অথবা বিয়োগের ক্ষেত্রে করণীগুলিকে প্রথমে সরলতম আকারে এবং একই ক্রমে প্রকাশ করিতে হইবে এবং তারপর এই যোগ ও বিয়োগ algebraic method-এ করা সম্ভব হইবে।

যেমন, (i) $\sqrt{147}+\sqrt{27}=\sqrt{49\times3}+\sqrt{9\times3}=7\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}(7+3)=10\sqrt{3}.$

(ii) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$

$=\sqrt[3]{125\times5}-\sqrt[3]{27\times5}+\sqrt[3]{2^3\times5}$

$=\sqrt[3]{125}.\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{5}$

$=5.\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}+2.\sqrt[3]{5}$

$=\sqrt[3]{5}(5-3+2)=4.\sqrt[3]{5}$

## 2.13. করণীর গুণ ( Multiplication of Surds ) :

করণীগুলি সমমূলীয় হইলে উহাদের মূলদ রাশির সহিত মূলদরাশির গুণ এবং অমূলদ রাশির সহিত অমূলদ রাশির গুণ করিতে হইবে। আবার করণীগুলি যদি বিভিন্ন ক্রমের হয় তাহা হইলে প্রথমে উহাদের সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিতে হইবে এবং তারপর আগের মত গুণ করিতে হইবে।

যেমন (*i*) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{10}$

$$=6^{\frac{1}{3}}\times 10^{\frac{1}{3}}$$

$$=(6\times 10)^{\frac{1}{3}}=(60)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{60}$$

(*ii*) $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-3\sqrt{3})$

$$=\sqrt{5}.\sqrt{5}-3\sqrt{5}.\sqrt{3}+2\sqrt{3}.\sqrt{5}-2.3.\sqrt{3}.\sqrt{3}$$

$$=5-3\sqrt{15}+2\sqrt{15}-6.3$$

$$=5-18-\sqrt{15}=-13-\sqrt{15}=-(13+\sqrt{15}).$$

## 2.14. করণীর ভাগ ( Division of Surds ) :

কোন করণীকে অন্য একটি করণী বা মিশ্র করণী দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাগটিকে প্রথমে ভগ্নাংশের আকারে লিখিতে হইবে এবং তারপর ইহাকে আগের মত মূলদ রাশিতে প্রকাশ করিয়া লইতে হইবে।

যেমন (i) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{8^3}}$

$$=\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{512}}=\sqrt[6]{\frac{16}{512}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{1}{32}}.$$

(ii) $\sqrt{5}-3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3.3}$

$$=\frac{\sqrt{15}}{9}.$$

## 2.15. প্রতিযোগী করণী ( Conjugate Surds ) :

যদি দুইটি করণীযুক্ত রাশি (expression) এমন হয় যে উহাদের গুণফল একটি মূলদ রাশি, তাহা হইলে তাহাদিগকে প্রতিযোগী করণী ( Conjugate Surds ) বলে।

যেমন (i) $\sqrt[3]{4}$ এবং $\sqrt[3]{2}$ হইল প্রতিযোগী করণী।

$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}=(2^2\times 2)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}$$
$$=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2.$$

(ii) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ এবং $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ হইল প্রতিযোগী করণী।

কারণ $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\times(\sqrt{x}-\sqrt{y})=x-y$.

(ii) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$ এবং $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$ প্রতিযোগী করণী, কারণ উহাদের গুণফল $x-y$.

(iv) $(a+\sqrt{b})$ এবং $(a-\sqrt{b})$ প্রতিযোগী করণী, কারণ উহাদের গুণফল $a^2-b$.

**নিম্নলিখিত ফলাফলগুলি মনে রাখা দরকার।**

(i) $(a+\sqrt{b})$ এবং $(a-\sqrt{b})$ এই দুইটি প্রতিযোগী করণীর যোগফল মূলদ রাশি।

কারণ $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2a$.

(ii) যদি $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হয় তাহা হইলে $a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}$ হইবে।

## 2.16. করণী নিরসন (Rationalisation)

কোন করণীকে অন্য কোন করণী দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত করাকে করণী নিরসন বলে।

যেমন (i) $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\sqrt{25}=5$.

(ii) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3.3}=6\times 3=18$.

(iii) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ ভগ্নাংশের হরকে Rationalise কর।

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})}$$
$$=\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})^2}{(\sqrt{1+x^2})^2-(\sqrt{1-x^2})^2}$$
$$=\frac{1+x^2+1-x^2-2\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}{1+x^2-1+x^2}$$
$$=\frac{2-2\sqrt{1-x^4}}{2x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}$$

**2.17. অমূলদ রাশির বর্গমূলাকর্ষণ (Extraction of square root of an irrational number) :**

$a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে গেলে প্রথমে লক্ষ্য করিতে হইবে

$$(x\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}$$

যদি $x+y=a$ এবং $2\sqrt{xy}=b$ হয়, তাহা হইলে

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=a\pm\sqrt{b}$$

$$\therefore\quad \sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

যদি $\sqrt{b}$ একটি শুদ্ধকরণী হয় তাহা হইলে $a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$$

উভয়পক্ষ হইতে মূলদরাশির সহিত মূলদরাশি এবং অমূলদ রাশির সহিত অমূলদ রাশি সমান (*equate*) করিয়া পাই,

$$a=x+y \quad \text{এবং} \quad \sqrt{b}=2\sqrt{xy}$$

$$\therefore\quad a^2-b=(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2-b}=x-y \quad (\text{মনে কর } x>y)$$

এখন $x+y=a$ .... (i)

$x-y=\sqrt{a^2-b}$ .... (ii)

(i) ও (ii) হইতে পাই, $x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$, $y=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})$

$\therefore$ $a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল অর্থাৎ

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}.$$

**মন্তব্য :** যদি $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হয় (যেখানে $a, b, x, y$ মূলদরাশি), তাহা হইলে $a=x$, $b=y$ হইবে।

উদা. 1. $16-5\sqrt{7}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{16-5\sqrt{7}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

বা, $16-5\sqrt{7}=x+y-2\sqrt{xy}$ (বর্গ করিয়া পাই)

$\therefore\quad x+y=16,\ 2\sqrt{xy}=5\sqrt{7}$

$\therefore\quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=16^2-(5\sqrt{7})^2$

$=256-175=81$

$\therefore \quad x-y=9$ ( মনে কর $x>y$ ).

$\therefore \quad x+y=16 \quad \cdots \quad$ (i)

$x-y=9 \quad \cdots \quad$ (ii)

(1) ও (2) হইতে পাই, $x=\frac{25}{2}, \quad y=\frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{\frac{25}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

উদা. 2. যদি $a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তাহা হইলে $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$a+b=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1}=4$$

এবং $ab=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$

$$\therefore \quad \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{(a+b)^2-ab}{(a+b)^2-3ab}$$

$$=\frac{4^2-1}{4^2-3.1}=\frac{16-1}{16-3}$$

$$=\frac{15}{13}.$$

উদা. 3. যদি $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $bx^2-ax+b=0$.

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই,

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a-2b}}$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{a+2b}{a-2b}$$

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{a+2b}{a-2b}$

পুনরায় যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$$\frac{2(x^2+1)}{4x}=\frac{2a}{4b} \quad \text{বা,} \quad \frac{x^2+1}{2x}=\frac{a}{2b}$$

বা, $2bx^2+2b=2ax$

বা, $bx^2-ax+b=0.$

## প্রশ্নমালা 2

1. গুণফল নির্ণয় কর :

(i) $7\sqrt{5}\times5\sqrt{2}$ (ii) $2\sqrt[4]{2}\times3\sqrt[4]{3}$ (iii) $3\sqrt[3]{3}\times4\sqrt[4]{2}$

(iv) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{7})\times(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{7})$

2. ভাগফল নির্ণয় কর :

(i) $8\sqrt{6}\div4\sqrt{5}$ (ii) $12\sqrt[3]{2}\div5\sqrt{3}$

(iii) $4\sqrt[3]{5}\div8\sqrt[3]{6}$ (iv) $8\sqrt{10}\div4\sqrt{15}$

3. হরগুলির করণী নিরসন কর (Rationalise the demoninators) :

(i) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ (ii) $\frac{2-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}}$ (iii) $\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

(iv) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ (v) $\frac{(\sqrt{3}+5)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(vi) $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$ (vii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

4. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $28-5\sqrt{12}$ (ii) $3\sqrt{6}-4\sqrt{3}$

(iii) $\sqrt{2a+5}+\sqrt{2a-5}$ (iv) $17+12\sqrt{2}$

(v) $33-4\sqrt{35}$ (vi) $37-20\sqrt{3}$

(vii) $17-12\sqrt{2}$ (viii) $8+\sqrt{60}$

5. যদি $\sqrt{2}=1\cdot414$ হয় তাহা হইলে $\frac{1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ এর মান কত ?

6. সরল কর :

(i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$

(ii) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. যদি $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হয়, তাহা হইলে

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$ এর মান নির্ণয় কর।

8. সরল কর : $\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

9. সরল কর : $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{5})}$

10. যদি $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তাহা হইলে
$x^4+x^2y^2+y^4$ এর মান নির্ণয় কর।

11. যদি $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ হয়, তাহা হইলে
$3x^2-5xy+3y^2$-এর মান নির্ণয় কর।

12. যদি $a=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ হয়, তাহা হইলে
$a^6+a^4+a^2+1$-এর মান কত হইবে ?

13. সরল কর : $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

14. যদি $a=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হয়, তাহা হইলে
$x^3+3bx-2a$ এর মান কত হইবে ?

15. যদি $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ হয়, দেখাও যে
$(x+y+z)^3-27xyz=0.$

16. যদি $(a+b)^{\frac{1}{3}}+(b+c)^{\frac{1}{3}}+(c+a)^{\frac{1}{3}}=0$ হয়
দেখাও যে $(a+b+c)^3=9(a^3+b^3+c^3)$

17. দেখাও যে $(2+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}+(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{6}$

18. সরল কর : $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

19. যদি $a=\frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}}$, $b=\frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1}}$ হয়

তাহা হইলে $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

20. যদি $x=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}+\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}$ হয়,

প্রমাণ কর $a(bx^3-3bx-a)=b^2$.

21. দেখাও যে

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=0.$$

22. $x=\dfrac{q-\sqrt{p^2-4q}}{q+\sqrt{p^2-4q}}$ হইলে দেখাও যে

$$(q^2-p^2+4q)(x^2+1)-2(p^2+q^2-4q)x=0.$$

23. $x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}},\ y=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ হইলে দেখাও যে

$x^3+y^3=1692.$

24. দেখাও যে

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{6(7+\sqrt{5})}{11}$$

# তৃতীয় অধ্যায়

## জটিল রাশি (Complex Number)

3.1. আমরা জানি কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশির বর্গ ধনাত্মক হয়। যেমন $(+4)^2=16$ এবং $(-4)^2=16$. অতএব কোন ধনাত্মক রাশির বর্গমূল বাস্তব রাশি হইবে। যেমন 16-এর বর্গমূল $+4$ বা $-4$ হইবে। আবার কোন বাস্তব রাশির বর্গ ঋণাত্মক হইতে পারে না, অতএব কোন ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল বাস্তব হইতে পারে না। যেমন $\sqrt{-16}$ কখনই $+4$ বা $-4$ হইতে পারে না এবং $\sqrt{-b^2}$ এর মান কখনই $+b$ বা $-b$ হইবে না। কিন্তু $\sqrt{b^2}$এর মান $+b$ বা $-b$ হইবে। অতএব ঋণাত্মক ( Negative ) রাশির বর্গমূলকে কাল্পনিক ( Imaginary ) রাশি বলে। কাল্পনিক রাশির সম্পূর্ণ বাস্তব সত্তা নাই।

যেমন $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\times16}=\sqrt{-1}\times\sqrt{16}=\sqrt{-1}\times4$

অতএব আমরা বলিতে পারি যে, ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল $=\sqrt{-1}\times$ ধনাত্মক রাশির বর্গমূল।

$\sqrt{-1}$কে $i$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore\ \sqrt{-16}=\sqrt{-1}\times4=i\times4=4i$

$\sqrt{-b^2}=\sqrt{-1}\times\sqrt{b^2}=\sqrt{-1}\times b=ib.$

### 3.2. $i^2$-এর মান নির্ণয় :

এখন $i^2=(\sqrt{-1})^2=(-1)^{\frac{1}{2}\times2}=-1$

$\therefore\ i^2=-1.$

### $i$-এর বিভিন্ন ঘাত :

$i=\sqrt{-1}$

$i^2=(\sqrt{-1})^2=(-1)^{\frac{1}{2}\times2}=-1$

$i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$

$i^4=(i^2)^2=i^2\times i^2=(-1)\times(-1)=+1$

$i^5=i^4\times i=+1\times i=+i$

$i^6=i^4\times i^2=+1\times-1=-1$

$i^7=i^5\times i^2=+i\times-1=-i$ ইত্যাদি।

$m$ যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে

$$i^{4m}=(i^4)^m=(+1)^m=+1$$
$$i^{4m+1}=i^{4m}.i=+i$$
$$i^{4m+2}=i^{4m}.i^2=+1\times-1=-1$$
$$i^{4m+3}=i^{4m}.i^3=+1\times-i=-i$$ ইত্যাদি।

**$i$-এর ঋণাত্মক ( Negative ) ঘাত :**

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$$
$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1$$
$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i^2.i}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i\times i}=+i$$
$$i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i^2.i^2}=\frac{1}{-1\times-1}=+1.$$

$m$ যদি ধনাত্মক ( Positive ) পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে

$$i^{-4m}=\frac{1}{i^{4m}}=\frac{1}{(1)^m}=\frac{1}{1}=1$$
$$i^{-(4m+1)}=\frac{1}{i^{(4m+1)}}=\frac{1}{i^{4m}.i}=\frac{1}{i}=-i$$
$$i^{-(4m+2)}=\frac{1}{i^{4m+2}}=\frac{1}{i^{4m}.i^2}=\frac{1}{1\times-1}=-1$$
$$i^{-(4m+3)}=\frac{1}{i^{(4m+3)}}=\frac{1}{i^{4m}.i^3}=\frac{1}{1.i^2.i}=\frac{1}{-1\times i}=\frac{i}{-1\times i^2}$$
$$=\frac{i}{+1}=+i.$$

বাস্তবরাশি ঘটিত যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ যাবতীয় প্রক্রিয়া, কাল্পনিক রাশির বেলাতে এই সকল প্রক্রিয়া প্রযোজ্য হইবে।

যেমন (i) $5i+3i=8i$

(ii) $8i-2i=6i$

(iii) $4i\times4i=16i^2=16\times-1=-16$

(iv) $\frac{8i}{4i}=2$ ইত্যাদি।

## 3.3. জটিল রাশি ( Complex Number )

যে-কোন দুইটি বাস্তব রাশি $a$ ও $b$ যদি $a+ib$ আকারে প্রকাশ করা যায় তাহা হইলে $a+ib$কে জটিল রাশি বলে।

যেমন $4+3i$, $2+5i$, $\sqrt{2}+5i$ প্রত্যেকটি জটিল রাশি।

$a+ib$ রাশির $a$ হইল বাস্তব এবং $ib$ হইল কাল্পনিক।

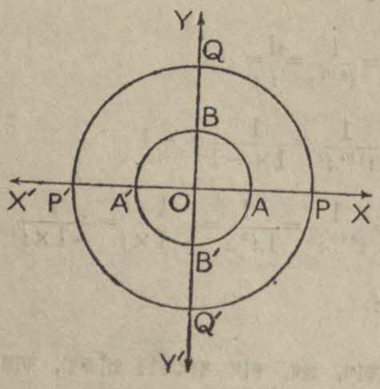
যদি $a=0$ হয় তাহা হইলে জটিল রাশি সম্পূর্ণ কাল্পনিক রাশিতে পরিণত হয় এবং $b=0$ হইলে জটিল রাশিটি বাস্তব রাশিতে পরিণত হয়।

$a+ib$ ও $a-ib$ এই দুইটি জটিল রাশির একটিকে অপরটির অনুবন্ধী জটিল রাশি ( Conjugate Complex Quantity ) বলে।

$a+ib$ এবং $c+id$ এই দুইটি জটিল রাশি সমান হইবে যদি $a=c$ এবং $b=d$ হয়। অর্থাৎ বাস্তব অংশ দুইটি পরস্পর সমান এবং কাল্পনিক অংশ দুইটিও পরস্পর সমান হয়।

## 3.4. $i$-এর জ্যামিতিক অর্থ ( Geometrical Interpretation of i ) :

মনে কর, $XOX'$ এবং $YOY'$ দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব এবং উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O-কে মূলবিন্দু বলা হয়। $XOX'$-কে $x$-অক্ষ, $YOY'$-কে $y$-অক্ষ বলা হয়। O-কে কেন্দ্র করিয়া 1-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল যাহা $x$-অক্ষকে A ও A′ বিন্দুদ্বয়ে এবং $y$ অক্ষকে B ও B′ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল। A ( $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে A অবস্থিত ) $+1$ বিন্দু সূচিত করে এবং A′ ( $x$-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে A′ অবস্থিত ) $-1$ বিন্দু সূচিত করে।




এখন A বিন্দু ধনাত্মক দিকে ( anticlockwise ) এক সমকোণ করিয়া B-তে আসিল এবং B বিন্দু হইতে আর এক সমকোণ করিয়া A′-এর অবস্থানে আসিল। এখানে $\angle AOA'=2$ সমকোণ হইল। A′ বিন্দু দ্বারা $-1$ বা $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ বা, $i\times i$ বা, $i^2$ সূচিত হয়। অতএব A বিন্দু B বিন্দুতে

আসিলে B বিন্দু দ্বারা $\sqrt{-1}$ বা $i$ সূচিত হয়। আবার A বিন্দু A´ বিন্দু হইতে 1 সমকোণ করিয়া B´ বিন্দুতে আসিল। অতএব A বিন্দু B´ বিন্দুতে আসিতে তিন সমকোণ ঘুরিল। B´ বিন্দু দ্বারা $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ বা $i\times i\times i$ বা $i^3$ বা $-i$ সূচিত হয়।

আবার B´ বিন্দু হইতে এক সমকোণ ঘুরিয়া A বিন্দু A বিন্দুতেই ফিরিয়া আসিল।

∴ A বিন্দু ধনাত্মক দিকে 4 সমকোণ ঘুরিয়া পুনরায় A বিন্দুতে ফিরিয়া আসিল।

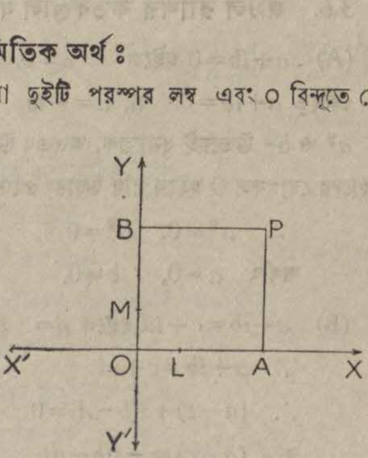
∴ A বিন্দু $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ বা $i\times i\times i\times i$ বা $i^4$ বা 1 দ্বারা সূচিত হয়।

∴ A বিন্দুদ্বারা 1 সূচিত হয়;
B বিন্দুদ্বারা $i$ সূচিত হয়;
A´ বিন্দুদ্বারা $-1$ সূচিত হয়;
B´ বিন্দু দ্বারা $-i$ সূচিত হয়।

এখানে $+1$ ও $-1$ বাস্তব সংখ্যা এবং $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থিত আর $i$ ও $-i$ কাল্পনিক সংখ্যা $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত। যেহেতু ব্যাসার্ধ 1 একটি বাস্তব সংখ্যা, অতএব সমস্ত বাস্তব সংখ্যা $x$-অক্ষের উপর থাকিবে। এই কারণে $x$-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ (Real axis) এবং $y$-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ (Imaginary axis) বলে।

## 3.5. জটিল রাশির জ্যামিতিক অর্থ:

XOX´ এবং YOY´ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব এবং O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। XOX´ হইল বাস্তব অক্ষ এবং YOY´ হইল কাল্পনিক অক্ষ। O মূলবিন্দু।




$a+ib$ একটি জটিল রাশি এবং ইহার $a$ বাস্তব এবং $b$ বাস্তব হইলেও $ib$ কাল্পনিক। OX-এর উপর এমন দুইটি বিন্দু L ও A লও যেন $OL=1$ এবং $\frac{OA}{OL}=a$ হয়।

∴ A বিন্দু দ্বারা $a$ ( বাস্তব সংখ্যা ) সূচিত হইল।

যদি $a$ ঋণাত্মক ( Negative ) হয় তাহা হইলে A বিন্দুটি OX´-এর উপর হইবে। আবার OY-এর উপর এমন দুইটি বিন্দু M ও B লও যেন $OM=OL=1$ এবং $\frac{OB}{OM}=b$ হয়।

যেহেতু YOY´ কাল্পনিক অক্ষ, অতএব B বিন্দুটি দ্বারা $ib$ সূচিত হইবে। যদি B´ বিন্দু OY´-এর উপর এমনভাবে লওয়া হয় যেন $OB'=OB$, তাহা হইলে B´ বিন্দুটি দ্বারা $-ib$ সূচিত হইবে।

এখন A বিন্দুর মধ্য দিয়া OX-এর উপর ( ধনাত্মক দিকে ) এবং B বিন্দুর মধ্য দিয়া OY-এর উপর ( ধনাত্মক দিকে ) দুইটি লম্ব টান। এই লম্ব দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। ∴ P বিন্দু দ্বারা $a+ib$ সূচিত হইল। এতএব XOX´ এবং YOY´ অক্ষদ্বয়গামী সমতলের উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, b)$ হইলে ঐ বিন্দু দ্বারাই $a+ib$ জটিল রাশিটি সূচিত হইবে।

**মন্তব্য ঃ** মূলবিন্দু O, $0+i0$কে সূচিত করে। XOX´ ও YOY´ অক্ষদ্বয়-গামী এই সমতলকে জটিল সমতল বলে।

$OP=\sqrt{a^2+b^2}$কে $a+ib$ এর পরমমান বা মডিউলাস ( Modulus ) বলে।

যেমন $4+3i$ এর পরমমান বা মডিউলাস হইল $\sqrt{16+9}=25$

## 3.6. জটিল রাশির কতকগুলি ধর্ম ঃ

(A) $a+ib=0$ হইলে $a=0,\ b=0$ হইবে।

যেহেতু $a+ib=0$ বা, $a=-ib$ বা, $a^2=-b^2$ বা, $a^2+b^2=0$

$a^2$ ও $b^2$ উভয়েই ধনাত্মক, অতএব উহাদের যোগফল 0 হইতে পারে না। উহাদের যোগফল 0 হইবে যদি উহারা প্রত্যেকে আলাদাভাবে শূন্য ( 0 ) হয়।

$\therefore\ a^2=0,\ b^2=0$

অর্থাৎ $a=0,\ b=0.$

(B) $a+ib=c+id$ হইলে $a=c$ এবং $b=d$ হইবে।

$\because\ a+ib=c+id$

$\therefore\ (a-c)+i(b-d)=0$

বা, $(a-c)=-i(b-d)$

বা, $(a-c)^2=-(b-d)^2$

$\therefore\ (a-c)^2+(b-d)^2=0$

যেহেতু $(a-c)^2$ এবং $(b-d)^2$ উভয়েই ধনাত্মক, সেই কারণে উহাদের যোগফল 0 হইতে পারে যদি উহারা প্রত্যেকে 0 হয়।

$$\therefore \quad a-c=0, \quad b-d=0$$

অর্থাৎ $a=c$ এবং $b=d$.

অতএব দুইটি কাল্পনিক জটিল রাশি পরস্পর সমান হইলে বাস্তব অংশদ্বয় পরস্পর সমান এবং কাল্পনিক অংশদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

(C) দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির (Conjugate Complex Numbers) যোগফল ও গুণফল বাস্তব হইবে।

(i) $(a+ib)+(a-ib)=2a$ ( বাস্তব )

(ii) $(a+ib)\times(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$ ( বাস্তব )

(D) দুইটি জটিল রাশির যোগফল ও বিয়োগফল জটিল রাশি হইবে।

(i) $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i\,(b+d)$ ( জটিল রাশি )

(ii) $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i\,(b-d)$ ( জটিল রাশি )

(iii) $(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$ ( জটিল রাশি )

**মন্তব্য ঃ** দুই বা ততোধিক জটিল রাশির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল জটিল রাশি হইবে।

(E) দুইটি জটিল রাশির ভাগফল জটিল রাশি।

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+i\,(bc-bd)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-bd}{c^2+d^2}$$

( ইহা জটিল রাশি )

(F) জটিল রাশির যে-কোন ঘাত জটিল রাশি।

$$(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$$

$$=a^2-b^2+i\,2ab$$ ( ইহা জটিল রাশি )

$$(a+ib)^3=a^3+3a^2.ib+3a.\,(ib)^2+(ib)^2$$

$$=(a^3-3ab^2)+i\,(3a^2b-b^2)$$ ( ইহা জটিল রাশি )

(G) জটিল রাশির যে-কোন মূল জটিল রাশি।

মনে কর, $a+ib$ জটিল রাশি এবং মনে কর, $\sqrt[n]{a+ib}=x$

$$\therefore \quad a+ib=x^n$$

$x$ যদি বাস্তব হয় তাহা হইলে $x^n$ বাস্তব হইবে।

যেহেতু $x^n$ বাস্তব, অতএব $a+ib$ বাস্তব হইবে কিন্তু কল্পনানুসারে ইহা জটিল রাশি।

$\therefore$ $x$ বাস্তব হইতে পারে না।

$\therefore$ $\sqrt[n]{a+ib}$ ও বাস্তব হইতে পারে না এবং $\sqrt[n]{a+ib}$ জটিল রাশি হইবে।

**3.7. জটিল রাশির বর্গমূল** ( Square root of a Complex Number ) **:**

মনে কর, $\sqrt{a+ib} = x+iy$

$\therefore\ a+ib=(x+iy)^2$

বা, $a+ib=x^2-y^2+i\,2xy$

$\therefore\ a=x^2-y^2 \cdots (i)$ [ $\because$ বাস্তব অংশ বাস্তব

$b=2xy \quad \cdots (ii)$ অংশের সমান এবং কাল্পনিক অংশ কাল্পনিক অংশের সমান। ]

$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2$

বা, $(x^2+y^2)^2=a^2+b^2$

$\therefore\ x^2+y^2=+\sqrt{a^2+b^2} \quad \cdots \quad (iii)$

$(i)+(iii),\ x^2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$

এবং $(iii)-(i),\ y^2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$

$$\therefore\ x=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm[\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}+i\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$

( যেখানে $b$ ধনাত্মক )

এবং নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm[\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}-i\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$

( যেখানে $b$ ঋণাত্মক )

**মন্তব্য :** (1) $b$ ধনাত্মক হইলে $(ii)$ হইতে পাই, $x$ ও $y$ উভয়েই ধনাত্মক অথবা উভয়েই ঋণাত্মক।

$b$ ঋণাত্মক হইলে, $x$ ও $y$-এর একটি ধনাত্মক অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

(2) যদি $\sqrt{a+ib}=x+iy$ হয়, তাহা হইলে

$\sqrt{a-ib}=x-iy$ হইবে।

এখন $\sqrt{a+ib}=x+iy$

বা, $a+ib=x^2-y^2+i2xy$

$\therefore\ a=x^2-y^2,\ \ b=2xy$

$\therefore\ a-ib=x^2-y^2-i2xy$

বা, $a-ib=(x-iy)^2$

$\therefore\ \sqrt{a-ib}=x-iy.$

## 3.8. পরমমান বা মডিউলাসের কতকগুলি ধর্ম :

$a+ib$-এর modulus-কে mod $(a+ib)$ লেখা হয়।

(*i*) mod $(a+ib)=$ mod $(a-ib)$

mod $(a+ib)=\sqrt{a^2+b^2}$

এবং mod $(a-ib)=\sqrt{a^2+(-ib)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ mod $(a+ib)=$ mod $(a-ib)$.

(*ii*) দুইটি জটিল রাশির modulus-এর গুণফল উহাদের modulus-দ্বয়ের গুণফলের সমান।

মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি।

এখন $(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$

ইহাদের modulus $=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2acbd+b^2c^2+a^2d^2+2bcad}$

$=\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)}\times\sqrt{(c^2+d^2)}=(a+ib)$-এর modulus $\times$ $(c+id)$-এর modulus.

**মন্তব্য :** দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের modulus উহাদের Modulus দুইটির ভাগফলের সমান।

## 3.9. 1-এর ঘনমূল (Cube root of unity) :

মনে কর, $x=\sqrt[3]{1}$

$\therefore\ x^3=1$ বা, $x^3-1=0$

বা, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x-1=0 \quad \cdots \quad (i)$

অথবা, $x^2+x+1=0 \quad \cdots \quad (ii)$

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $x=1$ এবং

(ii) হইতে পাই $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ $x$-এর ঘনমূল হইল $1,\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

ইহার প্রথমটি বাস্তব এবং অপর দুইটি কাল্পনিক।

**এককের ঘনমূল সম্বন্ধে কতকগুলি সিদ্ধান্ত :**

(1) 1-এর ঘনমূল তিনটির যোগফল $=0$.

এখন, $1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}=1-1=0.$$

(2) 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল 1 হইবে।

গুণফল $=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\times\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$$=\frac{1}{4}[(-1)^2-(\sqrt{-3})^2]=\frac{1}{4}(1+3)=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\frac{1}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})}.$$

অতএব দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক কাল্পনিক ঘনমূল অপরটির অন্যোন্যক ( reciprocal )।

(3) 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির প্রত্যেকটির বর্গ অপরটির সমান।

এখন $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3-2\sqrt{-3})$

$$=\frac{1}{4}(-2-2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$$

আবার $\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{-3})$

$$=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}).$$

অতএব প্রত্যেক কাল্পনিক ঘনমূল অপর কাল্পনিক ঘনমূলের বর্গ। অতএব কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির একটিকে $\omega$ বলিলে অপরটি $\omega^2$ হয়। অর্থাৎ 1-এর ঘনমূলটিকে যথাক্রমে $1,\ \omega,\ \omega^2$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

**মন্তব্য :** (i) $1+\omega+\omega^2=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}+\frac{1}{2}-(-1-\sqrt{-3})$

$$=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

$$=0$$

1-এর তিনটি ঘনমূলের যোগফল $=0$

(ii) কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল $= \omega . \omega^2$

$= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) \times \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (-\sqrt{3})^2\}$

$= \frac{1}{4}\{1+3\} = \frac{4}{4} = 1$

$\therefore \quad \omega^3 = 1.$

**(4) $\omega$-এর বিভিন্ন মানের ঘাত ( Powers of $\omega$ )**

$\omega$-এর যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত $\omega$ বা $\omega^2$ হইবে।

$(\omega)^1 = \omega$

$(\omega)^2 = \omega^2$

$(\omega)^3 = 1$

$\omega^4 = \omega^3 . \omega = \omega$

$\omega^5 = \omega^3 . \omega^2 = \omega^2$

$\omega^6 = \omega^3 . \omega^3 = 1$

$\omega^7 = \omega^3 . \omega^3 . \omega = 1.1. \omega = \omega$

$n$ যদি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে

$\omega^{3n} = (\omega^3)^n = (1)^n = 1$

$\omega^{3n+1} = \omega^{3n} . \omega = 1 . \omega$

$\omega^{3n+2} = \omega^{3n} . \omega^2 = \omega^2$

আবার $\quad \omega^{-3} = \frac{1}{\omega^3} = \frac{1}{1} = 1$

$$\omega^{-4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3 . \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega . \omega^2} = \frac{\omega^2}{1} = \omega^2$$

$$\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 . \omega^2} = \frac{\omega}{\omega^3 . \omega^3} = \frac{\omega}{1.1} = \omega$$

$$\omega^{-6} = \frac{1}{\omega^6} = \frac{1}{\omega^3 . \omega^3} = \frac{1}{1.1} = 1$$

$$\omega^{-7} = \frac{1}{\omega^7} = \frac{1}{\omega^6 . \omega} = \frac{1}{1 . \omega} = \frac{\omega^2}{\omega^3} = \frac{\omega^2}{1} = \omega^2.$$

অতএব $\omega$-এর যে-কোন অখণ্ড ঘাতের সূচক ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন ঘাতটির মান 1, $\omega$ বা $\omega^2$ হইবে।

উদা. 1. $-1$-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $x=\sqrt[3]{-1}$

বা, $x^3=-1$ বা, $x^3+1=0$

বা, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

বা, $(x+1)=0$ ... ... $(i)$

বা, $x^2-x+1=0$ ... ... $(ii)$

$(i)$ হইতে পাই, $x=-1$,

$(ii)$ হইতে পাই, $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$

$\therefore$ $-1$-এর ঘনমূল হইল $-1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(+1-\sqrt{-3})$

উদা. 2. $4-3i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{4-3i}=x+iy$

বা, $4-3i=x^2-y^2+2ixy$

যেহেতু বাস্তব মানগুলি বাস্তব মানগুলির সমান এবং কাল্পনিক মানগুলি কাল্পনিক মানগুলির সমান,

$\therefore$ $x^2-y^2=4$ ... $(i)$

$2xy=-3$ ... $(ii)$

$\therefore$ $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2$

$=16+9=25$

$\therefore$ $x^2+y^2=5$ ... $(iii)$

$(i)+(iii)$, $2x^2=9$ $\therefore$ $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$(iii)-(i)$, $2y^2=1$ $\therefore$ $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $(ii)$ হইতে দেখা যায় $xy$ ধনাত্মক।

সুতরাং $x$ ও $y$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\dfrac{3}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3-i)$

এবং নির্ণেয় বর্গমূল $=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3-i)$

অর্থাৎ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3-i)$.

উদা. 3. $\frac{3+4i}{3-4i}$কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর।

$$\frac{3+4i}{3-4i}=\frac{(3+4i)(3+4i)}{(3)^2-(4i)^2}=\frac{(3+4i)^2}{9+16}=\frac{9-16+24i}{25}$$

$$=\frac{24i-7}{25}=-\frac{7}{25}+i\frac{24}{25}.$$

ইহা $A+iB$ আকারের।

উদা. 4. $i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$i=\tfrac{1}{2}\times 2i=\tfrac{1}{2}(2i+1-1)=\tfrac{1}{2}(1+2i-1)$$

$$=\tfrac{1}{2}(1+2i+i^2)=\tfrac{1}{2}(1+i)^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$\therefore$ $i$-এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$

উদা. 5. $3+4i$-এর modulus নির্ণয় কর।

mod $(3+4i)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে $x$-এর বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে যদি $a^2+b^2=1$ হয়।

যেহেতু $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$

বা, $1-ix=a+iax-ib+bx$

বা, $bx+iax+ix=1-a+ib$

বা, $x\{b+(a+1)i\}=(1-a)+ib$

$$\therefore\quad x=\frac{1-a+ib}{b+i(1+a)}=\frac{(1-a+ib)\{b-i(1+a)\}}{(b)^2-\{i(1+a)\}^2}$$

$$=\frac{\{(1-a)+ib\}\{b-(a+1)i\}}{b^2-\{(a+1)i\}^2}$$

$$=\frac{b-ab+ib^2-(a+1)i+ia(a+1)+b(a+1)}{b^2+(a+1)^2}$$

$$=\frac{2b+i(b^2+a^2-1)}{b^2+(a+1)^2}=\frac{2b+i(b^2+a^2-1)}{b^2+a^2+2a+1}$$

এখন দেখা যাইতেছে যে, যদি $b^2+a^2-1=0$ হয় অর্থাৎ যদি $b^2+a^2=1$ হয় তাহা হইলে $i(b^2+a^2-1)=0$ হইবে এবং তখন $x$-এর বাস্তব মান $\frac{2b}{b^2+a^2+2a+1}$ হইবে।

$\therefore$ $a^2+b^2=1$ হইলে $x$-এর বাস্তব মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে।

উদা. 7. দেখাও যে $(1-w+w^2)^2+(1+w-w^2)^2=-4.$

$$\text{বামপক্ষ}=1+w+w^4-2w+2w^2-2w^3+1+w^2+w^4+2w-2w^2-2w^3$$

$$=1+w^2+w^3.w-2w+2w^2-2w^3+1+w^2+w^3.w+2w-2w^2-2w^3$$

$$=1+w^2+1.w-2w+2w^2-2.1+1+w^2+1.w+2.w-2w^2-2.1$$

$$=1+w+w^2-2(w+w^2+1)+3w^2+3w-1$$

$$=0-2.0+3(w^2+w)-1 \quad [\because 1+w+w^2=0 \text{ এবং } w^3=1]$$

$$=3(-1)-1=-3-1=-4.$$

উদা. 8. $x+iy$ যদি $a+ib$-এর একটি ঘনমূল হয়, প্রমাণ কর

$$4(x^2-y^2)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}.$$

আমরা জানি $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$

বা, $a+ib=(x+iy)^3$

বা, $a+ib=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

$\therefore$ $a=x^3-3xy^2$

$b=3x^2y-y^3$

$$\therefore \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{x^3-3xy^2}{x}+\frac{3x^2y-y^3}{y}$$

$$=\frac{x^3y-3xy^3+3x^3y-xy^3}{xy}$$

$$=\frac{4x^3y-4xy^3}{xy}=\frac{4xy(x^2-y^2)}{xy}$$

$$=4(x^2-y^2).$$

## প্রশ্নমালা 3

1. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $42i-40$ (ii) $21-20\sqrt{-1}$

(iii) $7-24i$ (iv) $16-30\sqrt{-1}$

(v) $a^2+2ai-1$

2. নিম্নলিখিত রাশিগুলির modulus নির্ণয় কর :

(i) $4-3i$ (ii) $\dfrac{24+7i}{3+4i}$ (iii) $\dfrac{8-6i}{8+6i}$ (iv) $1-i$

3. (a) দেখাও যে

(i) $\dfrac{1}{(1-i)^2}-\dfrac{1}{(1+i)^2}=i$

(ii) $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

(iii) $\dfrac{1}{(2+i)^2}+\dfrac{1}{(2-i)^2}=\dfrac{6}{25}$

(iv) $\sqrt{4+3\sqrt{-20}}+\sqrt{4-3\sqrt{-20}}=6$

(v) $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2}=0$

(b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$-কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর।

4. যদি $x=3+4i$, $y=3-4i$ হয় যেখানে $i=\sqrt{-1}$, তাহা হইলে $x^3+y^3$-এর মান কত ?

5. যদি $a=\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ হয়, দেখাও যে

$$a^6+a^4+a^2+1=0.$$

6. যদি $a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $b=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হয়,

দেখাও যে $a^4+a^2b^2+b^4=0$.

7. দেখাও যে $(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw)$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

8. প্রমাণ কর $(1+w-w^2)^3=(1-w+w^2)^3=-8$.

9. প্রমাণ কর $(x+y)^2+(xw+yw^2)^2+(xw^2+yw)^2=6xy$.

10. যদি $i=\sqrt{-1}$ হয়, দেখাও যে $\dfrac{3+7i}{2-5i}+\dfrac{3-2i}{2+5i}=-\dfrac{8}{29}$.

11. দেখাও যে

(i) $(3+3w+5w^2)^2=(3+5w+3w^2)^6=64.$

(ii) $(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw).$
$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

(iii) $(1-w)(1-w^2)(1-w^4)(1-w^8)=9.$

(iv) $(a-bw^2+cw)(c-bw+aw^2)=w.$

(v) $(1-w+w^2)^4+(1+w-w^2)^4=-16.$

(vi) $(1-w^2)(1-w^4)(1-w^8)(1-w^{10})=9.$

(vii) $\left\{\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^6=1.$

12. যদি $\sqrt{a-ib}=x-iy$ হয়, দেখাও যে $\sqrt{a+ib}=x+iy.$

13. দেখাও যে $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$
$=(x+yw^2+zw)(x+yw+zw^2).$

14. যদি $x=a+b,\ y=a+bw,\ z=a+bw^2$ হয়,
দেখাও যে $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3).$

15. যদি $\dfrac{a+ib}{c+id}=x+iy$ হয়,

দেখাও যে $\dfrac{a-ib}{c-id}=x-iy.$

# চতুর্থ অধ্যায়

## ভেদ (Variation)

4.1. মনে কর, $A$ ও $B$ দুইটি চলরাশি। $A$-এর মান পরিবর্তন হইলে যদি $B$-এর মান একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় তবে এই পরিবর্তনকে সরলভেদ ( Direct Variation ) বলে এবং $A$ ও $B$-কে সরলভেদে অবস্থিত বলে।

$A$ ও $B$ সরলভেদে থাকিলে $A \propto B$ ( $A$ varies directly as $B$, or, simply, $A$ varies as $B$ ) লিখিয়া প্রকাশ করা হয়। আবার $B$-এর মান পরিবর্তন হইলে যদি $A$-এর মান একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় তবে এই পরিবর্তনকেও সরলভেদ বলে।

এক্ষেত্রে $B$ ও $A$-কে সরলভেদে অবস্থিত বলে।

$B \propto A$ লিখিয়া ইহা প্রকাশ করা হয়।

$A$ ও $B$ যদি একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ যদি $A \propto B$ হয়, তাহা হইলে $A = KB$ হয়, যেখানে $K$ একটি ধ্রুবক।

ধর, $A \propto B$, তাহা হইলে $A = KB$ হইবে।

$\therefore\ B = \frac{1}{K}A \qquad \therefore\ B \propto A$ হইবে।

এখানে দেখা যাইতেছে $A$ যদি $B$-এর সহিত সরলভেদে থাকে তাহা হইলে $B$-ও $A$-এর সহিত সরলভেদে থাকিবে। কিন্তু প্রথম ক্ষেত্রে ধ্রুবক $K$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ধ্রুবক $\frac{1}{K}$ হইয়াছে।

**ধ্রুবক ($K$)-এর মান নির্ণয়ঃ**

মনে কর, $A \propto B$ এবং $A = 10,\ B = 2$

যেহেতু $A \propto B \quad \therefore \quad A = KB$

বা, $\quad 10 = K.2$

$\therefore \quad K = 5.$

4.2. **ব্যস্ত ভেদ ( Inverse Variation ) :**

যদি $A \propto \frac{1}{B}$ অর্থাৎ যদি $A$ এবং $\frac{1}{B}$ সরলভেদে থাকে তাহা হইলে $A$, $B$-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে বলা হয়।

এখানে $A \propto \frac{1}{B} \qquad \therefore\ A = K_1.\frac{1}{B}$

$AB = K_1$ ( যেখানে $K_1$ একটি ধ্রুবক )

সুতরাং $A$, $B$-এর সহিত ব্যস্তভেদে থাকিলে উহাদের গুণফল $AB$ একটি ধ্রুবক।

বিপরীতক্রমে, $A$ এবং $B$ ব্যস্তভেদে থাকিলে $A$ ও $\frac{1}{B}$ সরলভেদে থাকে।

যেহেতু $A$ ও $B$ ব্যস্তভেদে আছে

$\therefore\ A \propto \frac{1}{B}$ বা, $A=K_1 . \frac{1}{B}$ বা, $AB=K_1$.

$\therefore$ দুইটি চলরাশি ব্যস্তভেদে থাকিলে উহাদের গুণফল ধ্রুবক হইবে।

বিপরীতক্রমে, $AB=K_1$ হইলে $A \propto \frac{1}{B}$ এবং $B \propto \frac{1}{A}$ হয়।

$\therefore\ AB=K_1$ হইলে $A$ ও $B$ ব্যস্তভেদে থাকিবে।

### 4.3. যৌগিক ভেদ ( Joint Variation ) :

$A$ যদি $B$ ও $C$-এর গুণফলের সহিত সরলভেদে থাকে অর্থাৎ যদি $A \propto B \times C$ হয়, তাহা হইলে বলা যায় যে $A$, $B$ ও $C$-এর সহিত যৌগিক ভেদে আছে।

$\therefore\ A \propto BC$ হইলে

$A=KBC$, যেখানে $K$ একটি ধ্রুবক।

ইহাকে বলা হয় $A$ varies jointly as $B$, $C$.

বিপরীতক্রমে, $A$ যদি $B$ ও $C$-এর সহিত সরল যৌগিক ভেদে থাকে, তাহা হইলে $A$ এবং $BC$ সরলভেদে থাকিবে এবং $A=KBC$ হইবে, যেখানে $K$ একটি ধ্রুবক।

যদি $A \propto \frac{B}{C}$ হয় তাহা হইলে বলা যায় $A$, $B$-এর সহিত সরলভেদে এবং $C$-এর সহিত ব্যস্তভেদে আছে।

### 4.4. যৌগিক ভেদ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা :

যদি $A \propto B$ যখন $C$ অপরিবর্তিত থাকে এবং $A \propto C$ যখন $B$ অপরির্তিত থাকে, তাহা হইলে $A \propto BC$ যখন $B$ ও $C$ উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

### ভেদ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা :

(i) যদি $A \propto B$ হয় তাহা হইলে $B \propto A$ হইবে।

**প্রমাণ :** যেহেতু $A \propto B$

$\therefore\ A \propto KB$, যেখানে $K$ একটি ধ্রুবক।

বা, $B=\frac{1}{K}.A$

$\therefore\ B \propto A$, যেখানে $\frac{1}{K}$, একটি ধ্রুবক।

(ii) যদি $A\propto B$ এবং $B\propto C$ হয়, তাহা হইলে $A\propto C$ হইবে।

**প্রমাণঃ** যেহেতু $A\propto B$ $\therefore$ $A=KB$, যেখানে $K$ একটি ধ্রুবক।

যেহেতু $B\propto C$ $\therefore$ $B=K_1C$, যেখানে $K_1$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ $A=KB=KK_1C$

অর্থাৎ $A=KK_1C$

$\therefore$ $A\propto C$, যেখানে $KK_1$ একটি ধ্রুবক।

(iii) যদি $A\propto C$ এবং $B\propto C$ হয়, তাহা হইলে $(A\pm B)\propto C$ এবং $\sqrt{AB}\propto C$ হইবে।

**প্রমাণঃ** যেহেতু $A\propto C$ $\therefore$ $A=KC$, $K$ একটি ধ্রুবক।

যেহেতু $B\propto C$ $\therefore$ $B=K_1C$, $K_1$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ $(A\pm B)=(K\pm K_1)C$

$\therefore$ $(A\pm B)\propto C$, যেখানে $K\pm K_1$ উভয়েই ধ্রুবক।

আবার $AB=KK_1C^2$

বা, $\sqrt{AB}=\sqrt{KK_1}C$

$\therefore$ $\sqrt{AB}\propto C$, যেখানে $\sqrt{KK_1}$ একটি ধ্রুবক।

(iv) যদি $A\propto B$ হয়, তাহা হইলে $A^n\propto B^n$ হইবে।

**প্রমাণঃ** যেহেতু $A\propto B$ $\therefore$ $A=KB$, $K$ একটি ধ্রুবক।

বা, $A^n=K^nB^n$

$\therefore$ $A^n\propto B^n$, যেখানে $K^n$ একটি ধ্রুবক।

(v) যদি $A\propto B$ এবং $C\propto D$ হয় তাহা হইলে $AC\propto BD$ এবং $\frac{A}{C}\propto\frac{B}{D}$ হইবে।

**প্রমাণঃ** যেহেতু $A\propto B$ $\therefore$ $A=KB$, $K$ একটি ধ্রুবক।

যেহেতু $C\propto D$ $\therefore$ $C=K_1D$, $K_1$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ $AC=KK_1BD$ $\therefore$ $AC\propto BD$, যেখানে $KK_1$ একটি ধ্রুবক।

আবার, $\frac{A}{C}=\frac{K}{K_1}\frac{B}{D}$ $\therefore$ $\frac{A}{C}\propto\frac{B}{D}$, যেহেতু $\frac{K}{K_1}$ একটি ধ্রুবক।

(vi) যদি $A\propto BC$ হয়, তাহা হইলে $B\propto\frac{A}{C}$ এবং $C\propto\frac{A}{B}$ হইবে।

**প্রমাণ :** যেহেতু $A \propto BC$ $\therefore$ $A=KBC$, $K$ একটি ধ্রুবক।

$$\therefore \quad B=\frac{1}{K}\cdot\frac{A}{C} \text{ এবং } C=\frac{1}{K}\cdot\frac{A}{B}$$

$$\therefore \quad B\propto\frac{A}{C} \text{ এবং } C\propto\frac{A}{B}, \quad \text{যেহেতু } \frac{1}{K} \text{ একটি ধ্রুবক।}$$

**মন্তব্য :** দুইটি অথবা তাহার বেশী ধ্রুবকের যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল প্রত্যেকেই একটি করিয়া ধ্রুবক হইবে।

**উদা. 1.** যদি $x$ ও $y$ সরলভেদে থাকে এবং $x=5$, $y=3$ হয়, তাহা হইলে

(i) ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর।

(ii) $x$ ও $y$-এর মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

(iii) $x$-এর মান নির্ণয় কর যদি $y=\frac{2}{5}$ হয়।

(i) $\because$ $x\propto y$ $\therefore$ $x=ky$, $k$ একটি ধ্রুবক।

এখানে $x=5$, $y=3$ $\therefore$ $5=k.3$ $\therefore$ $k=\frac{5}{3}$.

(ii) $x=ky$ সমীকরণে $k$-এর মান বসাইয়া পাই,

$x=\frac{5}{3}y$। ইহা হইল $x$ ও $y$-এর মধ্যে নির্ণেয় সম্বন্ধ।

(iii) $x=\frac{5}{3}y$

এখানে যেহেতু $y=\frac{2}{5}$ $\therefore$ $x=\frac{5}{3}.\frac{2}{5}=\frac{2}{3}$.

**উদা. 2.** যদি $(x+y)$ ও $(x-y)$ সরলভেদে থাকে, তাহা হইলে দেখাও যে $(x^2+y^2)$ ও $xy$ সরলভেদে থাকিবে অর্থাৎ $(x^2+y^2)\propto xy$ হইবে।

যেহেতু $(x+y)\propto(x-y)$ $\therefore$ $x+y=k(x-y)$

বা, $(x+y)^2=k^2(x-y)^2$

বা, $x^2(1-k^2)+y^2(1-k^2)=-2xy(k^2+1)$

বা, $(1-k^2)(x^2+y^2)=-2xy(k^2+1)$

বা, $(x^2+y^2)(k^2-1)=2xy(k^2+1)$

বা, $x^2+y^2=2.\frac{k^2+1}{k^2-1}.xy$

$\therefore$ $(x^2+y^2)\propto xy$, যেখানে $2.\frac{k^2+1}{k^2-1}$ একটি ধ্রুবক।

উদা. 3. যদি $(A^2+B^2)\propto(A^2-B^2)$ হয় দেখাও যে $A\propto B$ হইবে।

$\because \quad A^2+B^2\propto A^2-B^2$

বা, $A^2+B^2=K(A^2-B^2)$, $K$ একটি ধ্রুবক।

বা, $\dfrac{A^2+B^2}{A^2-B^2}=\dfrac{K}{1}$

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$$\frac{A^2+B^2+A^2-B^2}{A^2+B^2-A^2+B^2}=\frac{K+1}{K-1}$$

বা, $\dfrac{A^2}{B^2}=\dfrac{K+1}{K-1}$

বা, $A^2=\dfrac{K+1}{K-1}B^2$

$\therefore \quad A^2\propto B^2$, যেখানে $\dfrac{K+1}{K-1}$ একটি ধ্রুবক।

উদা. 4. যদি $(x+y)\propto z$, যখন $y$ ধ্রুবক এবং $(x+z)\propto y$, যখন $z$ ধ্রুবক, প্রমাণ কর যে $(x+y+z)\propto yz$ যখন $y$ ও $z$ উভয়েই পরিবর্তনশীল।

যেহেতু $(x+y)\propto z \quad \therefore x+y=kz$, $k$ একটি ধ্রুবক।

$x+y+z=kz+z=z(k+1)$

$=k_1z$, যেখানে $k_1=k+1$

$\therefore x+y+z\propto z$, যেখানে $k_1$ একটি ধ্রুবক যখন $y$ ধ্রুবক।

আবার $(x+z)\propto y \quad \therefore \quad x+z=k'y$, $k'$ একটি ধ্রুবক।

বা, $x+y+z=k'y+y$

বা, $x+y+z=y(k'+1)=k'_1y$

$\therefore \quad x+y+z\propto y$, যেখানে $k'_1$ একটি ধ্রুবক যখন $z$ ধ্রুবক।

$\therefore \quad x+y+z\propto yz$ যখন $y$ ও $z$ উভয়েই পরিবর্তনশীল (যৌগিক ভেদ উপপাদ্যের সাহায্যে)।

উদা. 5. কোন Hostel-এর খরচের কিছু অংশ অপরিবর্তনশীল এবং কিছু অংশ বোর্ডারের সংখ্যার সহিত সরলভেদে থাকে। যখন 25 জন বোর্ডার থাকে তখন বোর্ডার পিছু 70 টাকা এবং যখন 50 জন বোর্ডার থাকে তখন বোর্ডার পিছু 60 টাকা খরচ হয়। যখন বোর্ডারের সংখ্যা 100 জন তখন বোর্ডার পিছু কত খরচ হয়?

মনে কর, $A=$ প্রতিমাসে অপরিবর্তনশীল ব্যয়

$B=$ প্রতিমাসে পরিবর্তনশীল ব্যয়

$n=$ বোর্ডারের সংখ্যা

$\therefore\ B\propto n$

বা, $B=Kn$, যেখানে $K$ একটি ধ্রুবক।

বোর্ডার পিছু 70 টাকা করিয়া খরচ হইলে 25 জন বোর্ডারের জন্য মোট খরচ $70\times25=1750$ টাকা।

বোর্ডার পিছু 60 টাকা করিয়া খরচ করিলে মোট খরচ $60\times50=3000$ টাকা।

অতএব শর্তানুসারে, $A+25K=1750 \quad\cdots\quad (i)$

$A+50K=3000 \quad\cdots\quad (ii)$

$(i)$ ও $(ii)$ হইতে পাই, $A=500,\ K=50$

$\therefore$ 100 বোর্ডারের জন্য খরচ $=A+100K=500+100\times50$

$=500+5000$

$=5500$ টাকা।

$\therefore$ বোর্ডার পিছু খরচ হয় $\dfrac{5500}{100}=55$ টাকা।

## প্রশ্নমালা 4

1. যদি $(A^2+B^2)\propto(A^2-B^2)$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $A\propto B$.

2. যদি $x^2\propto yz$, $y^2\propto zx$, $z^2\propto xy$ হয়, তাহা হইলে ধ্রুবকগুলির মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

3. যদি $x\propto y$ এবং $y\propto z$ এবং $x=a$ যখন $y=b$, $z=c$ এবং $x=a'$ যখন $y=b'$, $z=c'$ প্রমাণ কর যে

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$

4. যদি $A, B, C$ একটি কাজ 18 দিনে করে, $B, C, D$ 20 দিনে করে, $C, D, A$ 24 দিনে করে, $D, A, B$ 27 দিনে করে, তাহা হইলে সকলে একসঙ্গে কাজটি করিলে কত দিনে সম্পন্ন হইবে?

5. যদি $x\propto y^2$ এবং $y=4$ যখন $x=8$, তাহা হইলে $y$-এর মান নির্ণয় কর যখন $x=32$.

6. বৃত্তের ক্ষেত্রফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)$^2$, যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 ফুট তাহার ক্ষেত্রফল 154 বর্গফুট। 10 ফুট 6 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. পিরামিডের আয়তন $\propto$ ইহার উচ্চতা $\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল; কোন পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গফুট এবং উচ্চতা 14 ফুট এবং আয়তন 280 বর্গফুট। যে পিরামিডের আয়তন 390 ঘনফুট, উচ্চতা 26 ফুট, উহার ভূমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. কোন কিছু স্থির অবস্থান ( rest ) হইতে পতিত হইলে ( falls ), পতন-স্থান হইতে উহার দূরত্ব $\propto$ (পতনের সময়)$^2$। যদি 64 ফুট নীচে আসিতে কোন বস্তুর 2 সেকেণ্ড সময় লাগে, তাহা হইলে 7 সেকেণ্ডে উহা কত নীচে পতিত হইবে ?

9. যদি $A \propto BC$ হয় এবং $A=4$ যখন $B=\frac{2}{3}$ এবং $C=\frac{8}{5}$; $C$-এর মান নির্ণয় কর যখন $A=48$, $B=\frac{2}{5}$।

10. যদি $x$, $y$-এর সহিত সরলভেদে থাকে এবং $z$-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে এবং যদি $x=m$ যখন $y=n$ এবং $z=p$; $x$-এর মান নির্ণয় কর যখন $y=n^2$ এবং $z=p^2$।

11. যদি $xy \propto (x^2+y^2)$ এবং $y=3$ যখন $x=4$ হয়; তাহা হইলে $x$ ও $y$-এর মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

12. যদি $\frac{a}{b} \propto (a+b)$ এবং $\frac{b}{a} \propto (a-b)$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $(a^2-b^2)$ ধ্রুবক।

13. যদি $(a^2+b^2) \propto (a^2-b^2)$ হয়, দেখাও যে $a \propto b$.

14. যদি $(a+b) \propto (a-b)$ হয়, দেখাও যে $(a^2+b^2) \propto ab$.

15. যদি $y^2 \propto (a^2-x^2)$ এবং $y=\frac{b^2}{a^2}$ যখন $x=\sqrt{a^2-b^2}$, তাহা হইলে $x$ ও $y$ এর মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

16. যদি $\left(a^3+\frac{1}{b^3}\right) \propto \frac{1}{a^3-b^3}$ হয়, দেখাও যে $b \propto \frac{1}{a}$.

17. $a \propto b$ যখন $c$ ধ্রুবক এবং $a \propto c$ যখন $b$ ধ্রুবক; প্রমাণ কর যে যখন $b \propto c$ তখন $a \propto b^2$ অথবা $c^2$ হয়।

18. যদি $(a+b) \propto (a-b)$ হয়, দেখাও যে $(a^3+b^3) \propto (a^3-b^3)$.

19. যদি $(a+b) \propto c$ এবং $(b+c) \propto a$ হয়, দেখাও যে $(c+a) \propto b$.

20. যদি $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হয়, প্রমাণ কর যে

(i) $a^2 + b^2 + c^2 \propto bc + ca + ab$

(ii) $a^3 + b^3 + c^3 \propto 3abc$.

21. কোন বস্তুর ভর (Mass $M$) $\propto$ ঘনত্ব (Density $D$), যখন আয়তন ($V$) ধ্রুবক হয় এবং ভর $\propto$ আয়তন, যখন ঘনত্ব $D$ ধ্রুবক হয়। যদি ভরের একক বলিতে বস্তুর ভরের একক আয়তন ও একক ঘনত্ব বুঝায়, তাহা হইলে দেখাও যে $M = VD$.

22. কোন হোটেলের মোট খরচের কিছু অংশ অপরিবর্তনশীল এবং বাকী অংশ বোর্ডারের সংখ্যার উপর নির্ভরশীল। প্রতি বোর্ডার মাসে 400 টাকা দেয়। বোর্ডারের সংখ্যা 40 জন হইলে জনপ্রতি মাসিক 45 টাকা লাভ হয় এবং বোর্ডারের সংখ্যা 50 জন হইলে জনপ্রতি মাসিক 54 টাকা লাভ হয়। বোর্ডারের সংখ্যা 7 জন হইলে জনপ্রতি মাসিক লাভ কত হইবে নির্ণয় কর।

23. কোন বস্তু স্থির অবস্থান হইতে পতিত হইলে পতন-স্থান হইতে ইহার দূরত্ব $\propto$ (পতনের সময়)$^2$। যদি কোন বস্তুর $402\frac{1}{2}$ ফুট নীচে আসিতে 5 সেকেণ্ড সময় লাগে তাহা হইলে 10 সেকেণ্ডে উহা কত ফুট নীচে আসিবে এবং দশম সেকেণ্ডে কত নীচে আসিবে?

24. গোলকের ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)$^3$ ; 3, 4, 5 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের তিনটি গোলক গলাইয়া একটি গোলকে রূপান্তরিত করিলে উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

# পঞ্চম অধ্যায়

## সমান্তর শ্রেণী

## (Arithmetical Progression)

### 5.1. শ্রেণী ( Series ) :

পর পর কতকগুলি রাশি এক বা একাধিক নিয়মে বিন্যস্ত হইলে ঐ বিন্যস্ত রাশিগুলিকে একটি শ্রেণী বলা হয়। যেমন—

(*i*) 2, 4, 6, 8, 10, ⋯

(*ii*) 1, 5, 9, 13, ⋯

(*iii*) 4, 1, −2, −5, ⋯

(*iv*) 2, 4, 8, 16, 32, ⋯

(*v*) 1, 3, 9, 27, 81, ⋯

(*i*) হইতে (*v*) পর্যন্ত প্রত্যেকটি এক একটি শ্রেণীর উদাহরণ।

### 5.2. সমান্তর শ্রেণী ( Arithmetical Progression )

যে শ্রেণীতে উহার অন্তর্গত যে-কোন পদের সহিত উহার ঠিক পরবর্তী পদের বিয়োগফল সর্বদা সমান থাকে, সেইরূপ শ্রেণীকে সমান্তর শ্রেণী বলে।

যেমন (*i*) 2, 4, 6, 8, 10, ⋯

(*ii*) 1, 5, 9, 13, ⋯

ইহারা প্রত্যেকেই সমান্তর শ্রেণী।

(*i*) নং শ্রেণীতে $(4-2)=2$, $(6-4)=2$, $(8-6)=2$ ইত্যাদি।

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রতি ক্ষেত্রেই বিয়োগফল 2 হইতেছে। এই বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর (Common difference) বলে অর্থাৎ এই শ্রেণীর সাধারণ অন্তর হইল 2 এবং প্রথম পদ 2.

(*ii*) নং শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর 4 এবং প্রথম পদ 1.

এখানে দেখা যাইতেছে যে, সমান্তর শ্রেণীর যে-কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদ বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়।

### 5.3. সাধারণ সমান্তর শ্রেণী :

$a, a+d, a+2d, a+3d,$ ⋯ এই শ্রেণীটিকে সাধারণ সমান্তর শ্রেণী বলা হয়। এই শ্রেণীর প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $d$.

আমরা এখানে প্রথম পদকে $t_1$, দ্বিতীয় পদকে $t_2$, তৃতীয় পদকে $t_3$, চতুর্থ পদকে $t_4$, ....$n$-তম পদকে $t_n$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করিব। উপরের শ্রেণীটির $t_1 = a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$। অতএব আমরা বলিতে পারি- কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর জানা থাকিলে শ্রেণীটি গঠন করা যায়।

মনে কর 1, 4, 7, 10, 13 একটি সমান্তর শ্রেণী।

ইহার প্রথম পদ $t_1 = 1$
দ্বিতীয় পদ $t_2 = 4$
তৃতীয় পদ $t_3 = 7$
চতুর্থ পদ $t_4 = 10$
পঞ্চম পদ $t_5 = 13$

এখানে শ্রেণীটির মোট পদসংখ্যা 5 এবং পঞ্চম পদটি হইল এক্ষেত্রে শেষ পদ ( last term )। কোন সমান্তর শ্রেণীর নবম স্থানে যে পদটি থাকে তাহাকে নবম পদ ( 9th term ) বলা হয়, দশম স্থানের পদটিকে দশম পদ ( 10th term ) বলা হয় ইত্যাদি। ইহারা একটি বিশেষ পদ। এই শ্রেণীর $n$ স্থানে যে পদটি থাকে তাহাকে $n$-তম পদ ( $n$th term ) বলা হয়। যদি এই শ্রেণীর $n$-তম পদই শেষ পদ হয় তাহা হইলে $n$-তম পদকে শেষ পদ ( last term ) বলে এবং ইহাকে $l$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $n$ সব সময়ই পূর্ণসংখ্যা ও ধনসংখ্যা হইবে। কোন ক্ষেত্রেই $n$ ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইবে না। পদসংখ্যাগুলিকে $n$ দ্বারা এবং ঐ পদগুলির যোগফলকে $S$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

**5.4. $n$-তম পদ নির্ণয় ( To find the $n$-th term of an A.P. ) :**

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $d$।

$$t_1 = a = a + (1-1)d$$
$$t_2 = a + d = a + (2-1)d$$
$$t_3 = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$t_n = a + (n-1)d$$

$n$-তম পদ $t_n = a + (n-1)d$

যদি পদসংখ্যা $n$ হয় এবং শেষপদ ($n$th term) $l$ হয় তাহা হইলে

$$l = a + (n-1)d.$$

**উদা** 1. 2, 4, 6, 8 ···এই শ্রেণীটির সপ্তম পদ ( 7th term ) নির্ণয় কর।

এখানে $a=2,\ d=2,\ n=7$

আমরা জানি $t_n=a+(n-1)d$

বা, $t_7=2+(7-1)2$

বা, $t_7=2+12=14.$

**উদা**. 2. 2, −2, −6, −10 ···এই শ্রেণীটির নবমপদ (9th term) নির্ণয় কর।

এখানে $a=2,\ d=-4,\ n=9$

$t_n=a+(n-1)d$

বা, $t_9=2+(9-1)(-4)$

$=2-32=-30.$

**উদা**. 3. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 3, সাধারণ অন্তর 4 হইলে দশম পদ ( 10th term ) নির্ণয় কর।

এখানে, $a=3,\ d=4,\ n=10$

$t_n=a+(n-1)d$

$t_{10}=3+(10-1)\times 4$

$=3+36=39.$

**5.5. সমান্তর শ্রেণীর প্রথম $n$-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় ( To find the sum of first $n$ terms ) :**

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $d$, পদসংখ্যা $n$ এবং শেষ পদ $l$. আবার মনে কর, $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S$.

$\therefore\ S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে আমরা পাই,

$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$

যোগ করিয়া পাই,

$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)$

$=(a+l)+(a+l)+(a+l)\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=n(a+l)$

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\left(a+l\right).$

আবার যেহেতু $l$ শেষপদ, $\therefore\ l=a+(n-1)d$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)$$
$$=\frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}$$
$$=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

**5.6. কতকগুলি প্রয়োজনীয় সূত্র :**

1, 2, 3, 4, 5, 6...প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা ( Natural Numbers ) বলা হয়।

(i) $1+2+3+4+.......n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) $1+3+5+7+........n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত
$$=n^2$$

(iii) $2+4+6+8+........n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত
$$=n\ (n+1)$$

(iv) $a+a+a+a+........n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত
$$=na$$

(*i*) এখানে $a=1,\ d=1,\ n=n$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2.1+(n-1).1\}$$
$$=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(*ii*) $a=1,\ d=2,\ n=n$

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2.1+(n-1).2\}$$
$$=\frac{n}{2}\{2n\}=n^2.$$

(*iii*) $a=2,\ d=2,\ n=n$

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2.2+(n-1).2\}$$
$$=\frac{n}{2}\{4+2n-2\}=\frac{n}{2}.2(n+1)$$
$$=n(n+1).$$

(iv) $a=a, d=0, n=n$

$$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1).0\right\}$$

$$=\frac{n}{2}.2a=na.$$

**5.7. প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়** ( **To find the sum of the squares of the first $n$ natural numbers** ) :

মনে কর, $S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

আমরা জানি, $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$

$n=1, 2, 3, 4$ ইত্যাদি বসাইয়া পাই,

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$

$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$

$$3^3-2^3=3.3^2+3.3+1$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1$$

যোগ করিয়া পাই,

$$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

বা, $n^3=3S-\dfrac{3n(n+1)}{2}+n$

বা, $3S=n^3+\dfrac{3n(n+1)}{2}-n$

বা, $3S=\dfrac{2n^3+3n^2+3n-2n}{2}$

বা, $3S=\frac{n}{2}\left(2n^2+3n+1\right)=\frac{n}{2}\left\{(n+1)(2n+1)\right\}$

$$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

**5.8. প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি নির্ণয়** ( **To find the sum of the cubes of the first $n$ natural numbers** ) :

মনে কর, $S=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

আমরা জানি, $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$

এখন $n=1, 2, 3, 4$ ইত্যাদি বসাইয়া আমরা পাই,

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$$

যোগ করিয়া পাই, $n^4-0^4=4(1^3+2^3+\cdots+n^3)$

$$-6(1^2+2^2+3^2+\cdots n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$$

বা, $n^4=4S-6.\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4.n(n+1)}{2}-n$

বা, $4S=n^4+n(n+1)(2n+1)-(2n)(n+1)+n$

বা, $4S=n^2(n+1)^2$

$\therefore \quad S=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$

**5.9.** $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ **সংখ্যাগুলি যদি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে সামন্তরীয় মধ্যক বা গাণিতিক গড় (A.M.) হইবে**

$$A.M.=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

কোন সমান্তর শ্রেণীর অন্তর্গত মোট মধ্যমানের সংখ্যা এবং ঐ দুই প্রান্তীয় পদের মান দেওয়া থাকিলে $d=\dfrac{l-a}{n+1}$ সূত্রের সাহায্যে সাধারণ অন্তর নির্ণয় করা যাইবে,

যেখানে $d=$ সাধারণ অন্তর
$l=$ শেষপদ
$a=$ প্রথম পদ
$n=$ শ্রেণীর অন্তর্গত মোট সমান্তরীয় মধ্যমানের সংখ্যা।

**উদাহরণ।** 3 ও 31-এর মধ্যে 6টি সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর (Insert 6 *A.Ms* between 3 and 31).

শ্রেণীটি স্পষ্টতই সমান্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ 3, শেষপদ 31.

সূত্র অনুসারে $d=\dfrac{l-a}{n+1}=\dfrac{31-3}{6+1}=\dfrac{28}{7}=4$

$\therefore$ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 সংখ্যাগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং 7, 11, 15, 19, 23, 27 সংখ্যাগুলি নির্ণেয় 6-টি সমান্তর মধ্যক।

**5.10. সমান্তরীয় মধ্যক ( Arithmetic Mean ) :**

যদি পর পর তিনটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে উহাদের মধ্যবর্তী সংখ্যাটিকে প্রান্তীয় রাশি দুইটির সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

যদি $a, M, c$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে $M$ হইবে $a$ ও $c$-এর সমান্তরীক মধ্যক।

$$\therefore \quad M-a=c-M$$

বা, $2M=a+c$

$$\therefore \quad M=\frac{a+c}{2}$$

$\therefore$ দুইটি পদের সমান্তরীয় মধ্যক ( $A.M.$) হইবে পদ দুইটির যোগফলের অর্ধেকের সমান।

যেমন 2, 4, 6 সংখ্যাগুলির 2 ও 6-এর সমান্তরীয় মধ্যক হইবে 4.

কারণ $4=\frac{2+6}{2}$

যদি $a, m_1, m_2 \ldots\ldots m_n, c$ সমান্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$ হইবে $a$ ও $c$-এর মধ্যে $n$ সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক।

**উদা. 1.** নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1+3+5+7+\cdots 20$ টি পদ পর্যন্ত

(ii) $-9-1+7+\cdots\cdots 25$ টি পদ পর্যন্ত।

(i) এখানে $a=1, d=2, n=2$

$$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$$

$$=\frac{20}{2}\left\{2.1+(20-1).2\right\}$$

$$=10\{40\}=400.$$

(ii) $a=-9, d=8, n=25$

$$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}=\frac{25}{2}\left\{2\times(-9)+(25-1)\times 8\right\}$$

$$=\frac{25}{2}\times 174=25\times 87=2175$$

উদা. 2. 1, 4, 7....97 শ্রেণীটির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

এখানে $a=1, d=3$, মনে কর পদসংখ্যা $=n$

আমরা জানি, $l=a+(n-1)d$

বা, $97=1+(n-1)3$

বা, $97=1+3n-3$

বা, $99=3n \quad \therefore \ n=33$

$\therefore$ মোট পদসংখ্যা 33

$\therefore$ 17-তম পদটি হইবে মধ্যপদ।

আবার $t_n=a+(n-1)d$

$\therefore \ t_{17}=1+(17-1)\times 3=1+48=49.$

উদা. 3. একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন কর যাহার পঞ্চম পদ 11 এবং 8-তম পদ 17 এবং শ্রেণীর 15-তম পদও নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $t_n=a+(n-1)d \quad \ldots \quad (i)$

$(i)$ হইতে পাই, $t_5=a+4d \quad \ldots \quad (ii)$

এবং আবার $(i)$ হইতে পাই $t_8=a+7d \quad \ldots \quad (iii)$

শর্তানুসারে পাই, $11=a+4d \quad \ldots \quad (iv)$

এবং $17=a+7d \quad \ldots \quad (v)$

$(iv)$ ও $(v)$ সমাধান করিয়া পাই, $a=3, d=2$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণীটি হইল 3, 5, 7, 9.........

আবার 15-তম পদ $t_{15}=3+14.2=31.$

উদা. 4. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর তৃতীয় পদ ও ষষ্ঠ পদ যথাক্রমে 7 ও 13 হয় তাহা হইলে এই শ্রেণীর প্রথম 20 টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $t_n=a+(n-1)d \quad \ldots \quad (i)$

$(i)$ হইতে পাই, $t_3=a+2d \quad \ldots \quad (ii)$

এবং $t_6=a+5d \quad \ldots \quad (iii)$

শর্তানুসারে পাই, $a+2d=7 \quad \ldots \quad (iv)$

$a+5d=13 \quad \ldots \quad (v)$

$(iv)$ ও $(v)$-কে সমাধান করিয়া পাই, $a=3, d=2$

$\therefore$ টি পদের যোগফল $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{20}{2}\{2.3+19.2\}$

$=10\times 44=440.$

উদা. 5. কোন সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 21 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 179 হইলে সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যা তিনটি $a-d, a, a+d$.

শর্তানুসারে $(a-d)+a+(a+d)=21$

বা, $3a=21 \quad \therefore a=7$

আবার, $(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=179$

বা, $a^2+d^2-2ad+a^2+a^2+d^2+2ad=179$

বা, $3a^2+2d^2=179$

বা, $3.49+2d^2=179$

বা, $d^2=16 \quad \therefore d=\pm 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $(7-4), 7, (7+4)$ বা, $(7+4), 7, (7-4)$

অর্থাৎ 3, 7, 11 বা 11, 7, 3.

উদা. 6. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর $p$-তম পদ $a$, $q$-তম পদ $b$, $r$-তম পদ $c$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$$

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $x$, সাধারণ অন্তর $y$.

$\therefore a=x+(p-1)y \quad \cdots \quad (i) \qquad [\because t^n=x+(n-1)y]$

$b=x+(q-1)y \quad \cdots \quad (ii)$

$c=x+(r-1)y \quad \cdots \quad (iii)$

$(i)$ হইতে $(ii)$ কে বিয়োগ করিয়া পাই, $a-b=(p-q)y$

$(ii)$ হইতে $(iii)$-কে বিয়োগ করিয়া পাই, $b-c=(q-r)y$

$\therefore \dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{p-q}{q-r}$

বা. $(a-b)(q-r)-(b-c)(p-q)=0$

বা, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

উদা. 7. কোন ব্যক্তি 1,260 টাকা 21 টি কিস্তিতে পরিশোধ করার চুক্তি করিল। প্রথম কিস্তি ব্যতীত অন্য কিস্তিগুলির প্রতিটি উহার পূর্বের কিস্তি অপেক্ষা 5 টাকা বেশী হইলে প্রথম ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম কিস্তি $=a$ টাকা,

শেষ কিস্তি $=l$ টাকা, কিস্তির সংখ্যা $=n=21$

এখানে, সাধারণ অন্তর $d=5$ টাকা

$$\therefore\quad 1260=\frac{21}{2}\{2a+(21-1)5\}$$

বা, $1260=\frac{21}{2}\times\{2a+100\}$

বা, $\frac{1260}{21}=a+50$

$$\therefore\quad a=10.$$

$\therefore$ শেষ কিস্তি $l=a+(n-1)d$

$$=10+(21-1)\times 5$$

$$=10+20\times 5=10+100=110.$$

$\therefore$ প্রথম কিস্তির পরিমাণ 10 টাকা ও শেষ কিস্তির পরিমাণ 110 টাকা।

**উদা.** 8. $3+5+7+\cdots$ শ্রেণীটির কতগুলি পদসংখ্যার যোগফল 624 হইবে?

এখানে $a=3$, $d=2$, মনে কর, $n$-সংখ্যক পদের যোগফল 624।

$$\therefore\quad 624=\frac{n}{2}\{2.3+(n-1)2\}$$

বা, $624=\frac{n}{2}.2\{3+n-1\}$

বা, $624=2n+n^2$

বা, $n^2+2n-624=0$

বা, $(n-24)(n+26)=0$

$$\therefore\quad n=24 \text{ বা, } -26.$$

যেহেতু পদসংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ $n=24$ হইবে। অর্থাৎ পদসংখ্যা $=24$.

**উদা.** 9. যদি $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ও সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে।

$\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে যদি $\frac{1}{ca}-\frac{1}{bc}=\frac{1}{ab}-\frac{1}{ca}$ হয়।

অর্থাৎ যদি $\frac{b-a}{abc}=\frac{c-b}{abc}$ হয়।

অর্থাৎ যদি $b-a=c-b$ হয়। ... (i)

আবার যেহেতু $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত

$$\therefore\quad b-a=c-b \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এখানে দেখা যাইতেছে যে (i) ও (ii) সমান

$$\therefore \frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab} \text{ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।}$$

উদা. 10. নিম্নের শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1.2+2.3+3.4+\cdots$ $n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

এখানে প্রদত্ত শ্রেণীটির $n$-তম পদ $t_n$

$=(1, 2, 3, \cdots$ এর $n$-তম পদ$)\times(2, 3, 4, \cdots$ এর $n$-তম পদ$)$

$=n.(n+1)=n^2+n$

অর্থাৎ $t_n=n^2+n$

$n$-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, 4 ··· বসাইয়া পাই

$$t_1=1^2+1$$
$$t_2=2^2+2$$
$$t_3=3^2+3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n=n^2+n$$

যোগ করিয়া পাই, $(t_1+t_2+\ldots+t_n)=(1^2+2^2+\ldots+n^2)+(1+2+\ldots+n)$

$$\therefore \quad S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)\{2n+1+3\}}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

## প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নলিখিত সমান্তর শ্রেণীগুলির নির্দিষ্ট পদ এবং $n$-তম পদ নির্ণয় কর :

(i) 2, 4, 6 ·· ······ এর 7-তম পদ

(ii) $-2, 1, 4, 7, 10$ ·········· এর 17-তম পদ

(iii) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}$ ········· এর 8-তম পদ

(iv) 2, 4, 6, 8 ·········· এর 10-তম পদ, 15-তম পদ

(v) $9, \frac{31}{3}, \frac{35}{3}$ ········· এর 30-তম পদ

(vi) $a+d, a+3d, a+5d,$ ········· এর 9-তম পদ।

2. যদি $7m+3, 4m-5, 2m+10$ সংখ্যাগুলি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে $m$-এর মান নির্ণয় কর।

3. 2, 5, 8, 11, 14 ……… সমান্তর শ্রেণীর কোন্ কোন্ পদ (*i*) 32, (*ii*) 62, (*iii*) 101 হইবে ?

4. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $2\sqrt{2}$, 13-তম পদ $8\sqrt{2}$ হইলে এই শ্রেণীর সাধারণ অন্তর এবং শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

5. 9, $\frac{31}{3}$, $\frac{35}{3}$, 13 ……… শ্রেণীটির কোন্ পদ 133 হইবে ?

6. 1, 4, 7, 10, 13 ……… এই সমান্তর শ্রেণীর কোন্ পদ 280 হইবে ?

7. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর তৃতীয় পদ 7 এবং ষষ্ঠ পদ 13 হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

8. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর $p$-তম পদ $q$ এবং $q$-তম পদ $p$ হয়, তাহা হইলে $m$-তম পদ নির্ণয় কর।

9. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর $m$-তম পদ $n$ এবং $n$-তম পদ $m$ হয়, তাহা হইলে $(m+n)$-তম পদ নির্ণয় কর।

10. 3 ও 57-এর মধ্যে 8টি সমান্তরীয় মধ্যক (*A.M.*) বসাও।

11. 2 ও 92-এর মধ্যে 8টি সমান্তরীয় মধ্যক বসাও।

12. 4 ও 31-এর মধ্যে $n$-সংখ্যক মধ্যক এমনভাবে আছে যেন দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক = 5 : 14, $n$-এর মান নির্ণয় কর।

13. নিম্নলিখিত সমান্তর শ্রেণীগুলির যোগফল নির্ণয় কর :

(*i*) $1+4+7+10+\cdots\cdots$ 30টি পদ পর্যন্ত।

(*ii*) $2+4+6+8+\cdots\cdots$ 20টি পদ পর্যন্ত।

(*iii*) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$ 10টি পদ পর্যন্ত।

(*iv*) $1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\cdots\cdots$ 10টি পদ পর্যন্ত।

(*v*) $1-3-7-\cdots\cdots$ $n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(*vi*) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}+4\sqrt{3}+\cdots\cdots$ 10টি পদ পর্যন্ত।

(*vii*) $2+2+2+\cdots\cdots$ $n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(*viii*) $n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots$ $n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(*ix*) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)+\left(\dfrac{3a-2b}{a+b}\right)+\left(\dfrac{5a-3b}{a+b}\right)+\cdots$ $n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

14. 13, 17, 21, 25…… এই সমান্তর শ্রেণীর কতগুলি পদের যোগফল 1020 হইবে ?

15. কোন সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 21 এবং উহাদের বর্গের যোগফল 179 হইলে সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

16. $a, b, c$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইলে দেখাও যে নিম্নের শ্রেণীগুলিও সমান্তর শ্রেণী হইবে।

(i) $(b+c), (c+a), (a+b)$.

(ii) $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$.

(iii) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right), \left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right), \left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)$.

(iv) $a^2(b+c),\ b^2(c+a),\ c^2(a+b)$.

(v) $\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right), \left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ba}\right), \left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}\right)$.

17. যদি $a^2, b^2, c^2$ একটি সমান্তর শ্রেণী হয় দেখাও যে

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে।

18. নিম্নের সমান্তর শ্রেণীগুলির যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1+5+9+\cdots\cdots+89$

(ii) $2+4+6+\cdots\cdots+90$

19. কোন সমান্তর শ্রেণীর মধ্যপদ 11 হইলে 11টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

20. কোন সমান্তর শ্রেণীর $m$-সংখ্যক পদের যোগফল $n$ এবং $n$-সংখ্যক পদের যোগফল $m$ হইলে দেখাও যে $(m+n)$-সংখ্যক পদের যোগফল $-(m+n)$.

21. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 1, শেষপদ 50 এবং যোগফল 204 হইলে সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

22. কোন সমান্তর শ্রেণীর 21-তম পদ 60 হইলে এই শ্রেণীর 41-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

23. $-8, -6, -4\cdots\cdots$ এই শ্রেণীর কয়টি পদের যোগফল 36 হইবে ?

24. কোন সমান্তর শ্রেণীর 25-তম পদ 49 হইলে 49-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

25. নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(ii) $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(iii) $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(iv) $1^2+3^2+5^2+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(v) $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(vi) $1+3+6+10+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(vii) $2^2+5^2+8^2+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(viii) $1.3+3.5+5.7+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

26. $A$ ঠিক করিল যে তাহার 9600 টাকা ঋণ 48টি বাৎসরিক কিস্তিতে শোধ করিবে। উহার বাৎসরিক কিস্তিগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। 40টি কিস্তি দেওয়ার পর $A$ দেউলিয়া হইয়া গেল এবং তাহার উত্তমর্ণ দেখিল যে 2400 টাকা অনাদায়ী থাকিয়া গিয়াছে। প্রথম তিনটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

27. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর $p$-সংখ্যক পদের যোগফল $a$, $q$-সংখ্যক পদের যোগফল $b$, $r$-সংখ্যক পদের যোগফল $c$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$$

28. যদি তিনটি সমান্তর শ্রেণীর $n$-সংখ্যক পদের যোগফল যথাক্রমে $S_1, S_2, S_3$ এবং প্রতিটি শ্রেণীর প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2, 3 হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $S_1+S_3=2S_2$।

# ষষ্ঠ অধ্যায়

## গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Progression)

6.1. যখন কোন শ্রেণীর পদগুলি এমনভাবে গঠিত হয় যে এই শ্রেণীর কোন পদের সহিত উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদাই সমান থাকে, তখন এই শ্রেণীটিকে গুণোত্তর শ্রেণী বলে। যে সংখ্যাটি দ্বারা সমান অনুপাত জ্ঞাপন করা হয় তাহাকে সাধারণ অনুপাত ( Common ratio ) বলা হয়। গুণোত্তর শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত যে কোন পদকে উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করিলে এই সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়।

যেমন $1, 3, 9, 27, 81 \cdots$ শ্রেণীটি হইল গুণোত্তর শ্রেণী। এই শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত হইল 3।

আবার $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \cdots\cdots$ শ্রেণীটিও গুণোত্তর শ্রেণী এবং সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$। প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $r$ বিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণী হইল $a, ar, ar^2, ar^3 \cdots$।

যদি প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত জানা থাকে তাহা হইলে গুণোত্তর শ্রেণীকে নির্ণয় করা যায়।

**6.2. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $n$-তম পদ নির্ণয় ( To find the $n$th term of a G.P. ) :**

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটি হইল $a, ar, ar^2, ar^3 \cdots$।

এখানে
$$t_1 = a = ar^{1-1}$$
$$t_2 = ar = ar^{2-1}$$
$$t^3 = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$t_n = ar^{n-1}$$

$\therefore$ $n$-তম পদ $t_n = ar^{n-1}$

যদি $n$-তম পদ শেষ পদ হয়, তখন $n$-তম পদকে $l$ দ্বারা সূচিত করা হয় অর্থাৎ $l = ar^{n-1}$ হয়।

**6.3. গুণোত্তরীয় মধ্যক ( Geometric Mean ) :**

তিনটি পদবিশিষ্ট কোন গুণোত্তর শ্রেণীর মধ্যপদ হইবে প্রথম ও শেষপদ দুইটির গুণোত্তরীয় মধ্যক যদি $a, b, c$ গুণোত্তর শ্রেণী হয়, তাহা হইলে $b$ হইবে $a$ ও $c$-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক।

তিনটি পদবিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও তৃতীয় পদ দুইটির গুণফলের বর্গমূল লইলে ঐ পদ দুইটির গুণোত্তরীয় মধ্যক পাওয়া যায়।

যেমন 1, 3, 9 এই গুণোত্তর শ্রেণীর 1 ও 9-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক হইবে 3। কারণ $\sqrt{1\times 9}=\sqrt{9}=3$

অতএব $a, b, c$ গুণোত্তর শ্রেণীর $a$ ও $c$-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক হইল

$$b=\sqrt{ac}$$

যদি $a, m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots m_n, l$ শ্রেণীটি গুণোত্তর শ্রেণী হয়, তাহা হইলে $m_1, m_2, m_3 \cdots\cdots m_n$ এই মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলিকে $a$ ও $l$-এর $n$ মধ্যবর্তী গুণোত্তরীয় মধ্যক বলা হয়।

## 6.4. কোন গুণোত্তরীয় মধ্যমানের সংখ্যা নির্ণয় :

$a, m_1, m_2 \cdots\cdots m_n, l$ গুণোত্তর শ্রেণীতে $n$ গুণোত্তরীয় মধ্যক আছে। অতএব $l$ হইবে $(n+2)$-তম পদ। অর্থাৎ $t_{n+2}=l=ar^{(n+2)-1}$, যেখানে $r$ সাধারণ অনুপাত।

বা, $l=ar^{n+1}$

বা, $r^{n+1}=\frac{l}{a}$

$\therefore \quad r=\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

**মন্তব্য :** মনে কর, শ্রেণীটি হইল

$a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$।

$a, a_2 \cdots\cdots a_n$ এর G. M হইল $\sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n}$

অর্থাৎ G. M. $=\sqrt[n]{a_1\times a_2\times a_3\cdots\times a_n}$

**উদা. 1.** 2 এবং 54-এর মধ্যে দুইটি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

মনে কর, 2 ও 54-এর মধ্যে $a_1, a_2$ এই দুইট মধ্যক। $\therefore$ শ্রেণীটি হইল $2, a_1, a_2, 54$। $a_1$ ও $a_2$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $r$, প্রথম পদ $a$।

$\therefore \quad a_1=ar^{2-1}=2r^1=2r \qquad (\because \quad t_n=ar^{n-1})$

$a_2=ar^{3-1}=2r^2$

$l=ar^{n-1}=2r^{4-1}=2r^3$

কিন্তু আমাদের শেষপদ $l=54$

$\therefore \quad 54=2r^3$ বা, $r^3=(3)^3 \qquad \therefore \quad r=3$

$\therefore \quad a_1=2.r=2.3=6$

$a_2=2.r^2=2(3)^2=18$

$\therefore$ মধ্যক দুইটি হইল 6, 18.

**অন্য প্রণালী ঃ** এখানে $a=2$.

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $r$.

এখানে চতুর্থ পদটি 54.

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore\ t_4 = 2.r^{4-1}$$

বা, $54 = 2.r^3$ বা, $r^3 = 27 = 3^3$

$$\therefore\ r = 3$$

$\therefore$ শ্রেণীটি হইল 2, 6, 18, 54

অর্থাৎ 2 ও 54-এর মধ্যে মধ্যক দুইটি হইল 6, 18.

**6.5. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় :—**

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটি হইল

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3 \cdots\cdots ar^{n-1}$$

মনে কর, $S = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$

উভয়পক্ষকে $r$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$Sr = ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

বিয়োগ করিয়া পাই,

$$S - Sr = a - ar^n$$

বা, $S(1-r) = a(1-r^n)$

$$\therefore\ S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \qquad \cdots\cdots \qquad \text{(i)}$$

$$= \frac{-a(r^n-1)}{-(r-1)}$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

যদি $r<1$ হয় তাহা হইলে

$$S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \text{ হইবে}$$

আবার যদি $r>1$ হয়, তাহা হইলে

$$S = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \text{ হইবে।}$$

মন্তব্য : যদি $n$-তমপদ শেষপদ হয়, তাহা হইলে $l = t_n$ হইবে।

অর্থাৎ $l = ar^{n-1}$

বা, $rl = ar^n$

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $S = \dfrac{a - ar^n}{1-r} = \dfrac{a - rl}{1-r}$

(ii) হইতে পাই, $S = \dfrac{ar^n - a}{r-1} = \dfrac{rl - a}{r-1}$

উদা. 1. 4, 12, 36······শ্রেণীর 7-তম পদ ও $n$-তম পদ নির্ণয় কর।

এখানে $a = 4$, $r = 3$, $n = 7$

$t_n = ar^{n-1}$ $\therefore$ $t_7 = 4.3^{7-1} = 4.3^6 = 2916$

এবং $n$-তম পদ $t_n = 4\,(3)^{n-1} = 4\,(3)^{n-1}$

উদা. 2. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}$···শ্রেণীর 8-তম পদ নির্ণয় কর।

$a = 1$, $r = -\frac{1}{3}$, $n = 8$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_8 = 1.(-\frac{1}{3})^{8-1} = (-\frac{1}{3})^7 = -\dfrac{1}{3^7} = -\dfrac{1}{2187}$

উদা. 3. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তৃতীয় পদ 144 এবং 7-তম পদ 729 হয় তাহা হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

$t_n = ar^{n-1}$ $\therefore$ $t_7 = ar^6$ ... (i)

এবং $t_3 = ar^2$ ··· (ii)

(i) ও (ii) হইতে পাই, $729 = ar^6$ ... (iii)

এবং $144 = ar^2$ .... (iv)

এখন (iii) কে (iv) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$\dfrac{729}{144} = \dfrac{ar^6}{ar^2}$ বা, $r^4 = \dfrac{81}{16}$

$\therefore$ $r = +\dfrac{3}{2}$

আবার $ar^2 = 144$

$\therefore$ $a(+\frac{3}{2})^2 = 144$

$\therefore$ $a = 64$

$\therefore$ শ্রেণীটি হইবে 64, 96, 144 ··· ··· ···

উদা. 4. $\frac{32}{9}$ ও $\frac{81}{2}$ এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

$\frac{32}{9}$ ও $\frac{81}{2}$ এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন করিলে যে গুণোত্তরীয় শ্রেণীটি হইবে তাহার পদ সংখ্যা হইবে 7.

এই শ্রেণীটির প্রথম পদ $\frac{32}{9}$ এবং শেষপদ $\frac{81}{2}$.

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $r$

$\therefore\ l = ar^{n-1}$

বা, $\frac{81}{2} = \frac{32}{9}(r)^6$

$\therefore\ r^6 = \frac{81 \times 9}{64} = (\frac{3}{2})^6$

$\therefore\ r = \pm\frac{3}{2}$

$\therefore$ শ্রেণীটি হইবে $\frac{32}{9}, \frac{16}{3}, 8, 12, 18, 27, \frac{81}{2}$

বা, $\frac{32}{9}, -\frac{16}{3}, 8, -12, 18, -27, \frac{81}{2}$.

$\therefore$ মধ্যকগুলি হইল $\frac{16}{3}, 8, 12, 18, 27.$

বা, $-\frac{16}{3}, 8, -12, 18, -27$

**উদা.** 5. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ 16 ও 8 হয় এবং শেষপদ $\frac{1}{64}$ হয় তাহা হইলে শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে $a=16,\ r=\frac{8}{16}=\frac{1}{2},\ l=\frac{1}{64}$

$$\therefore\ S=\frac{a-rl}{1-r} \qquad (\because\ r<1)$$

$$=\frac{16-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{16\times128-1}{\frac{1}{2}\times128}=\frac{2047}{64}$$

$$=31\frac{63}{64}.$$

**উদা.** 6. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তৃতীয় পদ 3 এবং ষষ্ঠ পদ 81 হইলে শ্রেণীটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর এবং শ্রেণীটি লিখ।

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $r$.

$\therefore\ t_n = ar^{n-1}$

বা, $t_3 = ar^{3-1}$

বা, $3 = ar^2 \qquad \ldots \qquad (i)$

এবং $t_6 = ar^5$

বা, $81 = ar^5 \qquad \ldots \qquad (ii)$

(ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{ar^5}{ar^2}=\frac{81}{3}$$

বা, $r^3=3^3$ $\therefore$ $r=3$

আবার, $ar^2=3$ $\therefore$ $a=\frac{3}{r^2}=\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ শ্রেণীটি হইল $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 81 ....

উদা. 7. মান নির্ণয় কর—

$1+3+9+27+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

এখানে $a=1$, $r=3$

$$\therefore\ S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\,(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}.$$

উদা. 8. সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

$t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2},\ t_3=\frac{1}{2^2},\ \ldots\ldots t_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

মনে কর $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}.$$

$$S-\frac{S}{2}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$S(1-\tfrac{1}{2})=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore\ S=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

উদা. 9. তিন সংখ্যা বিশিষ্ট কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তিনটি সংখ্যার যোগফল 13 এবং গুণফল 27। সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাগুলি $\frac{a}{r}$, $a$, $ar$.

শর্তানুসারে, $\frac{a}{r}+a+ar=13$ .... (i)

$\frac{a}{r}.\ a.\ ar=27$ ... (ii)

(i) হইতে পাই, $\frac{a(1+r+r^2)}{r}=13$

(ii) হইতে পাই, $a^3=27$ $\therefore$ $a=3$

আবার $3(1+r+r^2)=13r$

বা, $3r^2-10r+3=0$

বা, $(r-3)(3r-1)=0$

$\therefore$ $r=3$ বা, $\frac{1}{3}$

$\therefore$ সংখ্যাগুলি হইল 9, 3, 1 বা 1, 3, 9.

উদা. 10. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $p$-তম পদ $a$, $q$-তম পদ $b$, $r$-তম পদ $c$ হইলে দেখাও যে $a^{q-r}.b\ \ , c^{p-q}=1.$

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ $x$, সাধারণ অনুপাত $y$.

$\therefore$ $t_p=a=xy^{p-1}$ ... (i)

$t_q=b=xy^{q-1}$ ... (ii)

$t_r=c=xy^{r-1}$ ... (iii)

(i) হইতে পাই, $a^{q-r}=(xy^{p-1})^{q-r}$

বা, $a^{q-r}=x^{q-r}\ y^{(p-1)(q-r)}$ ... (iv)

(ii) হইতে পাই, $b^{r-p}=(xy^{q-1})^{r-p}=x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)}$ ...(v)

(iii) হইতে পাই, $c^{p-q}=(xy^{r-1})^{p-q}=x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)}$ ...(vi)

$\therefore$ (iv), (v) ও (vi) তিনটি সমীকরণকে গুণ করিলে পাই,

$a^{q-r}\times b^{r-p}\times c^{p-q}$

$=x^{q-r}.x^{r-p}.x^{p-q}.y^{(p-1)(q-r)}\times y^{(q-1)(r-p)}\times y^{(r-1)(p-q)}$

$=x^{q-r+r-p+p-q}y^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$=x^0y^0=1$

$\therefore$ $a^{q-r}\times b^{r-p}\times c^{p-q}=1.$

## প্রশ্নমালা 6

1. নিম্নলিখিত গুণোত্তর শ্রেণীগুলির নির্দিষ্ট পদগুলি নির্ণয় কর :

(i) 2, 4, 8, 16 ...... 9-তম পদ

(ii) $1, -2, 4, -8$ ......10-তম পদ

(iii) $x^2, xy, y^2$ ...... 7-তম পদ

(iv) $-21, 14, -\frac{28}{3}$ ...... 7-তম পদ

2. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তিনটি পদের যোগফল 21 এবং গুণফল 64 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

3. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তিনটি পদের যোগফল 7 এবং তাহাদের বর্গের যোগফল 21 ; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

4. যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1-3+9-27+\cdots$ 10টি পদ পর্যন্ত।

(ii) $a-ar+ar^2-\cdots$ $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(iii) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$ $n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\sqrt{2}-\cdots$ 10টি পদ পর্যন্ত।

5. নির্দিষ্ট সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও :

(i) 8 ও 512-এর মধ্যে 5টি।

(ii) 1 ও 256-এর মধ্যে 3টি।

(iii) 16 ও $\frac{1}{4}$-এর মধ্যে 5টি।

6. নিম্নলিখিত প্রতিটি শ্রেণীর $n$-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $6+66+666+\cdots$

(ii) $\cdot 9+\cdot 99+\cdot 999+\cdots$

(iii) $2+22+222+\cdots$

7. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম $n$-সংখ্যক পদের যোগফল $S_1$, প্রথম $2n$-সংখ্যক পদের যোগফল $S_2$. প্রথম $3n$-সংখ্যক পদের যোগফল $S_3$ হইলে দেখাও যে

$$S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$$

8. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর 5-তম পদ 81, দ্বিতীয় পদ 24 হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

9. যদি $a, b, c, d$ গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে তাহা হইলে দেখাও যে,—

(i) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$.

(ii) $(a^2+b^2), (b^2+c^2), (c^2+d^2)$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

(iii) $(a+b), (b+c), (c+a)$ গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত।

10. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $n$-সংখ্যক পদের যোগফল $S$, গুণফল $P$ এবং ঐ পদগুলির অন্যোন্যকের ( reciprocals ) যোগফল যদি $R$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n.$$

11. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $a$, $n$-তম পদ $l$, এবং প্রথম $n$-সংখ্যক পদের গুণফল $P$ হইলে দেখাও যে, $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.

12. A বিনা সুদে B-এর কাছ হইতে 32,760 টাকা ঋণ গ্রহণ করিল এবং 12টি কিস্তিতে শোধ করিবে বলিয়া ঠিক করিল কিন্তু প্রতিটি কিস্তি হইবে তাহার ঠিক পূর্ব কিস্তির দ্বিগুণ। দ্বিতীয় ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

13. $a, b, c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী, $x$ ও $y$ যথাক্রমে $a$ এবং $b$, $b$ এবং $c$-এর সমান্তরীয় মধ্যক ; প্রমাণ কর :

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2 \text{ এবং } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}.$$

14. যদি $a, b, c$ সমান্তর শ্রেণী এবং $p, q, r$ গুণোত্তর শ্রেণী হয় তাহা হইলে দেখাও যে $p^{b-c}.\,q^{c-a}.\,r^{a-b}=1$.

15. $a$ ও $b$-এর সমান্তরীয় মধ্যক $m$, $a$ ও $b$-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক $n$ হয় এবং তাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক : গুণোত্তরীয় মধ্যক $=m:n$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}.$$

16. দেখাও যে, দুইটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক উহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যকের চেয়ে বড়।

17. দুইটি সংখ্যার মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 9 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

18. সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 15। যদি উহাদের সহিত যথাক্রমে 1, 4, 19 যোগ করা হয় তবে নূতন সংখ্যাগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হয়। সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

19. দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের $A.M.$ হয় 25 এবং $G.M.$ হয় 24।

# সপ্তম অধ্যায়

## দ্বিঘাত সমীকরণ ( Quadratic Equation )

**7.1. $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ আকারে প্রকাশিত সমীকরণকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।**

এই দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি $x$ এবং সর্বোচ্চ ঘাত 2। ইহাকে দ্বিতীয় মানের সমীকরণও ( Second degree equation ) বলে।

দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি বীজ (root) থাকে। বীজ দুইটি সমানও হইতে পারে।

**7.2. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র :**

মনে কর, দ্বিঘাত সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$ ... $(i)$

$(i)$ নং সমীকরণকে $4a$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

বা, $b^2-b^2+4a^2x^2+4abx+4ac=0$

বা, $(2ax)^2+(b)^2+2.2ax.b=b^2-4ac$

বা, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$

$\therefore\ 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

বা, $2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুইটি হইল

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ও } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

মনে কর, একটি বীজ $\alpha$ ও অপরটি $\beta$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

**7.3. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না।**

মনে কর, দ্বিঘাত সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$ ... (i)

যদি সম্ভব হয় মনে কর, $\alpha, \beta, \gamma$ এই সমীকরণের তিনটি বিভিন্ন বীজ, অতএব $\alpha, \beta, \gamma$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \ldots \quad (ii)$$
$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \ldots \quad (iii)$$
$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \ldots \quad (iv)$$

$(i)-(ii)$, $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$

বা, $(\alpha-\beta)[a(\alpha+\beta)+b]=0$

যেহেতু, $\alpha$ ও $\beta$ অসমান $\therefore \alpha-\beta\neq0$

$$\therefore \quad a(\alpha+\beta)+b=0 \quad \ldots \quad (v)$$

আবার, $(iii)-(iv)$, $a(\beta^2-\gamma^2)+b(\beta-\gamma)=0$

বা, $(\beta-\gamma)[a(\beta+\gamma)+b]=0$

যেহেতু, $\beta$ ও $\gamma$ অসমান $\therefore \beta-\gamma\neq0$

$$\therefore \quad a(\beta+\gamma)+b=0 \quad \ldots \quad (vi)$$

আবার, $(v)-(vi)$, $a(\alpha-\gamma)=0$ ... (vii)

$(vii)$ হইতে পাই, হয় $a=0$ অথবা, $\alpha-\gamma=0$.

কিন্তু দুইটিই অসম্ভব। কারণ, $a=0$ হইলে সমীকরণটি দ্বিঘাত হইতে পারে না এবং $\alpha$ ও $\gamma$ বিভিন্ন বলিয়া $\alpha-\gamma=0$ হইতে পারে না।

$\therefore$ $\alpha, \beta, \gamma$ সমীকরণের তিনটি বিভিন্ন বীজ হইতে পারে না। অতএব কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ হইতে পারে না।

**7.4. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলির ধর্ম :**

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের $a, b, c$ রাশিগুলি মনে কর বাস্তব।

সমীকরণটিকে সমাধান করিয়া সমীকরণের বীজদ্বয়কে আমরা পাই,

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয়ের জন্য $b^2-4ac$ মানটি বিবেচনা করা হয়।

(1) যদি $b^2-4ac>0$ হয়, তাহা হইলে $b^2-4ac$ বাস্তব হইবে। সুতরাং বীজ দুইটি বাস্তব ও অসমান হইবে।

(2) যদি $b^2-4ac$ পূর্ণবর্গ হয় এবং $a, b, c$ মূলদ ( rational ) হয়, তাহা হইলে বীজ দুইটি বাস্তব, মূলদ ও অসমান হইবে। যদি $b^2-4ac$ পূর্ণবর্গ না হয় তাহা হইলে বীজ দুইটি অমূলদ ( irrational ) হইবে।

(3) যদি $b^2-4ac=0$ হয়, তাহা হইলে বীজ দুইটি বাস্তব ও পরস্পর সমান হইবে এবং প্রত্যেক বীজের মান $-\frac{b}{2a}$ হইবে।

(4 যদি $b^2-4ac<0$ হয়, তাহা হইলে বীজ দুইটি কাল্পনিক ও অসমান হইবে।

**মন্তব্য ঃ** উপরের আলোচনা হইতে বুঝা যায় যে, বীজ দুইটি বাস্তব হইবে যদি $b^2-4ac>0$ বা $=0$ হয় অর্থাৎ যদি $b^2-4ac<0$ না হয়।

এখানে $b^2-4ac$-এর সাহায্যে বীজ দুইটির প্রকৃতি নিরূপণ করা গিয়াছে। $b^2-4ac$ রাশিটিকে **নিরূপক** ( Discriminant ) বলা হয়।

## 7.5. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ও সহগের সম্বন্ধ ঃ

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ $\alpha$ ও $\beta$.

আমরা জানি, $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$\therefore$ বীজদ্বয়ের যোগফল $=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\dfrac{c}{a}=\dfrac{x \text{ বর্জিত তৃতীয় পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$।

এখন $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটিকে $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ আকারে প্রকাশ করা যায়। সমীকরণটির এই আকার হইতে দেখা যায়—

(i) বীজ দুইটির যোগফল = পরিবর্তিত চিহ্নযুক্ত $x$-এর সহগ

(ii) বীজ দুইটির গুণফল = $x$ বর্জিত তৃতীয় পদ।

**7.6. দুইটি বীজ দেওয়া থাকিলে তাহার সাহায্যে সমীকরণ গঠন :**

মনে কর, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় হইল $\alpha$ ও $\beta$।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইবে $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

বা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

অর্থাৎ $x^2$ – ( বীজদ্বয়ের সমষ্টি ) $x$ + বীজদ্বয়ের গুণফল = 0

**উদাহরণ।** একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় 2 ও 3।

বীজদ্বয়ের যোগফল $=2+3=5$

বীজদ্বয়ের গুণফল $=2\times3=6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-5x+6=0$.

**7.7. প্রতিযোগী বীজ ( Conjugate roots ) :**

মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ যদি $\alpha+\sqrt{\beta}$ হয় তাহা হইলে তাহার প্রতিযোগী বীজ হইবে $\alpha-\sqrt{\beta}$।

মনে কর, $\alpha+\sqrt{\beta}$ হইল $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ। এই বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ $a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0$

বা, $(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)+\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)=0$

ইহা হইতে দেখা যায় বামপক্ষের একটি অংশ মূলদ এবং অপর অংশ অমূলদ এবং ইহাদের যোগফল = 0। কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির যোগফল শূন্য হইতে পারে না যতক্ষণ না উহারা পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয়।

$$\therefore \left.\begin{array}{l} a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c=0 \\ \text{এবং } 2a\alpha+b=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (i)$$

আবার $ax^2+bx+c$ এই রাশিতে $x=\alpha-\sqrt{\beta}$ বসাইয়া পাই,

$a(\alpha-\sqrt{\beta})^2+b(\alpha-\sqrt{\beta})+c$

$=(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)-\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)$

$=0-\sqrt{\beta}.0$ [(i) এর সাহায্যে ]

$=0$

$\therefore$ $\alpha-\sqrt{\beta}$ ইহাও $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের আর একটি বীজ।

**7.8. কোন বাস্তব সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $\alpha+i\beta$ হইলে অপর বীজটি $\alpha-i\beta$ হইবে।**

মনে কর, $\alpha+i\beta$ হইল $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ। এই বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ a(\alpha+i\beta)^2+b(\alpha+i\beta)+c=0$

বা, $(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+i(2a\alpha\beta+b\beta)=0$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c=0 \\ 2a\alpha\beta+b\beta=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots\ (i)$$

আবার $ax^2+bx+c$ রাশিতে $x=\alpha-i\beta$ বসাইয়া পাই,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(\alpha-i\beta)^2+b(\alpha-i\beta)+c \\ &= (a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)-i(2a\alpha\beta+b\beta) \\ &= 0-i\times0=0 \end{aligned}$$
[ $(i)$ এর সাহায্যে ]

$\therefore\ \alpha-i\beta$ হইল $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের আর একটি বীজ।

**7.9. যে সমীকরণের বীজদ্বয় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক (reciprocal) সেই সমীকরণটি গঠন।**

মনে কর, $\alpha$, $\beta$ হইল $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ,

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$\alpha$ ও $\beta$-এর অন্যোন্যক হইল $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

অতএব এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে যাহার বীজদ্বয় $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$.

এখন, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b/a}{c/a}=-\frac{b}{c}$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\left(-\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0$

বা, $cx^2+bx+a=0.$

**মন্তব্য ঃ** কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল যদি 1 হয়, তাহা হইলে একটি বীজ হইবে অপর বীজের অন্যোন্যক। যেমন একটি বীজ যদি 2 হয়, তাহা হইলে অপর বীজ হইবে $\frac{1}{2}$।

**উদা. 1.** $3x^2+6x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a=3, b=6, c=2$

$$b^2-4ac=6^2-4.3.2=36-12=24$$

$\therefore$ $b^2-4ac$ এর মান 24 এবং ইহা ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়।

$\therefore$ বীজদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

**উদা. 2.** নিম্নলিখিত প্রতিটি সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি বিশ্লেষণ কর।

(i) $4x^2+4x+1=0$

(ii) $3x^2+2x+4=0$

i) এখানে $a=4, b=4, c=1$

$\therefore$ $b^2-4ac=16-4.4.1=16-16=0$

যেহেতু $b^2-4ac=0$, অতএব বীজদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান।

(ii) $a=3, b=2, c=4$

$$b^2-4ac=4-4\,3.4=-44$$

যেহেতু $b^2-4ac<0$, অতএব বীজদ্বয় কাল্পনিক ও অসমান।

**উদা. 3.** দেখাও যে, $(a^2-bc)x^2+2(b^2-ca)x+(c^2-ab)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে যদি $b=0$ বা $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ হয়।

এখানে নিরূপকটি

$$=4(b^2-ca)^2-4(a^2-bc)(c^2-ab$$

$$=4[b^4+c^2a^2-2b^2ca-c^2a^2+c^3b+a^3b-ab^3c]$$

$$=4b[a^3+b^3+c^3-3abc].$$

যেহেতু সমীকরণের বীজদ্বয় সমান, অতএব নিরূপকটির মান শূন্য হইবে।

অর্থাৎ $b(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

$\therefore$ বীজদ্বয় সমান হইবে যদি $b=0$ হয় বা $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ হয়।

## 7.10. দুইটি সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ থাকার শর্ত :

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ এবং $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ এই দুইটি সমীকরণের ∝ একটি সাধারণ বীজ। ∝ ঐ দুইটি সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

$$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$
$$a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

$(i)$ ও $(ii)$ হইতে বজ্রগুণনের সাহায্যে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc_1-b_1c}=\frac{\alpha}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b} \quad \cdots \quad (iii)$$

$$\therefore\ \left(\frac{\alpha}{ca_1-c_1a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{bc_1-b_1c}\cdot\frac{1}{ab_1-a_1b}$$

বা $(ca_1-c_1a)^2=(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b)$ ইহা হইল নির্ণেয় শর্ত।

$(iii)$ হইতে সাধারণ বীজের (∝) মান আমরা পাই,

$$\frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b} \text{ বা } \frac{bc_1-b_1c}{ca_1-a_1c}.$$

**উদা. 4.** কি শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়

$(i)$ সাংখ্যমানে সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$(ii)$ পরস্পর অন্যোন্যক।

$(iii)$ উভয়েই ধনাত্মক।

$(iv)$ উভয়েই ঋণাত্মক।

$(v)$ একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক।

$(i)$ যেহেতু বীজদ্বয়ের মান ( সাংখ্যমানে ) সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত, অতএব উহাদের যোগফল শূন্য হইবে।

$\therefore$ বীজ দুইটির যোগফল $=-\dfrac{b}{a}=0$

$\therefore\ b=0$

$\therefore\ b=0$ হইল নির্ণেয় শর্ত।

$(ii)$ মনে কর, বীজ দুইটি $\alpha$ ও $\dfrac{1}{\alpha}$

বীজদ্বয়ের গুণফল $=\alpha.\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{c}{a}$

বা, $1=\dfrac{c}{a}$

$\therefore\ c=a$ হইল নির্ণেয় শর্ত।

(*iii*) যেহেতু বীজ দুইটি ধনাত্মক, অতএব বীজ দুইটির যোগফল এবং গুণফল ধনাত্মক হইবে।

অর্থাৎ $-\frac{b}{a}$ ও $\frac{c}{a}$ ধনাত্মক হইবে।

∴ নির্ণেয় শর্ত হইল $a$ ও $c$ সমচিহ্নযুক্ত হইবে এবং $b$ হইবে $a$ ও $c$ চিহ্নের বিপরীত।

(*iv*) যেহেতু বীজ দুইটি উভয়েই ঋণাত্মক, অতএব উহাদের যোগফল ধনাত্মক এবং গুণফল ঋণাত্মক হইবে।

অর্থাৎ $-\frac{b}{a}$ হইবে ঋণাত্মক এবং $\frac{c}{a}$ হইবে ধনাত্মক।

∴ $a, b, c,$ হইবে সমচিহ্নযুক্ত।

(*v*) যেহেতু একটি বীজ ধনাত্মক ও একটি বীজ ঋণাত্মক, অতএব $\frac{c}{a}$ হইবে ঋণাত্মক।

∴ $c$ ও $a$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

সাংখ্যমানে বড় এইরূপ বীজটি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবে যদি $-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক বা ধনাত্মক হয়।

অতএব সাংখ্যমানে বড় এইরূপ বীজটি ধনাত্মক হইবে যদি $b$ ও $c$ সমচিহ্নযুক্ত এবং $a$ উহাদের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় এবং ঋণাত্মক হইবে যদি $a$ ও $b$ সমচিহ্নযুক্ত এবং $c$ উহাদের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

**উদা. 5.** $\alpha$ ও $\beta$ যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ হয়, তাহা হইলে $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

যেহেতু, $\alpha+\beta=\frac{-b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$

$$=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

**উদা. 6.** একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $(a+b)$ ও $(a-b)$।

এখানে বীজদ্বয়ের যোগফল $=(a+b)+(a-b)=2a$

এবং গুণফল $=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=x^2-2ax+(a^2-b^2)=0$

**উদা. 7.** যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $r$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $\dfrac{(r+1)^2}{r}=\dfrac{b^2}{ac}$।

মনে কর, বীজ দুইটির একটি বীজ $\alpha$ এবং অপরটি $\alpha r$.

$$\therefore \quad \alpha+\alpha r=-\frac{b}{a}$$

$$\text{বা,} \quad \alpha(1+r)=\frac{-b}{a} \quad \cdots \quad (i)$$

$$\alpha.\alpha r=\frac{c}{a}$$

$$\alpha^2 r=\frac{c}{a} \quad \cdots \quad (ii)$$

$(i)$ হইতে পাই, $\alpha^2(1+r)^2=\dfrac{b^2}{a^2}$

$$\text{বা,} \quad \alpha^2=\frac{b^2}{a^2(1+r)^2}$$

$(ii)$ হইতে পাই, $\alpha^2=\dfrac{c}{ar}$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{a^2(1+r)^2}=\frac{c}{ar}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{b^2.a}{a^2c}=\frac{(r+1)^2}{r} \qquad \therefore \quad \frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}.$$

**7.11. $ax^2+bx+c$ দ্বিঘাত রাশির চিহ্ন :**

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ $\alpha$ ও $\beta$,

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

এখন, $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

এমন বীজদ্বয়—

(*i*) বাস্তব ও সমান হইতে পারে,

(*ii*) বাস্তব ও অসমান হইতে পারে,

(*iii*) কাল্পনিক হইতে পারে।

(*i*) মনে কর, $\alpha$ ও $\beta$ বাস্তব ও সমান ( $\alpha=\beta$)

$$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=a(x-\alpha)(x-\alpha)=a(x-\alpha)^2$$
$$=a\times \text{একটি ধনাত্মক রাশি}$$

$\therefore$ $a$-এর যে চিহ্ন, $ax^2+bx+c$ এর সেই চিহ্ন হইবে।

(*ii*) মনে কর, $\alpha$ ও $\beta$ বাস্তব এবং অসমান ( $\alpha\neq\beta$)

$$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

(A) এখন যদি $x$, $\alpha$ ও $\beta$ অপেক্ষা বড় হয়, তাহা হইলে

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times \text{ধনাত্মক রাশি}$$

$\therefore$ $a$-এর যে চিহ্ন $ax^2+bx+c$-এর সেই চিহ্ন হইবে।

(B) $x$ যদি $\alpha$ ও $\beta$ অপেক্ষা ছোট হয়, তাহা হইলে $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ প্রত্যেকেই ঋণাত্মক হইবে এবং উহাদের গুণফল ধনাত্মক হইবে।

অতএব $a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি

$\therefore$ $a$-এর যে চিহ্ন $ax^2+bx+c$-এর সেই চিহ্ন হইবে।

(C) $x$ যদি $\alpha$ অপেক্ষা বড় এবং $\beta$ অপেক্ষা ছোট হয়, তাহা হইলে $(x-\alpha)$ ধনাত্মক এবং $(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ $a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ঋণাত্মক রাশি।

আবার $x$ যদি $\alpha$ অপেক্ষা ছোট এবং $\beta$ অপেক্ষা বড় হয়, তাহা হইলে $(x-\alpha)$ ঋণাত্মক এবং $(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ $a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ঋণাত্মক রাশি।

অতএব এই দুই ক্ষেত্রে $a$-এর যে চিহ্ন $ax^2+bx+c$-এর তাহার বিপরীত চিহ্ন হইবে।

(*iii*) মনে কর, $\alpha$ ও $\beta$ উভয়েই কাল্পনিক অর্থাৎ

$\alpha=m+in,\quad \beta=m-in,$

$$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=a[\{x-(m+in)\}\{x-(m-in)\}]$$
$$=a[\{(x-m)-in\}\{(x-m)+in\}]$$
$$=a\{(x-m)^2-(in)^2\}$$
$$=a\{(x-m)^2+n^2\}$$
$$=a\times \text{একটি ধনাত্মক রাশি।}$$

$\therefore$ $a$-এর যে চিহ্ন $ax^2+bx+c$-এর সেই চিহ্ন হইবে।

**7.12. $ax^2+bx+c$ দ্বিঘাত রাশির গরিষ্ঠ (Maximum) ও লঘিষ্ঠ (Minimum) মান :**

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \quad \ldots \quad (1)$$

**I. মনে কর a ধনাত্মক (Positive)।**

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ যেহেতু একটি পূর্ণবর্গ, অতএব $x$-এর যে-কোন বাস্তব মানে ইহা ঋণাত্মক হইবে না।

$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}$ ছাড়া $x$-এর যে-কোন মানের জন্য

$ax^2+bx+c>\frac{4ac-b^2}{4a}$ হইবে।

যদি $x=-\frac{b}{2a}$ হয়, তাহা হইলে $ax^2+bx+c=\frac{4ac-b^2}{4a}$ হইবে।

$\therefore \quad ax^2+bx+c$-এর লঘিষ্ঠ (Minimum) মান হইল $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

**II. মনে কর, a ঋণাত্মক (Negative)।**

যেহেতু $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ সর্বদাই ধনাত্মক এবং $a$ ঋণাত্মক, অতএব $x$-এর যে-কোন মানের জন্য $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}$ ছাড়া $x$-এর যে-কোন মানের জন্য

$ax^2+bx+c<\frac{4ac-b^2}{4a}$.

যখন $x = -\dfrac{b}{2a}$ তখন $ax^2+bx+c=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ হইবে।

$\therefore$ $ax^2+bx+c$ এর গরিষ্ঠ মান $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x$-এর মান $-\dfrac{b}{2a}$।

**উদা. 1.** $x$ যদি বাস্তব হয়, তাহা হইলে $2x^2-4x+4$ এর লঘিষ্ঠ মান (minimum) নির্ণয় কর।

$$2x^2-4x+4=2(x^2-2x)+4$$
$$=2(x^2-2x+1-1)+4=2(x-2)^2+2$$

$x$-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $2(x-1)^2$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ $2x^2-4x+4$ এর লঘিষ্ঠ মান হইল 2.

**উদা. 2.** $x$ যদি বাস্তব হয়, তাহা হইলে $8x-2x^2+12$ এর গরিষ্ঠ (maximum) মান নির্ণয় কর।

$$8x-2x^2+12=12-2(x^2-4x)$$
$$=12-2(x^2-4x+4-4)$$
$$=12-2(x^2-4x+4)+8$$
$$=12+8-2(x-2)^2$$
$$=20-2(x-2)^2$$

$x$-এর বাস্তব মানের জন্য $-2(x-2)^2$ সর্বদাই ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ $8x-2x^2+12$ এর গরিষ্ঠ মান হইল 20.

**উদা. 3.** যদি $x$ বাস্তব হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ এর মান 3 এবং $\dfrac{1}{3}$ এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে কর, $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

বা, $yx^2+xy+1-x^2+x-1=0$

বা, $(1-y)x^2-(1+y)x+(1-y)=0$

যেহেতু $x$ বাস্তব, অতএব ইহার নিরূপক ঋণাত্মক ( negative ) হইতে পারে না।

অর্থাৎ $\{-(1+y)\}^2-4(1-y)(1-y) \nless 0$ ( ঋণাত্মক নহে )

বা, $1+2y+y^2-4+8y-4y^2 \nless 0$

বা, $-3y^2+10y+3 \nless 0$

বা, $-(3y^2-10y-3) \nless 0$

বা, $3y^2-10y-3 \ngtr 0$ ( ধনাত্মক নহে )

বা, $(y-3)(3y-1) \ngtr 0$

বা, $3(y-\frac{1}{3})(y-3) \ngtr 0$

এখন $3(y-\frac{1}{3})(y-3)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইল $\frac{1}{3}$ এবং 3।

$y$-এর মান যদি $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা ছোট হয়, তাহা হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়। সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল ধনাত্মক হইবে। আবার $y$-এর মান যদি 3 অপেক্ষা বড় হয় তাহা হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হইবে এবং উহাদের গুণফল ধনাত্মক হইবে। কিন্তু কল্পনা অনুসারে ইহা ধনাত্মক হইতে পারে না। আবার $y$-এর মান $\frac{1}{3}$ ও 3-এর মান সমান হইলে নিরূপকটি শূন্য হইবে।

পুনরায় $y$-এর মান যখন $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা বড় কিন্তু 3 অপেক্ষা ছোট তখন $(y-\frac{1}{3})$ ধনাত্মক এবং $(y-3)$ ঋণাত্মক এবং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক হইবে।

অতএব $x$ বাস্তব হইলে $y$-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার মান $\frac{1}{3}$ ও 3-এর মধ্যবর্তী যে-কোন মান হইতে পারে।

উদা. 4. যদি $x$ বাস্তব হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $\frac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$ এর মান কখনই 1 ও $-7$-এর মধ্যবর্তী হইবে না।

মনে কর, $y=\frac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$

বা, $yx^2-4xy+3y-2x^2+2x-4=0$

বা, $x^2(y-2)-2x(2y-1)+(3y-4)=0$

যেহেতু $x$ বাস্তব, অতএব এই সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $\{-2(2y-1)\}^2-4(y-2)(3y-4) \nless 0$ ( ঋণাত্মক নয় )

বা, $4(4y\ \ +1-4y)-4(3y^2-4y-6y+8) \nless 0$

বা, $(16y^2+4+16y-12y^2+40y-32) \nless 0$

বা, $(4y^2+24y-28) \nless 0$

বা, $4(y+7)(y-7) \nless 0$

$\therefore$ $4(y+7)(y-1)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় 1 ও $-7$.

$y$-এর মান 1 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক এবং উহাদের গুণফল ধনাত্মক হয়।

$y$-এর মান $-7$ অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক এবং উহাদের গুণফল ধনাত্মক হয়।

আবার $y$-এর মান 1 অপেক্ষা ছোট এবং $-7$ অপেক্ষা বড় হইলে $(y-1)$ ঋণাত্মক এবং $(y+7)$ ধনাত্মক এবং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক হয়। কিন্তু কল্পনা অনুসারে উহাদের গুণফল ঋণাত্মক হইতে পারে না। আবার $y$-এর মান 1 ও $-7$ হইলে নিরূপকটি শূন্য হয়। অতএব $x$-এর বাস্তব মানে $y$-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান 1 ও $-7$-এর মধ্যবর্তী কোন মানই হইবে না।

## প্রশ্নমালা 7

1. সমীকরণগুলির প্রকৃতি ( Nature ) বিশ্লেষণ কর :
   (i) $x^2-4x+4=0$ (ii) $x^2-2\sqrt{3}x-2=0$
   (iii) $7x^2+4x-3=0$ (iv) $x^2+10x+25=0$

2. দেখাও যে, $(b-cx)^2+2(c-a)x+(a-b)=0$ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব ($a, b, c$ বাস্তব ধরিয়া লও)।

3. $k$-এর মান কত হইলে $x^2-2(3k+1)x-(5k+1)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

4. দেখাও যে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ (rational) যদি $a+b+c=0$ হয় এবং যদি $a, b, c$ মূলদ হয়।

5. যদি $a+b+c=0$ হয়, দেখাও যে $(a+b-c)x^2+(b+c-a)x+(c+a-b)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ ( rational ) হইবে।

6. $k$-এর মান কত হইলে $\frac{}{x+a+k}+\frac{b}{x+b+k}=1$ সমীকরণের বীজদ্বয় সাংখ্যমানে সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

7. যদি $(a^2+b^2)x^2+2x(bc+ad)+(c^2+d^2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব হয়, তাহা হইলে দেখাও যে তাহারা সমান।

8. $x^2+2(p+q)x+2(p^2+q^2)=0$ সমীকরণের চরিত্র বিশ্লেষণ কর।

9. যদি $x^2+2rx+pq=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হয়, তাহা হইলে $x^2-2(p+q)x+(p^2+q^2+2r^2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে।

10. $\alpha$ ও $\beta$ যদি $x^2+qx+r=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ হয়, তাহা হইলে $q$ ও $r$ দ্বারা ( in terms of $q$ and $r$ ) (*i*) $\alpha^3+\beta^3$ (*ii*) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ এর মান নির্ণয় কর।

11. $\alpha$ ও $\beta$ যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে $a, b, c$ রাশি দ্বারা নিম্নের রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\alpha^2+\beta^2$ (*ii*) $\alpha^2-\beta^2$ (*iii*) $\alpha^3+\beta^3$ (*iv*) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

(*v*) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$, (*vi*) $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha\beta}$, (*vii*) $(p\alpha+q\beta)(q\alpha+p\beta)$

12. $\alpha$ ও $\beta$ যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে নিম্নের রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (*ii*) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$ (*iii*) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ (*iv*) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$

(*v*) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}$ (vi) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7$ (*vii*) $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$

13. $\alpha, \beta$ যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2\beta^2}$ (*ii*) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}$ (*iii*) $(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)$

14. সমীকরণগুলি নির্ণয় কর যাহাদের বীজদ্বয় নীচে দেওয়া হইল :

(*i*) 2, 3 (*ii*) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ (*iii*) $(\alpha+\beta), (\alpha-\beta)$

15. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের $\alpha$ ও $\beta$ দুইটি বীজ হইলে এমন সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় হইবে

(*i*) $\alpha^2$ ও $\beta^2$ (*ii*) $\alpha+2\beta,\ \beta+2\alpha$ (*iii*) $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$

(*iv*) $(\alpha+\beta)^2, (\alpha-\beta)^2$ (*v*) $\frac{1}{a\alpha+\beta}, \frac{1}{a\beta+\alpha}$ (*vi*) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

16. $\alpha, \beta$ যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে এমন সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় হইবে

(*i*) $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$ (*ii*) $2\alpha-\beta,\ 2\beta-\alpha$

(*iii*) $m\alpha+n\beta,\ n\alpha+m\beta$.

17. $\alpha, \beta$ যদি $x^2+8x+15=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় $(\alpha+\beta)^2$ ও $(\alpha-\beta)^2$।

18. $\alpha, \beta$ যদি $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় $p+mq$ ও $q+mp$.

19. যদি $\alpha$ ও $\beta$, $x^2+4x+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$।

20. $x^2+7x+12=0$ সমীকরণের $\alpha$ ও $\beta$ দুইটি বীজ। এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার দুইটি বীজ $(\alpha+\beta)^2$ ও $(\alpha-\beta)^2$ হইবে।

21. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজদ্বয় $x^2-8x+12=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক (reciprocals) হয়।

22. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha$ ও $\beta$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $\frac{\alpha}{\beta}$, $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ হইবে।

23. $\alpha, \beta$ যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $\frac{1}{\alpha+\beta}$ ও $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ হইবে।

24. যদি $ax^2+x+b=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha$ ও $\beta$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে,

$$\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{1}{ab}.$$

25. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজগুলি $3x^2-7x-5=0$ সমীকরণের বীজগুলির বর্গ হইবে।

26. যদি $lx^2+nx+n=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $p : q$ অনুপাতে থাকে, তাহা হইলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0.$

27. যদি $2x^2-5x+4=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $m$ ও $n$ হয়, তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $m+\frac{1}{n}$ ও $n+\frac{1}{m}$.

28. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় হইল $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের যৌগিক গড় (A.M) ও গুণোত্তর গড় (G.M.)।

29. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজের দ্বিগুণ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $2p^2-9q=0$.

30. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজের 4 গুণ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $4b^2-25ac=0$.

31. $\alpha, \beta$ যদি $3x^2-6x+4=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) + 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$ এর মান কত ?

32. $\alpha, \beta$ যদি $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $\alpha+\beta$ ও $\frac{\alpha\beta}{2}$ হইবে।

33. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজগুলি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্যোন্যক।

34. $\alpha, \beta$ যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় এবং $\gamma, \delta$ যদি $x^2-p'x+q'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তাহা হইলে, $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$ এর মান নির্ণয় কর।

35. $\alpha, \beta$ যদি $x^2-2ax+b^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় এবং $\gamma, \delta$ যদি $x^2-2cx+d^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয় এবং যদি $\alpha\delta=\beta\gamma$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $a^2d^2=b^2c^2$.

36. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির বর্গ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $b^3+ac^2+a^2c=3abc$.

37. দেখাও যে $x^2-2ax+b^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের যৌগিক গড় $x^2-2bx+a^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণোত্তর গড়ের সমান হয় এবং ইহা উল্টাইয়া লইলেও হয়।

38. যদি $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

39. এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যাহার বীজদ্বয় $ax^2+2bx+4c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যকের দ্বিগুণ হয় ( twice the reciprocals of the roots of the equation $ax^2+2bx+4c=0$ )।

40. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত যদি $x^2+lx+m=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $p^2m=l^2q$.

41. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ যদি অপর বীজের বর্গ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $p^3-q(3p-1)+q^2=0$।

42. $\alpha, \beta$ যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয় তাহা হইলে এমন একটি সমীকরণ বাহির কর যাহার বীজদ্বয় $\frac{1}{\alpha+\beta}$ ও $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ এবং দেখাও যে সমীকরণটি $bcx^2+(ac+b^2)x+ab=0$।

43. যদি $px^2+qx+r=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজের বর্গ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $q^3+p^2r+pr^2=3pqr$.

44. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের পার্থক্য যদি কোন ধ্রুবক হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{b'^2-4a'c'}{a'^2}$.

45. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের বিয়োগফল যদি $l$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $p^2+4q^2=(1+2q)^2$ ।

46. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় যদি $px^2+qx+r=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের বর্গ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$$pb^2+qa^2=2apc \text{ এবং } pc^2=a^2r.$$

47. প্রমাণ কর যে $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ এবং $(c-a)x^2+(a-b)x+(b-c)=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ আছে।

48. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তাহা হইলে দেখাও যে $a=0$ অথবা $a^3+b^3+c^3=3abc$.

49. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তাহা হইলে দেখাও যে $a=b=c$ অথবা $a+b+c=0$.

50. $k$-এর মান কত হইলে $3x^2+4kx+2=0$ এবং $2x^2+3x-2=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকিবে।

51. $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ আছে। প্রমাণ কর যে অন্য বীজগুলি $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

52. প্রমাণ কর যে $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ এবং $(c-a)x^2+(a-b)x+(b-c)=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ আছে।

53. $x$ যদি বাস্তব হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির লঘিষ্ঠ মান ( minimum value ) নির্ণয় কর :

(i) $2x^2+5x-3$ (ii) $2x^2+8x+11$

(iii) $3x^2-6x+8$ (iv) $3x^2-4x+10$

54. $x$ যদি বাস্তব হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির গরিষ্ঠ মান (Maximum Value) নির্ণয় কর :

(i) $8x-4-2x^2$ (ii) $16x-8-4x^2$

55. $x$ যদি বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে

(i) $\frac{1}{7}$ ও 7 এর মধ্যে $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ অবস্থিত হইবে।

(ii) $\frac{1}{5}$ ও 5 এর মধ্যে $\dfrac{x^2-4x+9}{x^2+4x+9}$ অবস্থিত হইবে।

(iii) $\frac{1}{2}$ ও $\frac{7}{6}$ এর মধ্যে $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+4}$ অবস্থিত হইবে।

(iv) 3 ও $\frac{1}{3}$ এর মধ্যে $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ অবস্থিত হইবে।

56. $x$ বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে :

(i) $-1$ ও 1 এর মধ্যে $\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2+4x+2}$ অবস্থিত হইবে না।

(ii) 1 ও $-7$ এর মধ্যে $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$ অবস্থিত হইবে না।

(iii) 5 ও 9 এর মধ্যে $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ অবস্থিত হইবে না।

(iv) $\frac{4}{9}$ ও 1 এর মধ্যে $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$ অবস্থিত হইবে না।

57. প্রমাণ কর $x$ যদি বাস্তব হয় $\dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ যে-কোন বাস্তব মানের সমান হইতে পারে।

58. $x$-এর বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ এর গরিষ্ঠ মান (maximum value) নির্ণয় কর।

59. প্রমাণ কর যে, যদি $x$ বাস্তব হয়, তাহা হইলে $\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-4x+1}$ এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

60. $x$-এর বাস্তব মানের জন্য দেখাও যে $\frac{4}{9}$ ও 1 এর মধ্যে $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x-8}$ অবস্থিত হইবে না।

# অষ্টম অধ্যায়

## বিন্যাস এবং সমবায়

## ( Permutation and Combination )

8.1. **বিন্যাস :** কতকগুলি বস্তুর কয়েকটি বা সবগুলিকে লইয়া বিভিন্ন প্রকারে সাজানো হইলে প্রত্যেক প্রকারে সাজানোকে ( arrangement ) বস্তুগুলির এক-একটি বিন্যাস বলে।

মনে কর, $x$, $y$, $z$ তিনটি অক্ষর। এই তিনটি অক্ষরের মধ্যে

(*i*) একযোগে একটি অক্ষর লইয়া,

(*ii*) একযোগে দুইটি অক্ষর লইয়া,

(*iii*) একযোগে তিনটি অক্ষর লইয়া,

সাজাইলে যে বিন্যাসগুলি হইবে তাহা নিম্নে দেওয়া হইল :

| (*i*) | (*ii*) | (*iii*) |
|---|---|---|
| $x$ | $xy$ | $xyz$ |
| $y$ | $yx$ | $xzy$ |
| $z$ | $yz$ | $yzx$ |
| | $zy$ | $yxz$ |
| | $zx$ | $zxy$ |
| | $xz$ | $zyx$ |

(*i*) নং ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা 3 এবং ইহাকে $3_{P_1}$-এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

(*ii*) নং ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা 6 এবং ইহাকে $3_{P_2}$-এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

(*iii*) নং ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা 6 এবং ইহাকে $3_{P_3}$-এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

8.2. **সমবায় :** কতকগুলি বস্তু হইতে ( ক্রমনিরপেক্ষভাবে ) একযোগে কয়েকটি লইয়া অথবা সব কয়েকটিকে লইয়া যতরকম দল গঠন করা যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে এক-একটি সমবায় বলে।

মনে কর, $x$, $y$, $z$ তিনটি অক্ষর। এই অক্ষরগুলির মধ্যে

(*i*) একযোগে একটি লইয়া,

(*ii*) একযোগে দুইটি লইয়া,

(*iii*) একযোগে তিনটি লইয়া,

সাজাইলে যে সমবায় হয় তাহা নীচে দেওয়া হইল :

| | | |
|---|---|---|
| (i) $x$ | (ii) $xy$ | (iii) $xyz$ |
| $y$ | $yz$ | |
| $z$ | $zx$ | |

(i) নং ক্ষেত্রে সমবায়ের সংখ্যা 3 এবং ইহা $^3C_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) নং ক্ষেত্রে সমবায়ের সংখ্যা 3 এবং ইহা $^3C_2$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(iii) নং ক্ষেত্রে সমবায়ের সংখ্যা 1 এবং ইহা $^3C_3$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সমবায়ের ক্ষেত্রে কেবল দলীয় বস্তুগুলিই বিবেচনা করা হয়। কোন্‌টির পর কোন্‌টি রাখিয়া সাজানো হইবে তাহা বিবেচনা করার প্রয়োজন হয় না। $x$ ও $y$ এই দুইটি অক্ষরকে ক্রমনিরপেক্ষভাবে সাজাইলে $xy$ একটি সমবায় হয়। $x$ ও $y$-কে $yx$ হিসাবেও সাজানো যায়। যেহেতু সমবায় ক্রমের উপর নির্ভর করে না, অতএব দল একটিই হয় অর্থাৎ সমবায় $xy$ ও $yx$ অভিন্ন।

কিন্তু বিন্যাসের ক্ষেত্রে দলীয় বস্তুগুলি ছাড়াও উহাদের কোন্‌টির পর কোন্‌টি রাখিয়া সাজানো হইবে তাহাও বিবেচনা করা হয়। দলীয় বস্তুগুলি যদি অভিন্ন হয় এবং বস্তুগুলি যদি উভয় ক্ষেত্রে একই ক্রমে সাজানো থাকে, তাহা হইলে দুইটি বিন্যাস অভিন্ন হইবে। কাজেই একটিমাত্র সমবায় হইতে একাধিক বিন্যাস গঠন করা সম্ভব।

মনে কর, $xyz$ একটি সমবায়। ইহা হইতে $xyz$, $xzy$, $yzx$, $yxz$, $zxy$, $zyx$ এই ছয়টি পৃথক বিন্যাস পাওয়া যায়।

**8.3.** $n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে $r$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু লইয়া সাজাইলে যতগুলি বিন্যাসের সংখ্যা হয় সেই সংখ্যাকে $^nP_r$ বা $nPr$ বা $P(n,r)$ দ্বারা সূচিত করা হয় ( যেখানে $n \geqslant r$ )। আবার $n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে $r$-সংখ্যক বস্তু লইয়া সাজাইলে যতগুলি সমবায় হয় সেই সংখ্যাকে $^nC_r$ বা $_nC_r$ বা $C(n, r)$ দ্বারা সূচিত করা হয় ( যেখানে $n \geqslant r$ )।

আমরা এখানে $^nP_r$ এবং $^nC_r$ এই প্রতীক দুইটি ব্যবহার করিব।

**8.4. প্রতীক** ( *Notation* ) **:**

1, 2, 3, 4 হইতে আরম্ভ করিয়া $n$ পর্যন্ত ক্রমিক সংখ্যার গুণফলকে $\underline{|n}$ বা $n\,!$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ইহাকে factorial $n$ বলা হয়।

$$\therefore \quad \underline{|n} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1$$

$$\underline{|6} = 6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$\underline{|10} = 10\times9\times8\times\underline{|7}$$

$$= 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$ ইত্যাদি।

### 8.5. একটি বিশেষ নিয়ম :

যদি কোন প্রক্রিয়া $m$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং কোন এক প্রকারে তাহা করা হইবার পর অন্য একটি প্রক্রিয়া যদি $n$ বিভিন্ন প্রকারে করা হয় তাহা হইলে দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $(m \times n)$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

মনে কর, একটি সিনেমা হলে মাত্র চারিটি আসন খালি আছে। রাম ও শ্যাম পরপর টিকিট কিনিয়া হলে প্রবেশ করিল। টিকিটে যদি আসন নির্দিষ্ট না থাকে তাহা হইলে রাম ঐ চারিটি আসনের মধ্যে যে কোন একটিতে বসিতে পারে। অর্থাৎ রাম চার প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে। রামের আসন গ্রহণ করিবার পর তিনটি আসন খালি থাকে। শ্যাম ঐ তিনটি আসনের মধ্যে যে-কোন একটি আসন গ্রহণ করিতে পারে অর্থাৎ শ্যাম তিন প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে। অতএব রাম ও শ্যাম মিলিতভাবে $4 \times 3$ প্রকারে খালি আসন গ্রহণ করিতে পারে।

**মন্তব্য :** উপরের সিদ্ধান্তটিকে আরও ব্যাপকভাবে লওয়া যাইতে পারে। যদি একটি প্রক্রিয়া $m$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তারপর আর একটি প্রক্রিয়া $n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তারপর আরও একটি প্রক্রিয়া $p$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে সমস্ত প্রক্রিয়াগুলি মিলিতভাবে $m \times n \times p$ প্রকারে করা যায়।

### 8.6. $n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে $r$-সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া মোট বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় ( $n \geqslant r$ )

*( To find the number of permutation of n different things taken r at a time i.e. to find the value of* $^nP_r$ *)* :

এখানে $r$-সংখ্যক শূন্যস্থান $n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা যত উপায়ে পূরণ করা যায় সেই সংখ্যাই হইবে নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা ( এ ক্ষেত্রে কোন বস্তুর একই বিন্যাসের পুনরাবৃত্তি হইবে ইহা ধরিয়া লইতে হইবে )। প্রথম শূন্য স্থানটিকে $n$-সংখ্যক পদ্ধতিতে পূরণ করা যায়, কারণ $n$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি দ্বারা ঐ শূন্যস্থানটিকে পূরণ করা যায়। প্রথম স্থানটি $n$ প্রকারে পূরণ করিবার পর দ্বিতীয় স্থানটিকে $(n-1)$ উপায়ে পূরণ করা যায়। কারণ প্রথম স্থান পূরণ হইবার পর বাকী থাকে $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু এবং এই $(n-1)$ বস্তুর যে কোন একটি দ্বারা দ্বিতীয় স্থানটিকে পূরণ করা যায়। তাহা হইলে প্রথম স্থান $n$ প্রকারে পূরণ করা যায় এবং তাহা পূরণ করিবার পর দ্বিতীয় স্থান $(n-1)$ উপায়ে পূরণ করা যায়। অতএব প্রথম দুইটি স্থান মিলিতভাবে $n(n-1)$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

প্রথম দুইটি স্থান পূরণ হইয়া যাইবার পর স্পষ্টতঃই তৃতীয় স্থানটি $(n-2)$ প্রকারে পূরণ করা যায়। সুতরাং প্রথম তিনটি স্থান $n(n-1)(n-2)$ উপায়ে পূরণ করা যায়। একই উপায়ে চলিতে থাকিলে দেখা যাইবে যতগুলি স্থান পূরণ করা হইবে উৎপাদক সংখ্যাও ততগুলি হইবে। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, $r$-সংখ্যক শূন্যস্থান যত প্রকারে পূরণ করা যায় তাহার সংখ্যা হইবে $r$-সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল এবং প্রত্যেক উৎপাদক ঠিক তাহার আগের উৎপাদক অপেক্ষা 1 কম।

$\therefore$ $r$-সংখ্যক স্থান যত উপায়ে পূরণ করা যায় তাহাদের সংখ্যা

$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots r$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{n-(r-1)\}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

$$\therefore\ {}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

আবার $${}^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\times(n-r)\ldots 3.2.1}{(n-r)\ldots\ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}.$$

$$\therefore\ {}^nP_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}.$$

**মন্তব্য ঃ**

(i) $${}^nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-n+1)$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1$$
$$= \underline{|n}$$

আবার $${}^nP_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-n}} \qquad \left(\because\ {}^nP_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}\right)$$

বা, $${}^nP_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}} \qquad \ldots \qquad (i)$$

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $$\underline{|n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$$

$$\therefore\ \underline{|0} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}} = 1$$

এখন $${}^4P_4 = \frac{\underline{|4}}{\underline{|4-4}} = \frac{\underline{|4}}{\underline{|0}} = \frac{\underline{|4}}{1} = \underline{|4}.$$

**8.7. সংখ্যাগুলি বিভিন্ন নহে এইরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়** ( *To find the number of permutation of n-things taken all together when the things are not all different* ) :

$n$-সংখ্যক বস্তুকে $n$-অক্ষর ধরা হইল। নির্দিষ্ট করার জন্য $n$-সংখ্যক অক্ষরের মধ্যে $p$-সংখ্যক অক্ষর $a$, $q$-সংখ্যক অক্ষর $b$, $r$-সংখ্যক অক্ষর $c$ এবং বাকী সব বিভিন্ন মনে কর।

মনে কর, বিন্যাসের সংখ্যা $x$। সুতরাং $x$-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে $n$ অক্ষরের সবগুলি থাকিবে। এখন অন্য অক্ষরগুলির অবস্থান পরিবর্তন না করিয়া $p$-সংখ্যক $a$-কে পরিবর্তন করিয়া পরস্পর ভিন্ন নূতন অক্ষর সাজানো হইল। এক্ষেত্রে নূতন অক্ষরগুলি নিজেদের মধ্যে $\lfloor\underline{p}$ উপায়ে সাজানো যায়। অতএব $x$-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor\underline{p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে এবং মোট বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $x \times \lfloor\underline{p}$।

অনুরূপভাবে $x \times \lfloor\underline{p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে যে $q$-সংখ্যক $b$ আছে তাহাদের পরিবর্তন করিয়া পরস্পর ভিন্ন এবং বাকীগুলি হইতেও ভিন্ন $q$-সংখ্যক অপর নূতন অক্ষর লওয়া হইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $x \times \lfloor\underline{p} \times \lfloor\underline{q}$। ঠিক একইভাবে $r$-সংখ্যক $c$ অক্ষরের পরিবর্তন করিয়া $r$-সংখ্যক পরস্পর বিভিন্ন এবং বাকীগুলি হইতেও ভিন্ন নূতন অক্ষর লইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $x \times \lfloor\underline{p} \times \lfloor\underline{q} \times \lfloor\underline{r}$।

আবার যেহেতু $n$-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিই বিভিন্ন সেইহেতু ইহাদের সবগুলিকে একযোগে লইয়া বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে বিন্যাসের সংখ্যা $\lfloor\underline{n}$ হইবে।

$$\therefore \quad x \times \lfloor\underline{p} \times \lfloor\underline{q} \times \lfloor\underline{r} = \lfloor\underline{n}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{r}}.$$

**8.8. একই বিন্যাসে কোন একটি বস্তুকে r-সংখ্যক বার পর্যন্ত লওয়া যাইবে এই শর্তে n বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়** ( *To find the number of permutations of n different things taken r at a time when each thing may be repeated up to r times* ) :

$n$-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটিকে $r$ বার পর্যন্ত লওয়া যাইবে এই শর্তে $r$-সংখ্যক শূন্যস্থানকে $n$-সংখ্যক বস্তু দ্বারা যত প্রকারে পূরণ করা যায় নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা ঠিক সেই সংখ্যার সমান হইবে।

প্রথম শূন্যস্থানটি $n$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি দ্বারা পূরণ করা যায়, সুতরাং তখন শূন্যস্থানটি $n$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। প্রথম স্থান $n$ প্রকারের যে-কোন এক একপ্রকারে পূরণ হইবার পর দ্বিতীয় স্থানটিও $n$ বিভিন্ন প্রকারে পূরণ করা যাইবে। কারণ একই অক্ষর পুনরায় ব্যবহার করা চলে। অতএব প্রথম দুইটি স্থান মোট $n \times n$ বা $n^2$ বিভিন্ন উপায়ে পূরণ করা যায়। অনুরূপে তৃতীয় স্থানটিও $n$ বিভিন্ন উপায়ে পূরণ করা যায়। অতএব প্রথম তিনটি স্থান পূরণ হইবে $n^3$ বিভিন্ন উপায়ে। এইভাবে চলিয়া $r$ সংখ্যক স্থান $n^r$ উপায়ে পূরণ করা যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= n^r$.

**8.9.** (*i*) **প্রমাণ কর :** $\dfrac{1}{\lfloor\underline{-r}} = 0$

আমরা জানি, $^nP_r = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\lfloor\underline{n-r}}{\lfloor\underline{n-r}}$

$$= n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

$n=0$ বসাও। অতএব, $\dfrac{\lfloor\underline{0}}{\lfloor\underline{-r}} = 0$ বা, $\dfrac{1}{\lfloor\underline{-r}} = \dfrac{0}{\lfloor\underline{0}} = \dfrac{0}{1} = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{\lfloor\underline{-r}} = 0$$

(*ii*) **প্রমাণ কর :** $^nP_n = {}^nP_{n-1}$

আমরা জানি, $^nP_n = \lfloor\underline{n}$

$$^nP_{n-1} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-(n-1)}} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{1}} = \lfloor\underline{n}$$

$$\therefore \quad {}^nP_n = {}^nP_{n-1}$$

(*iii*) $n$ বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছামত $1, 2, 3 \cdots n$ বস্তু পর্যন্ত এক-যোগে লইয়া সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা হইবে

$$^nP_1 + {}^nP_2 + {}^nP_3 + \cdots + {}^nP_n.$$

## 8.10. বৃত্তাকারে বিন্যাস ( *Permutation in a circle* ) :

কতকগুলি বিভিন্ন বস্তুকে যখন এক সারিতে সাজানো হয় তখন সেই বিন্যাসকে রৈখিক বিন্যাস বা বিন্যাস বলে। আবার বস্তুগুলিকে যখন বৃত্তাকারে সাজানো হয় তখন সেই বিন্যাসকে বৃত্তাকার বিন্যাস বলে। রৈখিক বিন্যাসের বেলায় দুইটি প্রান্ত থাকে কিন্তু বৃত্তাকারের বেলায় প্রান্ত থাকে না। সেইজন্য বৃত্তাকার বিন্যাসে বস্তুগুলির একমাত্র আপেক্ষিক ( relative ) অবস্থান বিবেচনা করা হয়। সেইজন্য $n$ বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা হয় $\lfloor n-1$। কারণ একটি বস্তুর অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$ বস্তুকে নিজেদের মধ্যে যতরকমভাবে সম্ভব সাজাইলে আপেক্ষিক বিন্যাস পাওয়া যায় এবং ইহার সংখ্যা $\lfloor n-1$।

যদি ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে সেই দিক এবং বিপরীত দিকে কোন পার্থক্য করা না হয় তাহা হইলে $n$ বিভিন্ন বস্তুর বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা $\frac{1}{2}\times\lfloor n-1$।

## 8.11. শর্তাধীন বিন্যাস ( *Restricted Permutations* ) :

(i) $n$ বিভিন্ন বস্তুর $p$-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না এই শর্তে $n$ বিভিন্ন বস্তুর $r$ বস্তু একযোগে লইয়া সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা ${}^{n-p}P_r$।

(ii) যদি $p$-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু $p$-সংখ্যক নির্ধারিত স্থান অধিকার করে এই শর্তে $n$ বস্তুর $r$ বস্তু একযোগে লইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা ${}^{n-p}P_{r-p}$ হয়।

(iii) $n$-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সব বিন্যাসগুলির মধ্যে থাকিবে যদি এই শর্ত হয় তাহা হইলে $n$ বিভিন্ন বস্তু একযোগে লইয়া সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা ${}^{n-p}P_{r-p}\times{}^{n}P_r$ হইবে।

**উদা 1.** মান নির্ণয় কর :

(i) ${}^7P_7$ (ii) ${}^8P_3$

(i) $${}^7P_7=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 7-7}=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 0}=\lfloor 7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$
$$=5040.$$

(ii) $${}^8P_3=\frac{\lfloor 8}{\lfloor 8-3}=\frac{\lfloor 8}{\lfloor 5}=\frac{8\times7\times6\times\lfloor 5}{\lfloor 5}=336.$$

উদা. 2. প্রমাণ কর : $^{(n+1)}P_{r+1}=(n+1).{}^nP_r$

এখন, $^{n+1}P_{r+1}=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor n+1-r-1}=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor n-r}$

আবার, $(n+1).{}^nP_r=(n+1).\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor n-r}$

$\therefore\ {}^{n+1}P_{r+1}=(n+1).{}^nP_r.$

উদা. 3. 'Jaipur' শব্দটির সব অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া মোট কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যাইবে ?

Jaipur শব্দটিতে মোট 6টি অক্ষর আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $={}^6P_6=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 6-6}=\lfloor 6$

$=6\times5\times4\times3\times2\times1=720.$

উদা 4. 'Balloon' শব্দটির সব অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া মোট কয়টি বিন্যাস পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

Balloon শব্দটিতে মোট 7টি অক্ষর আছে

ইহার মধ্যে $b=1$

$a=1$

$l=2$

$o=2$

$n=1$

মোট $=7$ টি অক্ষর

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2\,\lfloor 2}$

$=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=210\times6=1260.$

উদা. 5. 'Cadet' শব্দটির অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া মোট কয়টি বিন্যাস পাওয়া যাইবে ? ইহাদের মধ্যে কয়টির প্রথম অক্ষর C হইবে না ? কয়টির শেষ অক্ষর T হইবে না অথচ প্রথম অক্ষর C হইবে ?

Cadet শব্দটিতে মোট 5টি অক্ষর আছে। একযোগে 5টি অক্ষর লইয়া সাজাইলে বিন্যাসের সংখ্যা $^5P_5=\lfloor 5=5\times4\times3\times2\times1=120.$

প্রথমে C-কে স্থির রাখিয়া বাকী 4টি অক্ষরকে $^4P_4$ বা $\lfloor 4$ বা 24 উপায়ে সাজানো যায়। প্রথমে C থাকিবে না এইভাবে সাজাইলে বিন্যাসের সংখ্যা $120-24=96$.

আবার প্রথমে C-কে এবং শেষে T-কে স্থির রাখিয়া বাকী তিনটি অক্ষরকে লইয়া সাজাইলে বিন্যাসের সংখ্যা $\lfloor 3$ বা 6 হয়।

$\therefore$ প্রথম অক্ষর C হইবে এবং শেষ অক্ষর T হইবে না এইরূপে সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা $24-6=18$.

উদা. 6. যদি স্বরবর্ণ সর্বদা একত্রে থাকে তবে daughter শব্দটির অক্ষরগুলির দ্বারা কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

এখানে a, u, e এই তিনটি স্বরবর্ণ (vowels)। এই তিনটি স্বরবর্ণকে একটি অক্ষর ধরিয়া মোট 6টি অক্ষর হয় [ (aue), d, g, h, t, r ]

এই অক্ষর ছয়টিকে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা $^6P_6$ বা $\lfloor 6$ বা 720 হয়।

আবার স্বরবর্ণ তিনটিকে একত্রে রাখিয়া উহাদের নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত করিলে বিন্যাসের সংখ্যা হয় $^3P_3$ বা $\lfloor 3$ বা 6।

$\therefore$ daughter শব্দটির স্বরবর্ণ তিনটি সর্বদাই একত্রে থাকিবে এই শর্তে অক্ষরগুলিকে সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা $6\times720=4320$।

উদা. 7. 8টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি লইয়া সাজাইলে তাহাদের কতকগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু (*i*) সর্বদা থাকিবে এবং (*ii*) কখনই থাকিবে না—এই শর্তে কতকগুলি বিন্যাস পাওয়া যায়।

8টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি বস্তু লইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা

$$^8P_4=\frac{\lfloor 8}{\lfloor 4}=\frac{8\times7\times6\times5\times\lfloor 4}{\lfloor 4}=56\times30=1680$$

8টি বস্তুর মধ্যে 1টি নির্দিষ্ট বস্তু মোটেই থাকিবে না এইরূপে $(8-1=7)$ 7টির মধ্যে একযোগে 4টি লইয়া সাজাইতে হইবে।

এইরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাসের সংখ্যা

$$^7P_4=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 3}=\frac{7\times6\times5\times4\times\lfloor 3}{\lfloor 3}=840$$

অতএব যে বিন্যাসগুলিতে ঐ নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $1680-840=840$.

উদা. 8. 5 জন বালিকা কতরকমে বৃত্তাকারে বসিতে পারে ?

এখানে আপেক্ষিক অবস্থানের প্রশ্ন বিবেচনা করিতে হইবে। একজন বালিকাকে নির্দিষ্ট স্থানে রাখিয়া বাকী 4 জনকে $\underline{|4}$ উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $\underline{|4}=4\times3\times2\times1=24$.

## 8.12. সমবায় ঃ

**$n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে $r$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু লইয়া সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয় অর্থাৎ $^nC_r$ এর মান নির্ণয় $(n\geqslant r)$**

*( To find number of combinations of n different things taken r at a time ($r\leqslant n$) i. e. to find $^nC_r$ ) :*

মনে কর, সমবায়ের সংখ্যা $x$ অর্থাৎ $x={}^nC_r$। এখন প্রত্যেক সমবায়ে $r$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু আছে এবং ঐ বস্তুগুলিকে নিজেদের মধ্যে সাজাইলে $\underline{|r}$ উপায়ে বিন্যস্ত করা যায়। $x$ সংখ্যক সমবায় হইতে $x\times\underline{|r}$ সংখ্যক বিন্যাস পাই। এই সংখ্যাই হইল $n$ বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে $r$ বস্তু লইয়া সাজাইলে যে বিন্যাসের সংখ্যা হয়। অর্থাৎ ইহা $^nP_r$ এর সমান হয়।

$$\therefore \quad x\times\underline{|r}={}^nP_r$$

$$\text{বা,}\quad x=\frac{^nP_r}{\underline{|r}}$$

$$\text{বা,}\quad {}^nC_r=\frac{^nP_r}{\underline{|r}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

$$\text{লক্ষণীয়,}\quad {}^nC_1=\frac{\underline{|n}}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}}=\frac{n\underline{|n-1}}{1.\underline{|n-1}}=n$$

$$^nC_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n-n}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|0}}=1$$

$$^nC_0=\frac{\underline{|n}}{\underline{|0}\,\underline{|n-0}}=\frac{\underline{|n}}{1.\underline{|n}}=1$$

$$\therefore \quad {}^nC_n={}^nC_0$$

**8.13. প্রমাণ কর $n$ বিভিন্ন বস্তু হইতে $r$ বস্তু একযোগে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা $=n$ বিভিন্ন বস্তু হইতে $(n-1)$ বস্তু একযোগে লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা। অর্থাৎ প্রমাণ কর $^nC_r={}^nC_{n-r}$.**

( *To show that the number of combinations of n different things taken r at a time is equal to the number of combinations of n different things taken (n − r) at a time, i.e., to find* ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ )

আমরা জানি, ${}^nC_r = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor r}$ এবং

$$ {}^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n - \overline{n-r}\ \lfloor n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r} $$

$$ \therefore\ {}^nC_r = {}^nC_{n-r}. $$

মন্তব্য : যদি ${}^nC_p = {}^nC_q$ হয়, তাহা হইলে $p = q$ অথবা $p + q = n$ হইবে।

উদা. 9. প্রমাণ কর : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$.

$$ {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\ \lfloor r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r+1\ \lfloor r-1} $$

$$ = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r . r \lfloor r-1} + \frac{\lfloor n}{(n-r+1)\ \lfloor n-r\ \lfloor r-1} $$

$$ = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\ \lfloor r-1} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1} \right\} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\ \lfloor r-1} \left\{ \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} \right\} $$

$$ = \frac{\lfloor n . (n+1)}{(n-r+1) \lfloor n-r\ . r \lfloor r-1} = \frac{\lfloor n+1}{\lfloor n-r+1 . \lfloor r} $$

$$ = {}^{n+1}C_r. $$

$$ \therefore\ {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r. $$

8.14. $p$-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকিবে এই শর্তে $n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে $r$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু একযোগে লইয়া সাজাইয়া সমবায়ের সংখ্যা ${}^{n-p}C_{r-p}$ হইবে।

অর্থাৎ ${}^{n-p}C_{r-p} = \dfrac{\lfloor n-p}{\lfloor n-p-r+p\ \lfloor r-p}$

$$ = \frac{\lfloor n-p}{\lfloor n-r\ \lfloor r-p} \text{ হইবে।} $$

**8.15.** $p$-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনও থাকিবে না এই শর্তে $n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে $r$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু লইয়া একযোগে সাজাইলে সমবায়ের সংখ্যা $^{n-p}C_r = \frac{\lfloor n-p}{\lfloor n-p+r \lfloor r}$ হইবে।

$n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু লইয়া সাজাইলে সমবায়ের সংখ্যা হইবে $^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n - 1$.

8.16. $(p+q+r+\ldots\ldots)$-সংখ্যক বস্তুর $p$-সংখ্যক বস্তু একজাতীয় অভিন্ন, $q$-সংখ্যক বস্তু একজাতীয় অভিন্ন, $r$-সংখ্যক বস্তু একজাতীয় অভিন্ন ইত্যাদি।

এই $(p+q+r\ldots)$ বস্তুগুলিকে যতগুলি সম্ভব একযোগে লইয়া সাজাইলে সমবায়ের সংখ্যা হইবে $[\{(p+1)\times(q+1)\times(r+1)\ldots\}-1]$.

**8.17. বিভিন্ন দলে বিভক্ত করা** *Division into groups* **)** :

যদি $(m+n)$ বস্তুকে $(m \neq n)$ দুইভাগে বিভিন্ন উপায়ে এমনভাবে ভাগ করা হয় যে একভাগে $m$ এবং আর একভাগে $n$ হয়, তাহা হইলে সমবায়ের সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$.

যদি $m=n$ হয়, তাহা হইলে $2m$ বস্তুকে সমান দুইটি দলে বিভক্ত করিলে সমবায়ের সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 2m}{\lfloor 2(\lfloor m)^2}$.

কিন্তু দুই ব্যক্তির মধ্যে $2m$-সংখ্যক বস্তু সমান ভাবে ভাগ করিয়া দিলে সমবায়ের সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 2m}{\lfloor m \lfloor m}$.

$(m+n+p)$ বস্তুকে $(m \neq n \neq p)$ যে বিভিন্ন উপায়ে তিনটি ভাগে ভাগ করা যায় যাহার ভাগগুলিতে যদি যথাক্রমে $m, n, p$ বস্তু থাকে, তাহা হইলে সমবায়ের সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p}$.

যদি $m=n=p$ হয় সেক্ষেত্রে সমবায়ের সংখ্যা হয় $\frac{\lfloor 3m}{\lfloor 3 \times (\lfloor m)^3}$.

3 জনের মধ্যে $3m$ বস্তুকে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলে মোট সমবায়ের সংখ্যা হয় $\frac{\lfloor 3m}{\lfloor m \lfloor m \lfloor m}$.

উদা. 10. যদি ${}^{20}C_r={}^{20}C_{r+4}$ হয়, ${}^rC_6$-এর মান কত ?

$\because \quad {}^{20}C_r={}^{20}C_{r+4}$

$\therefore \quad r+4+r=20 \quad (\because {}^nC_p={}^nC_q$ হইলে $p+q=n$ হয় )

$\therefore \quad r=8$

$$\therefore \quad {}^rC_6={}^8C_6=\frac{\lfloor 8}{\lfloor 8-6 \lfloor 6}=\frac{8\times7\times\lfloor 6}{2\times1\times\lfloor 6}=28.$$

উদা. 11. 10 জন লোক হইতে 5 জনকে লইয়া কতগুলি committee গঠন করা যায় ?

10 জন লোক হইতে 5 জন লোককে লইয়া যতগুলি কমিটি নির্বাচন করা যায় তাহাদের সংখ্যা ${}^{10}C_5=\frac{\lfloor 10}{\lfloor 10-5 \lfloor 5}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times\lfloor 5}{5\times4\times3\times2\times1\times\lfloor 5}$

$$=6\times6\times7=42\times6=252.$$

উদা. 12. 12 জন ছাত্রের একটি শ্রেণী হইতে 5 জনকে লইতে হইবে। (i) কত উপায়ে নির্বাচন হইবে নির্ণয় কর। (ii) কত উপায়ে নির্বাচন হইবে তাহা নির্ণয় কর যেখানে (a) অন্ততঃ একজন বালককে লইতে হইবে, (b) অন্ততঃ একজন বিশেষ বালককে বাদ দিতে হইবে।

(i) 12 জন বালক হইতে 5 জনকে লইয়া যে নির্বাচন হইবে তাহার সংখ্যা ${}^{12}C_5=\frac{\lfloor 12}{\lfloor 7 \lfloor 5}$

$$=12\times11\times6=792.$$

(ii) (a) যেহেতু একজন বিশেষ বালক সব সময় নির্বাচনের সময় থাকিবে, অতএব 11 জন হইতে 4 জনকে নির্বাচন করিতে হইবে।

এক্ষেত্রে নির্বাচনের সংখ্যা ${}^{11}C_4=\frac{\lfloor 11}{\lfloor 11-4 \lfloor 4}$

$$=\frac{11\times10\times9\times8\times\lfloor 7}{\lfloor 7\times4\times3\times2\times1}=330.$$

(ii) (b) যেহেতু একজন বিশেষ বালক নির্বাচন হইতে বাদ থাকিবে, অতএব 11 জন হইতে 5 জনকে লইয়া নির্বাচন করিতে হইবে।

এক্ষেত্রে নির্বাচনের সংখ্যা ${}^{11}C_5=\frac{\lfloor 11}{\lfloor 6 \lfloor 5}$

$$=\frac{11\times10\times9\times8\times7\times\lfloor 6}{\lfloor 6 \lfloor 5}=462.$$

উদা. 13. 6 জন পুরুষ ও 4 জন স্ত্রীলোকের মধ্য হইতে 5 জনকে লইয়া একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। কমিটিতে অন্ততঃ একজন স্ত্রীলোক অন্তর্ভুক্ত করিতে হইবে এইভাবে কত উপায়ে কমিটি গঠন করা যায় ?

সম্ভাব্য উপায়গুলি হইল :

| স্ত্রীলোক (4) | পুরুষ (6) | নির্বাচনের সংখ্যা |
|---|---|---|
| 1 | 4 | ${}^4C_1 \times {}^6C_4$ |
| 2 | 3 | ${}^4C_2 \times {}^6C_3$ |
| 3 | 2 | ${}^4C_3 \times {}^6C_2$ |
| 4 | 1 | ${}^4C_4 \times {}^6C_1$ |

$\therefore$ নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা $= {}^4C_1 \times {}^6C_4 + {}^4C_2 \times {}^6C_3$
$+ {}^4C_3 \times {}^6C_2 + {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 246.$

উদা. 14. 18 জন খেলোয়াড়কে মোট কত উপায়ে দুইটি দলে ভাগ করা যায় ?

যেহেতু দুইটি দলে সমান সংখ্যক খেলোয়াড় থাকিবে, অতএব নির্বাচনের সংখ্যা $\frac{1}{2} \times {}^{18}C_9$ বা $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lfloor 18}{\lfloor 9 \lfloor 9}$.

উদা. 15. 10টি বাহুবিশিষ্ট কোন বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিলে কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায় ? ঐ বহুভুজের কর্ণের সংখ্যা কত হইবে ?

বহুভুজের 10টি বাহু থাকায় কৌণিক বিন্দুও 10টি আছে। 10টি বিন্দুর মধ্যে যে-কোন তিনটি বিন্দু যোগ করিলে এক একটি ত্রিভুজ হইবে। 10টি বিন্দু হইতে 3টি বিন্দু লইয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় ততগুলি ত্রিভুজ হইবে।

$$\therefore \text{ ত্রিভুজের সংখ্যা} = {}^{10}C_3 = \frac{\lfloor 10}{\lfloor 3 \lfloor 7} = 120.$$

ঐ বিন্দুগুলির যে-কোন 2টি বিন্দু যোগ করিলে এক একটি সরলরেখা হয়।

$\therefore$ মোট সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{10}C_2 = 45.$

এই 45টি সরলরেখার মধ্যে 10টি বহুভুজের বাহু আছে। এইগুলি কর্ণ হইতে পারে না।

$\therefore$ কর্ণের সংখ্যা $= 45 - 10 = 35.$

## প্রশ্নমালা 8 (A)

1. মান নির্ণয় কর :

(i) ${}^{6}P_2$ (ii) ${}^{8}P_4$ (iii) ${}^{10}P_3$.

2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{\lfloor 6 \, \lfloor 2}{\lfloor 3 \, \lfloor 4}$ (ii) $\dfrac{{}^{10}P_3}{\lfloor 7}$ (iii) $\dfrac{\lfloor n \, \lfloor 2n}{(\lfloor n-1)^2}$.

3. (i) যদি ${}^{(n+1)}P_3 = 10 \times {}^{(n-1)}P_2$ হয়, $n$-এর মান নির্ণয় কর। (ii) যদি ${}^{(m+n)}P_2 = 90$, ${}^{m-n}P_2 = 30$ হয়, $m$ ও $n$-এর মান নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর ${}^{n}P_{n-1} = {}^{n}P_n$.

5. যদি $\dfrac{{}^{2r+1}P_{r-1}}{{}^{2r-1}P_r} = \dfrac{3}{5}$ হয়, $r$-এর মান নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর $\lfloor 2n = 2^n \lfloor n . 1.3.5.7 \cdots\cdots (2n-1)$.

7. প্রমাণ কর ${}^{(n+1)}P_r = (n+1) . {}^{n}P_{r-1}$.

8. 2, 3, 4, 9, 7 অক্ষরগুলির সাহায্যে (i) দুই অঙ্কবিশিষ্ট, (ii) 4 অঙ্ক-বিশিষ্ট, (iii) সব অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

9. 0, 1, 2, 3, 4, 5 এই সংখ্যাগুলি দ্বারা 6 অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি বিজোড় সংখ্যা গঠিত হইতে পারে ? এই সংখ্যাগুলির কোন একটিতেও উপরের কোন সংখ্যা একবারের বেশী ব্যবহার করা যাইবে না।

10. 100 ও 1000-এর মধ্যে অবস্থিত বিভিন্ন অঙ্কবিশিষ্ট 1, 3, 5, 7, 9 এই অঙ্কগুলি দ্বারা কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ? এই সংখ্যাগুলির কোন একটিতেও উপরের কোন একটি সংখ্যা একবারের বেশী ব্যবহার করা যাইবে না।

11. একটি রেলপথে 40টি station আছে। প্রতিটি শ্রেণীর জন্য মোট কতগুলি একমুখী টিকিটের প্রয়োজন হইবে ?

12. 'Hyperbola' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে 3টি Consonant ও 2টি Vowel লইয়া সাজাইলে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ?

13. Vowel-গুলি সর্বদাই পাশাপাশি থাকিবে এই শর্তে (i) Failure, (ii) daughter শব্দগুলির অক্ষরগুলি দ্বারা মোট কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ?

14. 'Sunday' শব্দটির অক্ষরগুলি কতভাবে সাজানো যায়? ইহাদের মধ্যে কয়টির প্রথম অক্ষর S হইবে? ইহাদের মধ্যে কয়টির প্রথম অক্ষর S হইবে না? কয়টির প্রথম অক্ষর S দিয়া আরম্ভ হইবে কিন্তু Y দ্বারা শেষ হইবে না।

15. সব অক্ষরগুলিকে একসঙ্গে লইয়া নিম্নের শব্দগুলির অক্ষরগুলিকে মোট কত উপায়ে বিন্যাস করা যায়?

(*i*) Calcutta, (*ii*) Commerce, (*iii*) America, (*iv*) Atlantic, (*v*) Constantinople. (*vi*) Mississippi.

16. যাহাতে best ও worst paper দুইটি কখনই পাশাপাশি থাকিবে না, এই শর্তে 15টি পরীক্ষার খাতা মোট কত প্রকারে সাজানো যায়?

17. যাহাতে best ও worst paper দুইটি কখনই পাশাপাশি থাকিবে না এই শর্তে $n$-সংখ্যক খাতা মোট কত উপায়ে সাজানো যায়?

18. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? কোন সংখ্যায় কোন অঙ্ক একবারের বেশী লওয়া চলিবে না।

19. 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির কোন দিকেই একই সংখ্যায় একের বেশী বার ব্যবহার না করিয়া 300 অপেক্ষা বড় কতগুলি জোড় সংখ্যা নির্ণয় করা যায়?

20. 'Triangle' শব্দটির অক্ষরগুলি সাজাইলে কতভাবে বিন্যাস করা যাইবে? উহাদের মধ্যে T দিয়া আরম্ভ এবং E দিয়া শেষ এইরূপ কতগুলি বিন্যাস হইবে?

21. যে-কোন দুইটি বালক কখনই পাশাপাশি থাকিবে না, এই শর্তে 3টি বালক ও 4টি বালিকা এক সারিতে কতভাবে সাজানো যায়?

22. Veledictory শব্দটির অক্ষরগুলির Vowel-গুলি কখনই একসাথে থাকিবে না, এই শর্তে শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত উপায়ে সাজানো যায়?

23. 'Contact' শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া সাজাইলে কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যায়?

24. কোন লাইব্রেরী তে একটি পুস্তকের 4 কপি, দুইটি পুস্তকের প্রতিটির 3 কপি, 3টি পুস্তকের প্রতিটির 5 কপি এবং 8টি পুস্তকের প্রতিটির এক কপি করিয়া আছে। কত উপায়ে পুস্তকগুলি সাজানো যায়?

25. 5 জন বালক ও 3 জন বালিকাকে লইয়া কত প্রকারে বিন্যাস করা যাইতে পারে যাহাতে কখনও দুইটি বালিকা পাশাপাশি থাকিবে না।

26. যদি প্রতি প্রার্থীর 5 জনের সবগুলি ভোট পাইবার অধিকার থাকে তবে কোন ব্যক্তি 5 জন প্রার্থীকে মোট কত প্রকারে ভোট দিবে ?

27. বিভিন্ন আকৃতির 7টি মিষ্টি 7 জন বিভিন্ন বয়সের বালকের মধ্যে কি প্রকারে বিতরণ করা যায় যাহাতে প্রতি ক্ষেত্রেই সবচেয়ে বড় মিষ্টিটি সবচেয়ে কম বয়সের বালকটি পায়।

28. 30 জন বালক মোট কত উপায়ে একটি বৃত্তাকারে দাঁড়াইতে পারে ?

29. একটি গোল টেবিলের চারিদিকে 5 জন বালক কত উপায়ে বসিতে পারে ?

30. 7টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তা দিয়া কতরকম ভাবে মালা গাঁথা যায় ?

## প্রশ্নমালা 8 (B)

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $^{3}C_{2}$ (ii) $^{32}C_{29}$ (iii) $^{102}C_{101}$

2. প্রমাণ কর :

(i) $r.{}^{n}C_{r}=n.{}^{n-1}C_{r-1}$

(ii) $^{n}C_{r+1}=\frac{n-1}{r+1}{}^{n}C_{r}$ $(n>r\geqslant 0)$

3. যদি $^{n}C_{11}=21\,{}^{(\frac{n}{2})}C_{3}$ হয়, $n$-এর মান নির্ণয় কর।

4. যদি $^{n+2}C_{4}=6\,{}^{n}C_{2}$ হয়, $n$-এর মান কত ?

5. (i) যদি $^{2m}C_{n}={}^{2n}C_{n+2}$ হয়, $n$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) যদি $\frac{^{n}P_{4}}{^{2n}C_{3}}=\frac{22}{3}$ হয়, $n$-এর মান কত ?

6. প্রমাণ কর :

(i) $^{n}C_{r}+{}^{n-1}C_{r-1}+{}^{n-1}C_{r-2}={}^{n+1}C_{r}$

(ii) $^{n}C_{r}+{}^{n-1}C_{r}+{}^{n-2}C_{r}+\cdots\cdots+{}^{r}C_{r}={}^{n+1}C_{r+1}$

(iii) $\frac{^{2n}C_{2r}}{^{n}C_{r}}=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots\cdots(2n-2r+1)}{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}$

7. কোন চাকরিতে 12 জন প্রার্থী ছিল ; তাহাদের মধ্যে কত উপায়ে 4 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করা যায় ?

8. 15 জন বালক 7 জন বালিকা হইতে 4 জন বালক 2 জন বালিকাকে লইয়া কতগুলি কমিটি গঠন করা যায় ?

9. P. U. পরীক্ষায় গণিতের প্রশ্নপত্রে 11টি প্রশ্ন দেওয়া হইল। কত বিভিন্ন উপায়ে 6টি প্রশ্নের উত্তর দেওয়া যায় ? যদি 11 নং প্রশ্নটি আবশ্যিক হিসাবে থাকে, তাহা হইলে মোট 6টি প্রশ্ন কত উপায়ে নির্বাচন করা যায় ?

10. 6 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলার মধ্য হইতে 5 জনকে লইয়া একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। প্রতি কমিটিতে কমপক্ষে একজন মহিলা থাকিবে, এই শর্তে কয়টি কমিটি গঠন করা যায় ?

11. 7 জন বালক 4 জন বালিকা হইতে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। যদি (*i*) কমিটিতে 2 জন বালিকা, (*ii*) অন্ততঃপক্ষে 2 জন বালিকা থাকে, তবে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যায় ?

12. 32 জনের একটি দল হইতে 5 জনকে লইয়া নির্বাচন করিতে হইবে। কত উপায়ে ইহা নির্বাচন করা যায় ? যদি একজনকে (*i*) সব সময় লওয়া হয় এবং (*ii*) কোন সময়ই লওয়া হয় না, এই শর্তে কত উপায়ে নির্বাচন করা যায় ?

13. 15 জন বালকের একটি দলে 7 জন boy-scout আছে। যাহাতে (*i*) ঠিক 6 জন boy-scout, (*ii*) অন্ততঃ 6 জন boy-scout থাকিবে এই শর্তে 12 জন বালককে কত উপায়ে নির্বাচন করা যায় ?

14. কোন শ্রেণীতে 60 জন বালক আছে। নিজেদের মধ্যে কত উপায়ে 3 জন প্রতিনিধি পাঠাইতে পারে যদি কোন একজন নির্দিষ্ট বালক এই 3 জনের মধ্যে হয়, তাহা হইলে কত উপায়ে নির্বাচন করা যায় ?

15. 20 জন খেলোয়াড়কে কত উপায়ে দুইটি সমান দলে নির্বাচন করা যায় ?

16. কত উপায়ে 20টি মিষ্টি 5 জন বালকের মধ্যে সমান ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইবে ?

17. 7 জন ভারতীয় ও 4 জন বিদেশী সভ্য হইতে 6 জন সদস্য করিয়া Executive Committee গঠন করিতে হইবে যদি (*i*) কমিটিতে অন্ততঃ 2 জন বিদেশী সভ্য থাকে, (*ii*) কমিটিতে ঠিক 2 জনই বিদেশী সভ্য থাকে।

18. কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়, এবই সমতলে অবস্থিত ; এইরূপ 12টি বিন্দুকে যোগ করিলে মোট কয়টি বিভিন্ন সরলরেখা টানা যায় ? যদি উহাদের মধ্যে 4টি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়, তাহা হইলে মোট কয়টি সরলরেখা টানা যায় ?

19. 12টি সরলরেখাকে লইয়া মোট কতগুলি ত্রিভুজ আঁকা যায় যদি কোন দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল না হয় ?

20. যদি ${}^nP_r = 336$, ${}^rC_r = 56$ হয়, $n$ ও $r$-এর মান নির্ণয় কর।

21. $n$-বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের কতগুলি কর্ণ অঙ্কন করা যাইবে ?

# নবম অধ্যায়

## দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)

### 9.1. দ্বিপদ রাশি ( *Binomial Expression* ) ঃ

যে বীজগণিতীয় রাশিতে দুইটি মাত্র পদ থাকে তাহাকে দ্বিপদ রাশি বলে। যেমন, $x+4y$, $x+a$, $x-a$, $3a+4b$ প্রভৃতি রাশিগুলির প্রত্যেকটি হইল দ্বিপদ রাশি।

**দ্বিপদ উপপাদ্য ঃ**

যদি কোন দ্বিপদ রাশির যে-কোন ঘাতকে (Power) কোন বীজগণিতীয় সাধারণ সূত্রের সাহায্যে এক শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায় তাহাকে দ্বিপদ উপপাদ্য বলে। অর্থাৎ যদি কোন দ্বিপদ রাশির যে-কোন ঘাতের বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায় তাহাকে দ্বিপদ উপপাদ্য বলে।

$n$ যেখানে অখণ্ড ধনসংখ্যা (Positive integer)
$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+{}^nC_rx^{n-r}a^2+$ ........$+a^n$কে ধনাত্মক অখণ্ড সূচক পক্ষে (for positive integral index) দ্বিপদ উপপাদ্য বলে।

এই উপপাদ্যটিকে Sir Issac Newton উদ্ভাবন করেন।

### 9.2. ধনাত্মক অখণ্ড সূচক পক্ষে দ্বিপদ উপপাদ্য ( *Binomial Theorem for a Positive Integral Index* ) ঃ

$n$ অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর

$$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\cdots$$
$$+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\cdots+a^n \quad \ldots (i)$$
$$=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^{n-r}a^r+\cdots+a^n \quad \ldots (ii)$$

**প্রমাণ ঃ** আমরা গুণ করিয়া পাই,

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2=x^2+{}^2C_1ax+{}^2C_2a^2,$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$
$$=x^3+{}^3C_1ax^2+{}^3C_2a^2x+{}^3C_3a^3.$$

অতএব দেখা যাইতেছে যে, $n=2$, $n=3$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। এখন ধরা যাক $n$-এর যে-কোন নির্দিষ্ট মানে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ মনে কর, $n=m$ এবং $(x+a)^m=x^m+{}^mC_1x^{m-1}a+{}^mC_2x^{m-2}a^2+\cdots$
$\cdots+{}^mC_rx^{m-r}a^r+\cdots+a^m$

এখন উভয় পক্ষকে $(x+a)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(x+a)^{m+1}=(x+a)\{x^m+{}^mC_1x^{m-1}a+{}^mC_2x^{m-2}a^2+\cdots$$
$$\cdots+{}^mC_rx^{m-1}a^r+\cdots+a^m\}$$
$$=x^{m+1}+({}^mC_1+1)x^ma+({}^mC_2+{}^mC_1)x^{m-1}a^2+\cdots$$
$$\cdots+({}^mC_r+{}^mC_{r-1})x^{m-r+1}a^2+\cdots+{}^mC_ma^{m+1}$$

আমরা জানি, ${}^mC_r+{}^mC_{r-1}={}^{m+1}C_r$

$r=1, 2, 3\cdots$ বসাইয়া পাই,

${}^mC_1+{}^mC_0={}^mC_1+1={}^{m+1}C_1$

${}^mC_2+{}^mC_1={}^{m+1}C_2$

${}^mC_3+{}^mC_2={}^{m+1}C_3$

..........................................

${}^mC_r+{}^mC_{r-1}={}^{m+1}C_r$

পুনরায় ${}^mC_m={}^{m+1}C_{m+1}$

$\therefore\ (x+a)^{m+1}=x^{m+1}+{}^{m+1}C_1x^ma+{}^{m+1}C_2x^{m-1}a^2+\cdots\cdots$
$\cdots\cdots+{}^{(m+1)}C_rx^{m-r+1}a^r+\cdots+{}^{m+1}C_{m+1}a^{m+1}$

অতএব দেখা গেল $n=m+1$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। আমরা আগে দেখিয়াছি যদি $n=2, 3$ হয়, তাহা হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইবে যদি $n=3+1$ বা 4 হয়।

$n=4+1$ বা 5 হইলেও উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইবে ইত্যাদি।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে $n$-এর যে-কোন অখণ্ড মানে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

**মন্তব্য :** যদি $n$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তাহা হইলে $(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_rx^r+\ldots+x^n$ হইবে।

**9.3. $(x-a)^n$ ও $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতি :**

যেহেতু $(x+a)^n$ এবং $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি দুইটি $a$ ও $x$-এর যে-কোন মানে সিদ্ধ হয়, অতএব প্রথম ক্ষেত্রে $a$-এর স্থানে $-a$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x$-এর স্থানে $-x$ বসাইলে আমরা পাই,

(1) $(x-a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}(-a)+{}^nC_2x^{n-2}(-a)^2+\cdots$
$\cdots+(-a)^n$

$$=x^n-{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2-\cdots\cdots+(-1)^na^n$$

(2) $(1-x)^n=(1)^n+{}^nC_1(-x)+{}^nC_2(-x)^2+\cdots+(-x)^n$
$=1-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-\cdots\cdots+(-1)^nx^n$

**মন্তব্য :** (1) ও (2)-তে $n$ জোড় সংখ্যা হইলে $(-a)^n=a^n$ এবং $(-x)^n=x^n$ হইবে এবং $n$ বিজোড় হইলে $(-a)^n=(-1)^n\ a^n$ এবং $(-x)^n=(-1)^nx^n$ হইবে।

অর্থাৎ $n$ জোড় বা বিজোড় হইলে $(-1)^n$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

**9.4. দ্বিপদ উপপাদ্যের কতকগুলি লক্ষণীয় বিষয়** ( *Some important featu*r*es of Binomial Theorem* ) :

$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\cdots+{}^nC_rx^{n-r}a^r$
$+\cdots\cdots+a^n$

$\therefore\ T_1=x^n,\ T_2={}^nC_1x^{n-1}a,\ T_3={}^nC_3x^{n-2}a^2,$
$T_4={}^nC_3x^{n-3}a^3\cdots\cdots T_{r+1}={}^nC_rx^{n-r}a^r$

$\therefore$ $(x+a)^n$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ হইল $(r+1)$-তম পদ
$T_{r+1}={}^nC_rx^{n-r}a^2.$
$(1+x)^n$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ হইল
$T_{r+1}={}^nC_rx^r$
$(1-x)^n$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ হইল
$T_{r+1}={}^nC_r(-x)^2=(-1)^2\ {}^nC_rx^r$
$(x-a)^n$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ হইল
$T_{r+1}={}^nC_rx^{n-1}(-a)^r=(-1)^r\ {}^nC_sx^{n-1}a^r.$



**9.5. সমদূরবর্তী পদসমূহ** ( *Equidistant terms* ) :

শ্রেণীর প্রথম দিক ও শেষ দিক হইতে যে দুইটি পদ সমান দূরে অবস্থিত সেই দুইটি পদকে সমদূরবর্তী পদ বলে।

আমরা জানি ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$
$r=1, 2, 3\cdots\cdots$ বসাইয়া পাই,
${}^nC_1={}^nC_{n-1}$
${}^nC_2={}^nC_{n-2}$
${}^nC_3={}^nC_{n-3}$ ইত্যাদি।

${}^nC_1$ হইল প্রথম দিক হইতে দ্বিতীয় পদের সহগ এবং ${}^nC_{n-1}$ হইল শেষ দিক হইতে তৃতীয় পদের সহগ এবং উহারা পরস্পর সমান। আবার ${}^nC_2$

প্রথম দিক হইতে তৃতীয় পদের সহগ এবং $^nC_{n-2}$ হইল শেষ দিক হইতে তৃতীয় পদের সহগ এবং উহারা পরস্পর সমান।

$\therefore$ প্রথম দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ = শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ। অতএব যে-কোন দুই সমদূরবর্তী পদের সহগদ্বয় সমান।

## 9.6. বিস্তৃতির মধ্যপদ ( *Middle Term* ) নির্ণয় ঃ

আমরা দেখিয়াছি যে, দ্বিপদরাশির কোন ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা ঐই ঘাতের সূচকসংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী হয়।

**যখন $n$ জোড় সংখ্যা হয়** (মনে কর $n=2m$) তখন বিস্তৃতির পদসংখ্যা হয় $2m+1$ যাহা বিজোড় সংখ্যা। তখন মধ্যপদ হয় একটি অর্থাৎ $(\frac{n}{2}+1)$-তম পদ বা $(\frac{2m}{2}+1)$-তম পদ বা $(m+1)$-তম পদ।

আবার $n$ যখন বিজোড় সংখ্যা (মনে কর $n=2m+1$) হয় তখন বিস্তৃতির পদসংখ্যা হয় $(2m+2)$ যাহা একটি বিজোড় সংখ্যা। এক্ষেত্রে তখন দুইটি মধ্যপদ হয়। $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-তম পদ এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদ বা, $\left(\frac{2m+1+1}{2}\right)$-তম পদ ও $\left(\frac{2m+1+1}{2}+1\right)$-তম পদ বা $(m+1)$-তম পদ ও $(m+2)$-তম পদ দুইটি মধ্যপদ হয়।

**$(1+x)^n$ বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় ঃ**

$n$ জোড় সংখ্যা হইলে $(\frac{n}{2}+1)$-তম পদ হইবে মধ্যপদ।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $^nC_{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}$

$n$ বিজোড় সংখ্যা হইলে $\frac{n+1}{2}$-তম পদ এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদ দুইটি মধ্যপদ হইবে।

মনে কর, $n=2m+1$ বা, $m=\frac{n-1}{2}$

$\therefore$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)$ বা $(2m+2)$

অতএব $(m+1)$ এবং $(m+2)$-তম পদ দুইটি মধ্যপদ।

অর্থাৎ, $(\frac{n-1}{2}+1)$-তম পদ ও $(\frac{n+1}{2}+1)$-তম পদ হইবে মধ্যপদ।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $^nC_{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}}$.

মনে কর $(1+x)^6$ বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় করিতে হইবে। এই বিস্তৃতির পদসংখ্যা 7। অতএব $(\frac{6}{2}+1)$ বা 4-তম পদ হইবে মধ্যপদ।

আবার $(1+x)^7$ বিস্তৃতি হইলে মধ্যপদ দুইটি হইবে এবং উহারা হইল $(\frac{7-1}{2}+1)$-তম পদ ও $(\frac{7+1}{2}+1)$-তম পদ বা 4-তম পদ ও 5-তম পদ মধ্যপদ।

**9.7. দ্বিপদ সহগের ধর্ম** ( *Properties of Binomial Coefficients* ) :

$^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2 \cdots {}^nC_n$ দ্বিপদ সহগগুলিকে অনেক সময় সংক্ষেপে $C_0, C_1, C_2 \cdots C_n$ লেখা হয়।

এখন, $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots + {}^nC_rx^r + \cdots + {}^nC_nx^n$

$$= C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_rx^r + \ldots + C_nx^n \quad \text{(A)}$$

( যেহেতু $C_0 = {}^nC_0 = 1$ )

(1) প্রমাণ কর দ্বিপদ বিস্তৃতির সহগগুলির সমষ্টি $= 2^n$.

এখন (A) তে $x=1$ বসাও।

$\therefore \quad 2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

$=$ সহগগুলির সমষ্টি ··· (B)

$\therefore$ প্রমাণিত হইল সহগগুলির সমষ্টি $= 2^n$.

**মন্তব্য :** এখন B-তে $C_0 = 1$ বসাও।

$\therefore \quad 2^n = 1 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

$\therefore \quad 2^n - 1 = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.

(2) প্রমাণ কর বিজোড়স্থানীয় পদের সহগগুলির যোগফল = জোড়স্থানীয় পদের সহগগুলির যোগফল এবং বিজোড়-স্থানীয় পদের সহগগুলির যোগফল = জোড়-স্থানীয় পদের সহগগুলির যোগফল $= 2^{n-1}$.

এখন, (A)-তে $x = -1$ বসাও।

$\therefore \quad (1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 + C_6 - \ldots$

বা, $0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 + C_6 - \cdots$

$\therefore \quad C_1 + C_3 + C_5 + \cdots = C_0 + C_2 + C_4 + \ldots \quad$ (C)

মনে কর, (C)-এর বামপক্ষ $= x$, ডানপক্ষ $= y$

$\therefore \quad x + y =$ সমস্ত দ্বিপদ সহগগুলির যোগফল $= 2^n$

[ (B) এর সাহায্যে ]

আবার যেহেতু, $x=y$ $\therefore\ 2x=2^n$

$$\therefore\ x=2^{n-1}$$

$$\therefore\ C_1+C_3+C_5+\cdots=C_0+C_2+C_4+\cdots=2^{n-1}.$$

**98. বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ নির্ণয়** ( *Greatest Co-efficient* ) :

$(x+a)^n$ ও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদের সহগ উভয়-ক্ষেত্রে $^nC_r$.

$n$ জোড় হইলে $^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{n}{2}$ হয়।

$n$ বিজোড় হইলে $^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{n-1}{2}$ বা $\frac{n+1}{2}$ হয়।

$\therefore$ $n$ জোড়সংখ্যা হইলে $(\frac{n}{2}+1)$-তম পদ অর্থাৎ মধ্যপদের সহগ হইবে বৃহত্তম। এবং $n$ বিজোড় সংখ্যা হইলে $(\frac{n-1}{2}+1)$-তম বা, $(\frac{n+1}{2}+1)$-তম পদের সহগ অর্থাৎ দুইটি বৃহত্তম সহগ হইবে।

অর্থাৎ, $^nC_{\frac{n-1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n+1}{2}}$ হইবে বৃহত্তম এবং $^nC_{\frac{n-1}{2}}={}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ হইবে।

উদা. 1. $(a+3b)^5$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$(a+3b)^5=a^5+{}^5C_1a^{5-1}(3b)+{}^5C_2a^{5-2}(3b)^2$$
$$+{}^5C_3a^{5-3}(3b)^3+{}^5C_4a^{5-4}(3b)^4+{}^5C_5(3b)^5$$
$$=a^5+5.3a^4b+10.9a^3b^2+10.27a^2b^3+5.81ab^4+243b^5$$
$$=a^5+15a^4b+90a^3b^2+270a^2b^3+405ab^4+243b^5.$$

উদা. 2. $(x-5y)^9$ বিস্তৃতির 7-তম পদ নির্ণয় কর।

মনে কর, $(r+1)$-তম পদ 7-তম পদ

$$\therefore\ r+1=7 \quad \therefore\ r=6$$

এখন $(r+1)$-তম পদ $={}^nC_rx^{n-r}a^r$

$$\therefore\ 7\text{-তম পদ}={}^9C_6x^{9-6}(-5y)^6$$
$$=\frac{\lfloor 9}{\lfloor 6\,\lfloor 3}x^3(125\times125)y^6$$
$$=84\times125\times125x^3y^6$$
$$=1312500x^3y^6.$$

উদা 3. $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^8$ বিস্তৃতির $x^9$-এর সহগ নির্ণয় কর।

মনে কর, $(r+1)$-তম পদে $x^9$ আছে

$$t_{r+1} = {}^8C_r(x^3)^{8-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$$
$$= {}^8C\ (-1)^r x^{24-3r-2r}$$
$$= (-1)^r\ {}^8C_r x^{24-5r}$$

যেহেতু $t_{r+1}$ পদে $x^9$ আছে

$$\therefore\quad x^{24-5r} = x^9$$
$$24 - 5r = 9$$
$$\therefore\quad r = 3$$

$\therefore$ $(r+1)$-তম পদে অর্থাৎ $(3+1)$-তম পদে $x^9$ আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^8C_3(-1)^3 = -56.$

উদা. 4. $\left(x^5 - \frac{1}{x^2}\right)^{14}$ বিস্তৃতির $x$-বর্জিত পদ নির্ণয় কর।

মনে কর, $(r+1)$-তম পদ হইল $x$-বর্জিত পদ

$$\therefore\quad t_{r+1} = {}^{14}C_r(x^5)^{14-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$$
$$= (-1)^r\ {}^{14}C_r\ x^{70-5r-2r}$$
$$= (-1)^r\ {}^{14}C_r\ x^{70-7r}$$

যেহেতু এই পদটি $x$-বর্জিত পদ হইবে

$\therefore$ $70 - 7r = 0$ বা, $r = 10$

$\therefore$ $(10+1)$-তম পদটি হইবে $x$-বর্জিত পদ

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $= (-1)^{10}\ {}^{14}C_{10}$

$$= \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4.3.2.1} = 1001.$$

উদা. 5. $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{11}$ বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

এখানে $x$ যেহেতু বিজোড় সংখ্যা

$\therefore$ $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{11}$ বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটি হইবে।

অর্থাৎ $\frac{11+1}{2}$-তম পদ ও $\frac{11+1}{2}+1$-তম পদ অর্থাৎ 6-তম পদ ও 7-তম পদ মধ্যপদ হইবে।

প্রথম মধ্যপদ $= t_{5+1} = {}^{11}C_5(x)^{11-5}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^5$

$$= \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}\left(-1\right)^5\frac{x^6}{x^{10}} = -462\frac{1}{x^4}$$

দ্বিতীয় মধ্যপদ $= t_{6+1} = {}^{11}C_6(x)^{11-6}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^6$

$$= 462.\frac{1}{x^7}.$$

**উদা. 6.** যদি $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$ হয়, প্রমাণ কর, $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_n^2$

$$= \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}.$$

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n \quad \cdots \quad (i)$$
$$(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_n \quad \cdots \quad (ii)$$

$(i)$ ও $(ii)$ গুণ করিয়া পাই,

$$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_n)$$

ইহা একটি অভেদ।

$\therefore$ বাম পক্ষের $x^n$-এর সহগ ডান পক্ষের $x^n$-এর সহগের সমান।

$\therefore$ বাম পক্ষের $x^n$-এর সহগ $= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$

ডান পক্ষের $x^n$-এর সহগ $= C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2$

$$\therefore \quad C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}.$$

**উদা. 7.** যদি $C_0, C_1, C_2 \ldots C_n$, $(1+x)^n$ বিস্তৃতির দ্বিপদ সহগ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর, $C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + \cdots + n.C_n = n.2^{n-1}$

$$C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$$
$$= n + \frac{2n(n-1)}{2!} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots\cdots$$
$$= n[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2} + \ldots]$$

মনে কর, $n-1=N$

$$=n\left[1+N+\frac{N(N-1)}{2!}+\cdots\right]$$

$$=n[{}^{N}C_0+{}^{N}C_1+{}^{N}C_2+\cdots]$$

$$=n.2^{N}\quad(\because\ {}^{n}C_0+{}^{n}C_1+{}^{n}C_2+\cdots=2^{n})$$

$$=n.2^{n-1}.$$

**উদা. 8.** প্রমাণ কর :

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\text{বামপক্ষ}=\left[1+\frac{n}{2!}+\frac{n(n-1)}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{4!}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\cdots\right\}$$

($n+1=N$ ধর)

$$=\frac{1}{n+1}\left\{N+\frac{N(N-1)}{2!}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{{}^{N}C_1+{}^{N}C_2+{}^{N}C_3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}(2^{N}-1)\quad\left[\begin{array}{l}\because\ {}^{N}C_0+{}^{N}C_1+{}^{N}C_2+\cdots=2^{N}\\ \text{বা } 1+{}^{N}C_1+{}^{N}C_2+\cdots=2^{N}\\ \therefore\ {}^{N}C_1+{}^{N}C_2+\cdots=2^{N}-1\end{array}\right]$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

## প্রশ্নমালা 9

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

(i) $(x+a)^5$ (ii) $(x-y)^4$ (iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$ (iv) $(2a+3b)^5$

(v) $(1+x)^5+(1-x)^5$ (vi) $\left(1+\frac{3x}{2}\right)^7$ (vii) $\left(3y-\frac{2}{y}\right)^6$

(viii) $\left(x^{\frac{2}{5}}-\frac{3}{y^2}\right)^5$ (ix) $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^4$

2. $(2+\frac{x}{4})^{17}$ বিস্তৃতির 9-তম পদ নির্ণয় কর।

3. $(x+\frac{1}{x})^{10}$ বিস্তৃতির 6-তম পদ নির্ণয় কর।

4. $(b+\frac{1}{b})^{2n}$ বিস্তৃতির $n$-তম পদ নির্ণয় কর।

5. $(5-3x)^7$ বিস্তৃতির যে পদে $x^4$ আছে সেই পদ নির্ণয় কর।

6. (i) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(ii) দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(\cdot 999)^3$ এর 6 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

7. নিম্নলিখিত রাশিগুলির সাধারণ পদ নির্ণয় কর :

(i) $\left(3+\frac{9}{x}\right)^{12}$ (ii) $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^{8}$ (iii) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{10}$

(iv) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{9}$ (v) $(6x^2-y)^9$

8. দেখাও যে $(1+x)^{2n}$ বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.\ 3.\ 5\cdots(2n-1)}{\lfloor n}2^n.x^n$.

9. (i) দেখাও $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.\ 3.\ 5\cdots(2n-1)}{\lfloor n}(-2)^n$.

(ii) $(x-2y)^8$ বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

10. $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ বিস্তৃতির $x^{18}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

11. $(1-2x^3+3x^5)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$ বিস্তৃতির $x$-এর সহগ নির্ণয় কর।

12. $(x-x^2)^{10}$ বিস্তৃতির $x^{15}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

13. (i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{m}$ বিস্তৃতির $x^r$-এর সহগ নির্ণয় কর।

(ii) $(x-2y)^{13}$ বিস্তৃতির $x^{10}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

(iii) $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^{5}$ বিস্তৃতির $y$-এর সহগ নির্ণয় কর।

(iv) $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ বিস্তৃতির $x^{32}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

(v) $\left(2x-3x^2\right)^{10}$ বিস্তৃতির $x^{13}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

14. দেখাও যে, $(1+x)^{2n}$ বিস্তৃতির $x^n$-এর সহগ $(1+x)^{2n-1}$ বিস্তৃতির $x^n$-এর সহগের দ্বিগুণ।

15. যদি $\left(9x^2 - \frac{1}{3x}\right)^{12}$ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $x$-বর্জিত পদ হয়, তাহা হইলে $r$-এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ পদের মান নির্ণয় কর।

16. নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলির $x$-বর্জিত পদ নির্ণয় কর :

(i) $\left(3x^2 + \frac{1}{6x^3}\right)^{15}$ (ii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ (iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$

(iv) $\left(\frac{a}{x}+bx\right)^{20}$ (v) $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$

(vi) $(1+x)^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$

17. দেখাও যে $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ বিস্তৃতির $x^m$-এর সহগ $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n+m}{2} \lfloor \frac{n-m}{2}}$.

18. $(1+x)^{m+n}$ বিস্তৃতির ($m, n$ ধনাত্মক রাশি) $x^m$ ও $x^n$-এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

19. দেখাও যে $(1+x)^{2m}$ বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগ, $(1+x)^{2m-1}$ বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদের সহগের যোগফলের সমান।

20. যদি $(x+b)^n$ বিস্তৃতির তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম পদের মানগুলি যথাক্রমে 84, 280, 560 হয়, তাহা হইলে $x$, $b$ ও $n$-এর মান নির্ণয় কর।

21. $(x+A)^n$ বিস্তৃতির যদি তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম পদ যথাক্রমে $p, q, r, s$ হয়, ( যেখানে $n$ অখণ্ড ধনসংখ্যা ) তাহা হইলে দেখাও যে,

$$\frac{q^2 - pr}{r^2 - qs} = \frac{5p}{3r}.$$

22. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(\cdot 999)^3$-এর বিস্তৃতির 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

23. যদি $C_0, C_1, C_2 \ldots\ldots$ গুলি $(1+x)^n$ বিস্তৃতির দ্বিপদ সহগ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $C_0 - 2C_1 + 3C_2 + \ldots\ldots (-1)^n (n+1)C_n = 0.$

(ii) $C_0 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$

(iii) $\frac{C_0}{1} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \ldots\ldots = \frac{2^n}{n+1}.$

(iv) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \ldots\ldots + (-1)^n C_n^2 = 0.$

(v) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots\ldots + C_{n-1}C_n = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1 \lfloor n+1}$

(vi) $C_0C_2 + C_1C_3 + \cdots\cdots + C_{n-2}C_n = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n-2 \lfloor n+2}.$

(vii) $C_1 - 2.\ C_2 + 3.\ C_3 - \cdots\cdots = 0$

(viii) $\dfrac{C_1}{C_0} + 2.\dfrac{C_2}{C_1} + 3\ \dfrac{C_3}{C_2} + \ldots + \dfrac{n\ C_n}{C_{n-1}} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ix) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \ldots. + C_nC_0 = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$

24. যদি $n$ বিজোড় সংখ্যা হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{\lfloor 1 \lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor 3 \lfloor n-3} + \frac{1}{\lfloor 5 \lfloor n-5} + \cdots + \frac{1}{\lfloor n-1 \lfloor 1} = \frac{2^{n-1}}{\lfloor n}.$$

25. যদি $(1+n)^n$ বিস্তৃতির পর পর চারিটি পদের সহগগুলি যথাক্রমে $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

26. যদি $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{2n}x^{2n}$ হয় তাহা হইলে দেখাও যে

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 3^n$

(ii) $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2n} = 1$

27. দেখাও যে $(C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n)^2$

$$= {}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_2 + \cdots + {}^{2n}C_{2n}$$

## দশম অধ্যায়

# ভগ্নাংশ বা ধনাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য

# (Binomial Theorem for Fractional or Negative Index)

10.1. আমরা জানি, $n$ যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তাহা হইলে

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+..+\frac{n(n-1)(n-2)..(n-r+1)}{\lfloor r}.x^r + \cdots\cdots + x^n \quad \cdots \quad (1)$$

এই বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম ( সাধারণ পদ ) পদের সহগ

$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} \quad \cdots \quad (2)$$

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $(n+1)$। এক্ষেত্রে শ্রেণীটি সসীম ( finite )। ইহার কারণ হইল সাধারণ পদে $r$-এর মান যদি $(n+1)$ হয় ( অর্থাৎ $r=n+1$ ) সাধারণ পদে এই সহগটি ( নং 2 ) শূন্য হইবে অর্থাৎ শ্রেণীটি আপনা হইতে বন্ধ হইয়া যাইবে। অতএব বিস্তৃতিতে $x$-এর সূচক $n$ অপেক্ষা বড় হইলে ইহার সহগ শূন্য হয় বলিয়া $x^n$-এর পর বিস্তৃতি শেষ হইবে। এখানে $r=n+1$ হওয়ার ফলে শ্রেণী আপনা হইতেই বন্ধ হইয়া যায়। $n$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলেই ইহা সম্ভব। কারণ $r$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইবে। পদসংখ্যা কোন সময়ই ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইতে পারে না। অতএব $n$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে শ্রেণীটি সসীম এবং বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকিবে। $r$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলিয়া $n$ ধনাত্মক বা ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলে সাধারণ পদের সহগ (নং 2) শূন্য হইবে না। অতএব $x$-এর ঘাত যতই বড় হউক না কেন উহার সহগ কোন সময় শূন্য হইবে না এবং শ্রেণীটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে।

আমরা জানি,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+{}^nC_3x^3+\cdots{}^nC_rx^r+\cdots+x^n$$

$$=1+\frac{nx}{\lfloor 1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots+x^n \quad \cdots \quad (3)$$

এখন $n=3$ বসাও।

$$(1+x)^3=1+\frac{3}{\lfloor 1}x+\frac{3(3-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{3(3-1)(3-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$
$$=1+3x+3x^2+x^3$$

ইহার চতুর্থ পদের পর সব পদের সহগ শূন্য। অতএব এই বিস্তৃতিতে 4টি মাত্র পদ থাকিবে।

আবার (3) নম্বরে $n=-3$ বসাও।

$$\therefore \quad (1+x)^{-3}=1+\frac{-3}{\lfloor 1}x+\frac{(-3)(-3-1)}{\lfloor 2}x^2$$
$$+\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

ইহার কোন পদের সহগ শূন্য হইবে না। অতএব শ্রেণীটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে।

আবার (3) নম্বরে $n=\frac{2}{3}$ বসাও।

$$\therefore \quad (1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{\frac{2}{3}}{\lfloor 1}x+\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

ইহারও কোন পদের সহগ শূন্য হইবে না। এক্ষেত্রে শ্রেণীটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে। অতএব দেখা যাইতেছে যে, সূচক যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তবেই শ্রেণী সসীম হইবে। আর বাকী সব দ্বিপদ বিস্তৃতিতে সাধারণতঃ শ্রেণী অসীম হইবে। সাধারণভাবে আমরা ধরিয়া লই যে, দ্বিপদ উপপাদ্যের বিস্তৃতি একটি অসীম শ্রেণী। একমাত্র ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের সময় শ্রেণী সসীম হয়।

অতএব দ্বিপদ উপপাদ্যের বিস্তৃতি বলিতে আমরা বুঝিব

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(x-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots\text{to}\infty$$

সসীম শ্রেণী ও অসীম শ্রেণীর মধ্যে অনেক পার্থক্য আছে। সসীম শ্রেণী সবসময়ই ব্যবহার করা হয় কিন্তু অসীম শ্রেণী কেবলমাত্র অবস্থা বিশেষে ব্যবহার করা হয়।

এখন $x=-x$ এবং $n=-2$ বসাও।

$$\therefore \quad (1-x)^{-2}=1-2(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{\lfloor 2}(-x)^2+\cdots$$
$$=1+2x+3x^2+\cdots\cdots$$

এক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইল।

এখন $(1-x)^{-2}$তে $x=2$ বসাও।

$\therefore\ (1-2)^{-2}=1+2.2+3.2^2+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত

বা, $(-1)^{-2}=1+2.2+3.2^2+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত

ইহার বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ।

$\therefore$ ইহা অসম্ভব।

অনুরূপে দেখা যায় $x$-এর মান 1 বা $-1$ হইলেও এই দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয় না। অতএব আমরা এই সিদ্ধান্তে আসিতে পারি যে, $x$-এর যে-কোন মানে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয় না। যদি $-1<x<1$ হয় তাহা হইলে যে-কোন সূচকের পক্ষে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে। অতএব যদি $|x|<1$ হয় এবং $n$ ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ করা যায়

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{n(n-1(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

## 10.2. দ্বিপদ উপপাদ্যের বিভিন্ন বিস্তৃতি :

যদি $n$ এবং $x$ উভয়েই ধনাত্মক হয়, তাহা হইলে

(1) $$(1+x)^n=1+\frac{n}{\lfloor 1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots$$

(2) $$(1-x)^n=1-\frac{n}{\lfloor 1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$
$$\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots$$

(3) $$(1+x)^{-n}=1-\frac{n}{\lfloor 1}x+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2-\cdots\cdot$$
$$+\frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots$$

(4) $$(1-x)^{-n}=1+\frac{n}{\lfloor 1}x+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots$$

### 10.3. সাধারণ পদ (*General Term*) ঃ

(1) $(1+x)^n$ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ হইল সাধারণ পদ।

$$\therefore \quad t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

(2) $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ হইল সাধারণ পদ।

$$\therefore \quad t_{r+1}=(-1)^r\frac{n(n-1)(x-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

(3) $(1+x)^{-n}$-এর $(r+1)$-তম পদ সাধারণ পদ।

$$t_{r+1}=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

(4) $(1-x)^{-n}$ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ সাধারণ পদ।

$$\therefore \quad t_{r+1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

### আরও কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি ঃ

(1) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^r\ldots\ldots$

সাধারণ পদ $t_{r+1}=x^r$.

(2) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots+(r+1)x^r+\ldots\ldots$

এবং $t_{r+1}=(r+1)x^r$.

(3) $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+\cdots\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r$

এবং $t_{r+1}=\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r$

(4) $(1-x)^{-4}=1+4x+10x^2+20x^3+\ldots\ldots$

$$+\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}x^r+\ldots\ldots$$

এবং $t_{r+1}=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}x^r$.

**উদা. 1.** নিম্নলিখিত রাশিগুলির বিস্তৃতি নির্ণয় কর এবং প্রতিক্ষেত্রেই সাধারণ পদ নির্ণয় কর :

(*i*) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ (*ii*) $(1+x)^{-3}$

(i) $$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3\ldots\ldots$$

এবং $$t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}n^r$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^{r-1}\frac{1.3\ldots(2r-3)}{2^r\lfloor r}x^r.$$

(ii) আমরা জানি,

$$(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$

$$\therefore\ (1+x)^{-3}=1-3x+\frac{3(3+1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{3(3+1)(3+2)}{\lfloor 3}x^3$$

$$=1-3x+6x^2-10x^3$$

এবং সাধারণ পদ $t_{r+1}$

$$t_{r+1}=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^r\frac{3(3+1)(3+2)\ldots(3+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^r\frac{3.4.5\ldots(2+r)}{\lfloor r}x^r.$$

উদা. 2. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ বিস্তৃতির $x^{10}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

এখানে $$\frac{1+x}{(1-x)^3}=(1+x)(1-x)^{-3}$$

$$=(1-x)^{-3}+x(1-x)^{-3}$$

$\therefore$ $x^{10}$-এর সহগ $=(1-x)^{-3}$-এর বিস্তৃতির $x^{10}$-এর সহগ
$+(1-x)^{-3}$-এর বিস্তৃতির $x^9$-এর সহগ।

উদা. 3. $(999)^{\frac{1}{3}}$-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

$$(999)^{\frac{1}{3}}=(1000-1)^{\frac{1}{3}}=10(1-\cdot 001)^{\frac{1}{3}}$$

$$=10[1-\tfrac{1}{3}(\cdot 001)+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{\lfloor 2}(\cdot 001)^2-\ldots$$

$$=10[(1-\cdot 0003)-\tfrac{1}{9}(\cdot 001)^2-\cdots]$$

$$=10(1-\cdot 0003)=10-\cdot 0030$$

$$=9\cdot 9970=9\cdot 997.$$

**উদা.** 4. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\infty.$$

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2})^3}{\lfloor 3}+\ldots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}.$$

## প্রশ্নমালা 10

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির প্রথম চারিটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি ও সাধারণ পদ নির্ণয় কর :

(i) $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ (ii) $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}$

(iv) $(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$ (v) $(1+2x)^{-3}$

2. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

3. $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\infty)^2$ বিস্তৃতির $x^r$-এর সহগ নির্ণয় কর।

4. $\dfrac{1}{1-2x}$ বিস্তৃতির $x^r$-এর সহগ নির্ণয় কর।

5. $\dfrac{1}{(a-bx)}$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে $(1+x)^{\frac{5}{3}}$ বিস্তৃতির $x^r$-এর সহগ

$$\frac{1.4.7\ldots(3r-8)}{\lfloor r}(-1)^{r-2}.$$

7. $\dfrac{1+x}{1-x}$ বিস্তৃতির $x^5$-এর সহগ নির্ণয় কর।

8. $(1+x)(1-x)^{-3}$ বিস্তৃতির $x^{10}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

9. $(1+x)^2(1-x)^{-2}$ বিস্তৃতির $x^2$-এর সহগ নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে, $(1+x)^{-\frac{m}{n}}$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$\frac{m(m+n)(m+2n)\ldots\{m+(r-1)n\}}{1.2.3\ldots r.x^r}x^2.$$

11. $(1-3x)^{\frac{2}{3}}$ বিস্তৃতির প্রথম চারিটি পদ নির্ণয় কর।

12. $(1-x)^{-4}$ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় কর।

13. $(1+x+x^2+\cdots\infty)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর ( যে পদে $x^3$ আছে সেই পদ পর্যন্ত )।

14. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $(\cdot999)^3$-এর 6 দশমিক স্থান পর্যন্ত।

(ii) $(999)^{\frac{1}{3}}$-এর 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত।

(iii) $(1\cdot01)^{\frac{1}{2}}$-এর 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত।

(iv) $(122)^{\frac{1}{3}}$-এর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত।

15. দেখাও যে, $\sqrt{3}=1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\infty$

16. $(1+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\infty$

17. $\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{3^2}-\cdots\infty$

18. $4(\sqrt{8}-1)=3+\frac{3.5}{8}+\frac{3.5.7}{8.12}+\cdots\infty$

19. $\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\infty$

20. যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $2+\frac{5}{\underline{|2}.3}+\frac{5.7}{\underline{|3}.3^2}+\frac{5.7.9}{\underline{|4}.3^2}+\cdots\infty$

(ii) $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{6^3}+\cdots\infty$

(iii) $1+\frac{2.1}{3.2}+\frac{2.5}{3.6}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\infty$

(iv) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\cdots\infty$

# একাদশ অধ্যায়

## অসীম শ্রেণী (Infinite Series)

### 11.1. অসীম শ্রেণী (*Infinite Series*) ঃ

যদি কোন শ্রেণীর পদের সংখ্যা সীমাহীন (infinite) হয়, তাহা হইলে সেই শ্রেণীকে অসীম শ্রেণী (infinite series) বলে। কোন শ্রেণীর পদের সংখ্যা finite হইলে যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব হয় এবং উহার মান সসীম (finite) হয়। কিন্তু পদের সংখ্যা যদি finite না হয়, তাহা হইলে যোগফল finite নাও হইতে পারে এবং সবক্ষেত্রে উহাদের যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব নাও হইতে পারে। কোন শ্রেণীর $n$ সংখ্যা পদের যোগফল $S_n$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অসীম শ্রেণীটিকে $u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots u_n+\cdots$ দ্বারা লেখা হয়। $\cdots$ (1)

এই শ্রেণীটির প্রথম পদ $u_1$, দ্বিতীয় পদ $u_2$, তৃতীয় পদ $u_3$, চতুর্থ পদ $u_4$ ইত্যাদি।

$\therefore$ $n$-তম পদ $u_n$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(1) নম্বরকে সংক্ষেপে $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ বা $\Sigma u_n$ লেখা হয়।

(1) নম্বর শ্রেণীটির প্রথম $n$-সংখ্যক পদের যোগফলকে $S_n$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(2) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$

(3) $1+a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^{n-1}+\cdots\cdots$

শ্রেণী দুইটি অসীম শ্রেণীর উদাহরণ।

যদি কোন অসীম শ্রেণীর (infinite series) যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব হয়, তাহা হইলে তখন $n$ ক্রমশঃ অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় $(n\to\infty)$ এবং যোগফলটি $S_n$-এর সীমান্ত মানের (limiting value) সমান হয়। অতএব যদি $S_n$-এর কোন সসীম (finite) সীমান্ত মান থাকে, তাহা হইলে তখনই অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় সম্ভব হইবে।

একটি শ্রেণীকে অভিসারী (convergent) অসীম শ্রেণী বলা হয় যদি পদ-সংখ্যা $n$ অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে উহার প্রথম $n$ সংখ্যক পদের যোগফল কোন নির্দিষ্ট মান অতিক্রম না করে।

যেমন $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত।

এই শ্রেণীটি হইল অভিসারী অসীম শ্রেণী। কারণ ইহার যোগফল 2 অর্থাৎ সসীম (finite) বলিয়া ঐ শ্রেণীটি অভিসারী অসীম শ্রেণী। ইহাকে নিম্নোক্তরূপে প্রকাশ করা যায়।

যদি $\underset{n\to\infty}{Lt}\ S_n = \text{finite}$ হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি অভিসারী অসীম শ্রেণী হয়। যখন একটি শ্রেণী অভিসারী হয় তখন $\underset{n\to\infty}{Lt}\ S_n =$ একটি নির্দিষ্ট মান ( $S$ ধর ), তাহা হইলে $S$-কে অসীম শ্রেণীর যোগফল বলে।

আবার একটি শ্রেণীকে অপসারী (divergent) অসীম শ্রেণী বলা হয় যদি কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা $n$ ক্রমশঃ অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে $S_n$-এর সীমান্ত মানও যদি অসীম হয়। এই শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

যেমন $1+2+3+4+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots$

শ্রেণীটি হইল অপসারী অসীম শ্রেণী, কারণ ইহার যোগফল $\infty$ ( অসীম )। ইহাকে অন্যভাবে বলা যায় যদি $\underset{n\to\infty}{Lt.}\ S_n = +\infty$ বা $-\infty$ হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি অপসারী (divergent) হয়।

আরও কতকগুলি শ্রেণী আছে যাহারা অপসারীও নয় এবং অভিসারীও নয়। তাহাদের যোগফল বিভিন্ন সময় বিভিন্ন রকম হয়। সেই সব শ্রেণীগুলিকে দোলায়মান (oscillatory) অসীম শ্রেণী বলা হয়।

যেমন $1-1+1-1+\cdots\cdots$ হইল oscillatory অসীম শ্রেণী। কারণ ইহার যোগফল একবার 0 আর একবার 1 হয়।

**পরীক্ষা ঃ** মনে কর, কোন অসীম শ্রেণীর $(n+1)$-তম পদ ও $n$-তম পদের অনুপাত হইল $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

এখন $\frac{u_{n+1}}{u_n}$-এর সীমান্ত মান যদি $K$ হয় যখন $n\to\infty$, তাহা হইলে

(i) যদি $|K|<1$ হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি অভিসারী হয় ;

(ii) যদি $|K|>1$ হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি অপসারী হয় ;

(*iii*) যদি $|K|=1$ হয়, তাহা হইলে শ্রেণীটি অভিসারী কি অপসারী তাহা নির্ণয় করা সম্ভব হয় না।

এখানে $|K|$ বলিতে $K$-এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন ছাড়া মান বুঝায়, অর্থাৎ $|K|$ বলিতে $K$-এর absolute মান বুঝায়।

**11.2. অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল** (*Sum of an infinite series in G. P.*) **:**

$n$ পদবিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল হইল

$$S_n=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-1}$$

$$=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad \ldots \quad (i)$$

$$=\frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad \ldots. \quad (ii)$$

এখন সাধারণ অনুপাত $r$-এর সাংখ্যমান $<1$ হইলে $n$-এর মান যত বাড়িবে তখন $r^n$-এর সাংখ্যমান তত কমিবে। অতএব $n$-এর মান যত অসীমভাবে বড় হইবে $r^n$-এর সাংখ্যমান তত ক্রমশঃ অসীমভাবে ছোট হইবে অর্থাৎ $n$ অসীমভাবে বাড়ার সাথে সাথে $\frac{r^n}{1-r}$-এর মান ক্রমশঃ অসীমভাবে ছোট হইবে।

$\therefore$ $n$-এর মান অসীম হইলে এবং $r<1$ হইলে

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-0)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

অর্থাৎ $a+ar+ar^2+\cdots\infty$ পর্যন্ত $=\frac{a}{1-r}$

অতএব যদি $-1<r<1$ এবং $n\to\infty$ হয়, তাহা হইলে

$$S_n\to\frac{a}{1-r} \text{ হইবে।}$$

এখন এই যোগফলকে $S_\infty$ দ্বারা সূচিত করা হইলে $S_\infty=\frac{a}{1-r}$ হইবে।

উদা. 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\infty$ পর্যন্ত শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে $a=1$, $r=\frac{1}{2}<1$

$$\therefore \; S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

উদা. 2. নিম্নের শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর :

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^2}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$S_\infty=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\cdots\infty\right)+\left(\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\cdots\infty\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}+\frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}+\frac{3}{25}\times\frac{25}{24}=\frac{5}{12}+\frac{1}{8}=\frac{13}{24}.$$

## 11.3. আবৃত্ত দশমিক (*Recurring Decimal*) :

আবৃত্ত দশমিক একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী।

যেমন, $\cdot\dot{1}=\cdot 1111\cdots\infty$ পর্যন্ত

$$=\cdot 1+\cdot 01+\cdot 001+\cdot 0001+\cdots\infty$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\cdots\infty$$

ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী। ইহার প্রথম পদ $\frac{1}{10}$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{1}{10}$.

**মন্তব্য :** অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল যে প্রণালীতে করা হয়, তাহার সাহায্যে আবৃত্ত দশমিককে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়।

যেমন $\cdot 1\dot{2}\dot{3}$-কে ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$\cdot 1\dot{2}\dot{3}=\cdot 123232323\cdots\infty$ পর্যন্ত।

$$=\cdot 1+\cdot 023+\cdot 00023+\cdots\infty$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots\infty$$

$$=\frac{1}{10}+\left\{\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots\infty\right\}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{23}{1000}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{100})}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}=\frac{1}{10}+\frac{23}{990}=\frac{99+23}{990}=\frac{122}{990}=\frac{61}{495}.$$

## প্রশ্নমালা 11

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অসীম পর্যন্ত (∞) যোগফল নির্ণয় কর :

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

2. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots\cdots$

4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$

5. $(\sqrt{5}+2)+1+(\sqrt{5}-2)+\cdots\cdots$

6. $7+\sqrt{42}+6+\cdots\cdots$

7. $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots(-1<x<1)$

8. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\cdots\cdots$

9. $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}$

10. $1+\frac{1}{6}+\frac{1.4.1}{3.6.4}+\frac{1.4.7.1}{3.6.9.8}+\cdots\cdots$

11. $1+\frac{2}{9}+\frac{2.5}{9.18}+\frac{2.5.8}{9.18.27}+\cdots\cdots$

12. $1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots$

13. $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

14. $1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{3^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

নিম্নলিখিতগুলিকে ভগ্নাংশে পরিণত কর :

15. $\cdot 3\dot{4}\dot{5}$  16. $\cdot\dot{8}$  17. $\cdot 1\dot{2}\dot{5}$

18. $1\cdot\dot{5}$  19. $\cdot 0\dot{8}\dot{1}$

# দ্বাদশ অধ্যায়

## লগারিদম্ ( Logarithm )

12.1. যদি $a^x = M(a>0, a \neq 1)$ হয়, তাহা হইলে সূচক x-কে M-এর লগারিদম্ বলা হয় যাহার নিধান ( base ) a ঃ

ইহাকে ইংরাজীতে বলা হয় $x$ is the logarithm of $M$ to base $a$।

সংক্ষেপে ইহাকে বলা হয় $x = \log_a M$.

যেমন $2^3 = 8$ $\quad \therefore \quad 3 = \log_2 8$

$4^2 = 16$ $\quad \therefore \quad 2 = \log_4 16$

$5^4 = 625$ $\quad \therefore \quad 4 = \log_5 625$

এখানে দেখা যাইতেছে যে-কোন সংখ্যাকে নিধান ধরা যাইতে পারে। নিধান যদি 10 হয় তখন সেই লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম্ বলে। কোন সময় যদি নিধানের উল্লেখ না থাকে তখন ধরিয়া লইতে হইবে যে, নিধান 10 আছে। যেমন log 5 বলিতে আমরা বুঝি 5-এর logarithm যাহার নিধান 10 অর্থাৎ log 5-কে আমরা লিখিতে পারি $\log_{10} 5$.

আবার $\log_{10} 45$, $\log_{10} 105$, $\log_{10} 10005$ ইত্যাদিকে লিখিতে পারি যথাক্রমে log 45, log 105, log 10005.

**বিশেষ ক্ষেত্র** (*Particular Case*) ঃ

যেহেতু, $a^0 = 1$ $\quad \therefore \quad 0 = \log_a 1$

$2^0 = 1$ $\quad \therefore \quad 0 = \log_2 1$

$x^0 = 1$ $\quad \therefore \quad 0 = \log_x 1$

এখানে দেখা যাইতেছে যে 0 ছাড়া যে-কোন নিধান হইলে 1-এর লগারিদম্ 0 হইবে।

আবার $a^1 = a$ $\quad \therefore \quad 1 = \log_a a$

এখানে দেখা যাইতেছে, সংখ্যা ও নিধান এক হইলে সেই সংখ্যার লগারিদম্ 1 হইবে।

12.2. **সাধারণ লগারিদম্** (*Common Logarithm*) ঃ

যেহেতু $10^1 = 10$ $\quad \therefore \; 1 = \log_{10} 10$ $\quad \therefore \; \log 10 = 1$

$10^2 = 100$ $\quad \therefore \; 2 = \log_{10} 100$ $\quad \therefore \; \log 100 = 2$

$10^3 = 1000$ $\quad \therefore \; 3 = \log_{10} 1000$ $\quad \therefore \; \log 1000 = 3$

ইত্যাদি

আবার,

$10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1$ $\therefore -1=\log_{10}\cdot1$ $\therefore \log\cdot1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot01$ $\therefore -2=\log_{10}\cdot01$ $\therefore \log\cdot01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot001$ $\therefore -3=\log_{10}\cdot001$ $\therefore \log\cdot001=-3$

ইত্যাদি।

## 12.3. লগারিদমের নিয়মাবলী (*Laws of Logarithm*) :

1. $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$

2. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

3. $\log_a(M)^N=N\log_a M$

(1) মনে কর, $\log_a(M\times N)=x$

$\therefore \log_a M=y,\ \log_a N=z$

$\therefore a^x=(M\times N),\ a^y=M,\ a^z=N$

এখন, $a^x=M\times N=a^y\times a^z=a^{y+z}$

$\therefore x=y+z$

বা, $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N.$

মন্তব্য : $\log_a(M\times N\times P)=\log_a M+\log_a N+\log_a P.$

(2) মনে কর, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x,\ \log_a M=y,\ \log_a N=z,$

$\therefore a^x=\left(\frac{M}{N}\right),\ a^y=M,\ a^z=N$

এখন, $a^x=\frac{M}{N}=\frac{a^y}{a^z}=a^{y-z}$

$\therefore a^x=a^{y-z}$

$\therefore x=y-z$

বা, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N.$

মন্তব্য : $\log_a\frac{(M\times N)}{(P\times Q)}=\log_a(M\times N)-\log_a(P\times Q)$

$=(\log_a M+\log_a N)-(\log_a P+\log_a Q).$

(3) মনে কর, $\log_a(M)^N = x$, $\log_a(M) = y$

$\therefore \quad a^x = (M)^N$ এবং $a^y = M$

এখন, $a^x = (M)^N = (a^y)^N$

$\therefore \quad a^x = a^{yN}$

$\therefore \quad x = N.\,y$ বা. $\log_a(M)^N = N.\log_a M.$

**নিধানের পরিবর্তন (Change of base) ঃ**

(1) $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

মনে কর, $\log_a M = x$, $\log_b M = y$, $\log_a b = z$

$\therefore \quad a^x = M,\; b^y = M,\; a^z = b$

$\therefore \quad a^x = M = b^y = (a^z)^y$

$\therefore \quad a^x = a^{yz}$

$\therefore \quad x = yz$ বা, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b.$

মন্তব্য ঃ $\log_a M = \log_a M \times \log_a b$-তে $M = a$ বসাও।

$\therefore \quad \log_a a = \log_b a \times \log_a b$

কিন্তু আমরা জানি, $\log_a a = 1$

$\therefore \quad \log_b a \times \log_a b = 1$

$\therefore \quad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}.$

## 12.4. অ্যান্টিলগারিদম্ (*Antilogarithm*) ঃ

যদি $a^x = M (a > 0, \neq 1)$ হয়, তাহা হইলে $x$-কে $M$-এর logarithm বলা হয় যাহার base $a$ অর্থাৎ $x = \log_a M$ হয়।

বিপরীতক্রমে $M$-কে বলা হয় $x$-এর antilogarithm, সংক্ষেপে antilog বলা হয়।

এখন $10^4 = 10000 \quad \therefore \quad 4 = \log_{10} 10000$ বা. $4 = \log 10000$

$\therefore$ antilog $4 = 10000$

আবার $10^{-3} = \dfrac{1}{1000} = {\cdot}001 \qquad \therefore \quad -3 = \log {\cdot}001$

$\therefore$ antilog $-3 = {\cdot}001.$

এখন দেখা যাইতেছে যে, কোন সংখ্যার antilogarithm এমন একটি সংখ্যা যাহার লগারিদম্ হয় সেই সংখ্যা। যেমন 4-এর antilogarithm 10000 এবং আবার 10000-এর লগারিদম্ 4।

∴ antilog $x$ বলিতে এমন একটি সংখ্যা $M$-কে বুঝায় যাহার লগারিদম্ হয় $x$-এর সমান।

## 12.5. পূর্ণক ও অংশক (*Characteristic and Mantissa*) :

কোন সংখ্যার লগারিদমে দুইটি অংশ থাকে : (*i*) একটি পূর্ণ অংশ যাহাকে বলা হয় **পূর্ণক** (characteristic)।

(*ii*) অপরটি দশমিক অংশ বা ভগ্নাংশ যাহাকে বলা হয় **অংশক** (mantissa)।

কোন কোন ক্ষেত্রে পূর্ণক 0 হইতে পারে বা অংশক 0 হইতে পারে।

যেমন $\log 10000 = 4 + {}^{\cdot}0 = 4{\cdot}0 = 4$

এবং $\log 4 = 0 + {}^{\cdot}6021.$

log table-এর সাহায্যে অংশক নির্ণয় করিতে হয়।

কোন সংখ্যার লগারিদম্ এমন ভাবে প্রকাশ করা হয় যেন উহার অংশক সবক্ষেত্রেই ধনাত্মক হয়। মনে কর, কোন সংখ্যার লগারিদম্ $-2{\cdot}5094$। এখানে পূর্ণক $-2$ এবং অংশক $-{}^{\cdot}5094$। যেহেতু অংশককে সর্বদাই ধনাত্মক হইতে হইবে সেই কারণে এই ঋণাত্মক অংশকে ধনাত্মক অংশে পরিণত করিতে হইবে।

$$-2{\cdot}5094 = -2 - {}^{\cdot}5094$$
$$= -2+1-1-{}^{\cdot}5094 = -3+1-{}^{\cdot}5094$$
$$= -3 + {}^{\cdot}4906 = \bar{3}{\cdot}9406$$

এখানে পূর্ণক $-3$ হইল ঋণাত্মক এবং অংশক ধনাত্মক। পূর্ণকের ঋণাত্মক চিহ্নকে '–' উহার বামদিকে না বসাইয়া ঐ চিহ্নকে উহার উপরে বসান হয় এবং উহাকে **'বার'** হিসাবে পড়া হয়।

### পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় :

**পূর্ণক নির্ণয় :** 1 অপেক্ষা বড় সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক ধনাত্মক হইবে এবং সংখ্যাটির পূর্ণ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে পূর্ণক তাহা অপেক্ষা 1 কম হইবে।

যেমন, log 2461 এর পূর্ণক 3
log 246·1 এর পূর্ণক 2
log 24·61 এর পূর্ণক 1
log 2·461 এর পূর্ণক 0

আবার 1 অপেক্ষা ছোট কোন ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক ঋণাত্মক হইবে এবং দশমিক বিন্দুর ঠিক পরে যতগুলি 0 থাকিবে তাহা অপেক্ষা একটি সংখ্যা বেশী হইবে। যেমন,

log ·2461 এর পূর্ণক −1
log ·02461 এর পূর্ণক −2 ইত্যাদি।

**অংশক নির্ণয়ঃ** লগারিদম্ তালিকা হইতে অংশক নির্ণয় করিতে হয়। বই-এর শেষে 4 অঙ্কের ও 5 অঙ্কের দুইটি তালিকা দেওয়া থাকে এবং antilogarithm-এরও তালিকা দেওয়া থাকে। logarithm তালিকা হইতে 4 অঙ্ক বা তার চেয়ে কম অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাগুলির সাধারণ logarithm-এর অংশক পাওয়া যায়। তালিকায় একমাত্র logarithm-এর অংশকে দশমিক বিন্দুটি দেওয়া থাকে না। দশমিক বিন্দুটিকে আমাদের বসাইয়া লইতে হয়।

যে সংখ্যার লগারিদম্ প্রয়োজন তাহার প্রথম দুইটি অঙ্ক তালিকার বামদিক হইতে পাওয়া যায়। তারপর ডানদিকের স্তম্ভের মাথায় 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি লেখা আছে। ইহা হইতে যে সংখ্যার লগারিদম্ প্রয়োজন তাহার তৃতীয় অঙ্কটি লইতে হয়। আর চতুর্থ অঙ্কটি লইতে হয় সর্বডানে Mean difference-এর প্রদত্ত সংখ্যা হইতে। লগতালিকার সাহায্যে সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয় করার পদ্ধতি বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হইল।

উদা. 1. (i) log 2461 = 3 + ·3911 = 3·3911
(পূর্ণক) (অংশক)

এখানে চারিটি পূর্ণসংখ্যা বলিয়া পূর্ণক হইল 3। অংশক বাহির করিবার সময় প্রথমে সর্ববামের স্তম্ভ হইতে 24-কে দেখা হইল এবং 24-এর সারির সংখ্যাগুলির যেটি 6 স্তম্ভে আছে তাহা নির্ণয় করা হইল এবং সংখ্যাটি হইল 3909। ইহার পর 1-এর Mean diff. (গড় অন্তর) লওয়া হইল 2। এই দুইটি সংখ্যাকে যোগ করা হইল।

(ii) $\log 246{\cdot}1 = 2 + {\cdot}3911 = 2{\cdot}3911$
( পূর্ণক ) ( অংশক )

(iii) $\log 24{\cdot}61 = 1 + {\cdot}3911 = 1{\cdot}3911$
( পূর্ণক ) ( অংশক )

(iv) $\log 2{\cdot}461 = 0 + {\cdot}3911 = {\cdot}3911$
( পূর্ণক ) ( অংশক )

(v) $\log {\cdot}2461 = -1 + {\cdot}3911 = \bar{1}{\cdot}3911$

(vi) $\log {\cdot}02461 = -2 + {\cdot}3911 = \bar{2}{\cdot}3911$ ইত্যাদি।

এখানে দেখা যাইতেছে যে, যে সকল সংখ্যা একই অঙ্ক দ্বারা গঠিত এবং অঙ্কগুলি যদি একই ক্রমে সাজানো থাকে সেই সকল সংখ্যার logarithm-এর অংশক একই হইবে। অর্থাৎ অংশক দশমিক বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

উদা. 2. log 485·6-এর মান কত ?

পূর্ণক = 2

অংশক = ·6862

$\therefore \log 485{\cdot}6 = 2{\cdot}6862$

**Antilogarithm তালিকা হইতে antilog নির্ণয় :**

Antilogarithm তালিকা হইতে প্রথমে প্রদত্ত লগারিদমের অনুরূপ রাশি নির্ণয় করিতে হয় এবং ইহার পর পূর্ণক অনুসারে দশমিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা হয়।

উদা. 3. Antilog 1·2461-এর মান নির্ণয় কর।

antilog ·246 = 1762

1-এর গড় অন্তর = 0

1762

এখানে যেহেতু পূর্ণক 1 ∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 17·62

$\therefore$ antilog = 1·2461 = 17·62.

উদা. 4. $-{\cdot}2464$-এর antilog নির্ণয় কর।

$-{\cdot}2464 = -1 + 1 - {\cdot}2464$

$= -1 + {\cdot}7536 = \bar{1}\,{\cdot}7536$

$$\text{antilog } \cdot 753 = 5662$$
$$\text{6-এর গড় অন্তর} = \quad 8$$
$$\overline{\quad\quad 5670}$$

$\therefore$ $\text{antilog} - \cdot 2464 = \cdot 5670.$

উদা. 5. নিধান যদি $2\sqrt{2}$ হয়, তাহা হইলে 512-এর লগারিদম্ কত হইবে?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা $= x$

$$\therefore \quad (2\sqrt{2})^x = 512 = 64 \times 8 = 2^6 \times 2^3$$
$$= 2^6 \times (\sqrt{2})^6 = (2\sqrt{2})^6$$
$$\therefore \quad x = 6.$$

উদা. 6. log table-এর সাহায্যে $(1{\cdot}04)^{30}$-এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $x = (1{\cdot}04)^{30}$

$$\log x = \log (1{\cdot}04)^{30}$$
$$= 30 \times \log (1{\cdot}04) = 30 \times (0 + \cdot 0170)$$
$$= 30 \times \cdot 0170 = \cdot 5100$$
$$= \log 3{\cdot}236 \qquad \text{(Antilog-এর সাহায্যে)}$$

$$\therefore \quad \log x = \log 3{\cdot}236$$
$$\therefore \quad x = 3{\cdot}236$$
$$\therefore \quad (1{\cdot}04)^{30} = 3{\cdot}236.$$

উদা. 7. log table-এর সাহায্যে $\dfrac{\sqrt[3]{\cdot 4165} \times \sqrt[5]{\cdot 8264}}{\sqrt[3]{\cdot 6438} \times \sqrt[8]{\cdot 0186}}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{মনে কর, } x = \frac{\sqrt[3]{\cdot 4165} \times \sqrt[5]{\cdot 8264}}{\sqrt[3]{\cdot 6438} \times \sqrt[8]{\cdot 0186}}$$

$$\log x = \log \frac{(\cdot 4165)^{\frac{1}{3}} \times (\cdot 8264)^{\frac{1}{5}}}{(\cdot 6438)^{\frac{1}{3}} \times (\cdot 0186)^{\frac{1}{8}}}$$
$$= \log (\cdot 4165)^{\frac{1}{3}} + \log (\cdot 8264)^{\frac{1}{5}} - \log (\cdot 6438)^{\frac{1}{3}} - \log (\cdot 0186)^{\frac{1}{8}}$$
$$= \tfrac{1}{3} \log \cdot 4165 + \tfrac{1}{5} \log \cdot 8264 - \tfrac{1}{3} \log \cdot 6438 - \tfrac{1}{8} \log \cdot 0186$$
$$= \tfrac{1}{3} \times (-1 + \cdot 6196) + \tfrac{1}{5}(-1 + \cdot 9172) - \tfrac{1}{3}(-1 + \cdot 8087)$$
$$- \tfrac{1}{8} \times (-2 + \cdot 2695)$$

$= -\frac{1}{3}(\cdot 3804) - \frac{1}{5}(\cdot 0828) + \frac{1}{3}(\cdot 1913) + \frac{1}{8}(1\cdot 7305)$

$= -\cdot 1268 - \cdot 0165 + \cdot 0697 + \cdot 2163$

$= \cdot 2860 - \cdot 1433 = \cdot 1427$

$\therefore \ \log x = \cdot 1427$

বা, $\log x = \log 1\cdot 374$ ( antilog-এর সাহায্যে )

$\therefore \ x = 1\cdot 374$

$$\therefore \ \frac{\sqrt[3]{\cdot 4165} \times \sqrt[5]{\cdot 8264}}{\sqrt[3]{\cdot 6438} \times \sqrt[8]{\cdot 0186}} = 1\cdot 374.$$

**উদা. 8.** দেখাও যে, $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$

বামপক্ষ $= \log 75 - \log 16 - (2 \log 5 - 2 \log 9) + (\log 32 - \log 243)$

$= \log (3 \times 5^2) - \log 2^4 - 2 \log 5 + 4 \log 3 + \log 2^5 - \log 3^5$

$= \log 3 + 2 \log 5 - 4 \log 2 - 2 \log 5 + 4 \log 3 + 5 \log 2 - 5 \log 3$

$= \log 2.$

**উদা. 9.** সমাধান কর : $3^{2x-1} = 5^{x+2}$

$\log 3^{2x-1} = \log 5^{x+2}$

বা, $(2x-1) \log 3 = (x+2) \log 5$

বা, $2x \log 3 - \log 3 = x \log 5 + 2 \log 5$

বা, $2x \log 3 - x \log 5 = \log 3 + 2 \log 5$

বা, $x(2 \log 3 - \log 5) = \log 3 + 2 \log 5$

$$\therefore \ x = \frac{\log 3 + 2 \log 5}{2 \log 3 - \log 5} = \frac{2 \times \cdot 6990 + \cdot 4771}{2 \times \cdot 4771 - \cdot 6990} = \frac{\cdot 18751}{\cdot 2552} = 7\cdot 35.$$

## প্রশ্নমালা 12

1. প্রমাণ কর :

(i) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$

(ii) $\log \frac{27}{8} - \log \frac{16}{81} - 2 \log \frac{3}{4} + \log \frac{8}{81} = \log 3$

(iii) $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$

(iv) $\log 2+16 \log \frac{16}{15}+12 \log \frac{25}{24}+7 \log \frac{81}{80}=1$

(v) $\log(\frac{16}{15})^7+(\log \frac{25}{24})^5+(\log \frac{81}{80})^3=\log 2$

(vi) $\log \frac{81}{8}-2 \log \frac{3}{2}+3 \log \frac{2}{3}+3 \log \frac{3}{4}=0$

(vii) $\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{3 \log 1728}{1+\frac{1}{2} \log \cdot 36+\frac{1}{3} \log 8}}=\frac{1}{2}$

(viii) $\log_b{}^a \times \log_c{}^b \times \log_a{}^c=1$

(ix) $x^{\log y-\log z} \times y^{\log z-\log x} \times z^{\log x-\log y}=1$

2. নিম্নলিখিত রাশিগুলির লগারিদম্ নির্ণয় কর :

(i) 1728 যাহার নিধান $2\sqrt{3}$

(ii) 216 যাহার নিধান 6

(iii) 2 যাহার নিধান 16

(iv) 400 যাহার নিধান $2\sqrt{5}$।

3. $\sqrt[4]{1\cdot256}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. যদি $\log 2=\cdot3010300$, $\log 3=\cdot4771213$ হয়,

(i) $\log \cdot0045$ (ii) $\log (45)^{\frac{1}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. যদি $x=\log_{\sqrt{6}} 36$ হয়, $x$-এর মান কত ?

6. মান নির্ণয় কর :

(i) $\cdot8176\times13\cdot64$

(ii) $7\cdot406\times8\cdot931\times212\cdot4$

(iii) $\frac{1}{(1\cdot035)^{16}}$

(iv) $(36\cdot21)^{-\frac{1}{7}}$

(v) $\frac{\cdot678\times9\cdot01}{\cdot0234}$

(vi) $(45\cdot37)^{\frac{1}{3}}\times(\cdot7692)^4$

(vii) $\frac{(2\cdot415)^{\frac{1}{5}}}{(\cdot824)^4}$

(viii) $\frac{400\times(1\cdot04)^{30}}{(1\cdot04)^{30}-1}$

(ix) $30\{(1+\cdot035)^{15}-1\}$

(x) $\frac{5\cdot631\times42\cdot13\times\cdot2783}{2\cdot451\times\cdot8392\times12\cdot61}$

(xi) $\frac{\cdot006789\times\cdot01234\times\cdot567}{20\cdot893\div28\cdot67\times\cdot0098}$

(xii) $\sqrt[11]{1111}$

(xiii) $\sqrt[7]{\frac{1}{\cdot1235}}$

7. যদি $\log (x^2y^3)=m$, $\log (\frac{x}{y})=n$ হয়, তাহা হইলে $\log x$ ও $\log y$-এর মান (in terms of $m$ and $n$) নির্ণয় কর।

8. যদি $\frac{\log x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

(i) $xyz=1$ (ii) $x^{y+z}y^{z+x}z^{x+y}=1.$

9. যদি $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$x \log (\frac{b}{a})=\log a.$

10. যদি $\frac{a(b+c-a)}{\log a}=\frac{b(c+a-b)}{\log b}=\frac{c(a+b-c)}{\log c}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $b^c c^b=c^a a^c=a^b b^a.$

11. যদি $a=xy^{p-1}, b=xy^{q-1}, c=xy^{r-1}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $(q-r) \log a+(r-p) \log b+(p-q) \log c=0.$

12. যদি $\log (a+b+c)=\log a+\log b+\log c$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$$\log \left(\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2}\right)=\log\frac{2a}{1-a^2}+\log\frac{2b}{1-b^2}+\log\frac{2c}{1-c^2}.$$

13. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $p$-তম পদ, $q$-তম পদ, $r$-তম পদ যথাক্রমে $a, b, c$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$$(q-r) \log a+(r-p) \log b+(p-q) \log c=0.$$

14. সমাধান কর :

(i) $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}.$ (ii) $2^x3^{2x}=100.$

(iii) $6^{3-4x}4^{x+5}=8.$ (iv) $(1+x)^{10}=\frac{600}{545}.$

15. $\log 2=\cdot3010300$, $\log 3=\cdot4771213$ দেওয়া আছে ;

$\left.\begin{array}{l}2^x=3^y\\2^{y+1}=3^{x-1}\end{array}\right\}$কে সমাধান কর।

16. যদি $\log 8=\cdot9030900$, $\log 6=\cdot7781513$ হয়, (i) $\log 125$ এবং (ii) $\log 75$-এর মান নির্ণয় কর।

17. যদি $\log (x^4y^3)=m$, $\log (\frac{x}{y})=n$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$$x=\frac{m+3n}{7}, \qquad y=\frac{m-4n}{7}.$$

18. যদি $x, y, z$ গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে, তাহা হইলে দেখাও যে $\log_a{}^x$, $\log_a{}^y$, $\log_a{}^z$ সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

19. দেখাও যে $\log\frac{a^n}{b^n}+\log \frac{b^n}{c^n}+\log \frac{c^n}{a^n}=0.$

# ত্রয়োদশ অধ্যায়

# চক্রবৃদ্ধি সুদ

# (Compound Interest)

## 13.1. সরল সুদ (*Simple Interest*) :

সরল সুদ কেবলমাত্র প্রথমে যে মূলধন থাকে তাহার উপর হিসাব করা হয়। এখানে প্রতি বৎসর কেবলমাত্র আসলের উপর সুদ হিসাব করা হয়।

মনে কর, $P$ = মূলধন

$n$ = বৎসরের সংখ্যা

$i$ = একক মূলধনের একক বৎসরের সুদ

$= \frac{r}{100}$ ( সুদের হার বার্ষিক $r\%$ )

$A = n$ বৎসরের $P$-এর সবৃদ্ধিমূল।

$\therefore$ সুদ $(I) = \mathrm{P}ni = \frac{Pnr}{100}$

$$\therefore \quad A = P + I = P + \frac{Pnr}{100} = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right).$$

## 13.2. চক্রবৃদ্ধি সুদ (*Compound Interest*) :

চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে সুদকে আসলের সহিত যোগ করা হয়। এই সুদ-আসলের উপর পরবর্তী সময়ের জন্য আবার সুদ পাওয়া যায়। এইভাবে নির্দিষ্ট সময় অন্তে দেয় সুদ আসলের সহিত যুক্ত হইয়া মূলধনে পরিণত হয় এবং এই সুদ হইতে আবার সুদ পাওয়া যায়। যে নির্দিষ্ট সময় অন্তে সুদ প্রাপ্য হয় তাহাকে সুদের পর্ব বলা হয়। সুদ বৎসরান্তে দেয় (Payable yearly) হইতে পারে, 6 মাস অন্তে দেয় হইতে পারে, 3 মাস অন্তে দেয় হইতে পারে ; মাসিক অন্তে দেয় হইতে পারে ইত্যাদি। নির্দিষ্ট ভাবে কোন কিছুর উল্লেখ না থাকিলে সুদ এক বৎসরান্তে দেয় ইহাই ধরিতে হয়। আসল এবং ইহার কোন নির্দিষ্ট সময়ের চক্রবৃদ্ধি সুদের যোগফলকে সমূল চক্রবৃদ্ধি বা সবৃদ্ধিমূল বা সুদ-আসল (Amount) বলে।

## 13.3. চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয়ের সূত্র :

মনে কর $P$ = আসল বা মূলধন

$A$ = সবৃদ্ধিমূল বা সমূল চক্রবৃদ্ধি বা সুদ-আসল।

$n$ = বৎসরের সংখ্যা বা সুদ-পর্বের সংখ্যা

$i$ = একক মূলধনের 1 বৎসর বা 1 সুদ-পর্বের সুদ $=\frac{r}{100}$.

| সুদের সময় | সুদ-আসল বা সমূল চক্রবৃদ্ধি (A) |
|---|---|
| (i) বাৎসরিক দেয় | (i) $A=P(1+i)^n$ |
| (ii) ষাণ্মাষিক দেয় | (ii) $A=P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$ |
| (iii) ত্রৈমাসিক দেয় | (iii) $A=P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}$ |
| (iv) মাসিক দেয় | (iv) $A=P\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n}$ |

অতএব, **চক্রবৃদ্ধি সুদ** (Compound Interest) $C.I.=A-P$.

**অবচয়** (*Depreciation*) :

মনে কর, $P$ = আসল (Principal বা Original Value)

$i$ = অবচয়ের হার (Rate per unit)

$n$ = বৎসরের সংখ্যা (Number of years)

$A$ = সর্বশেষ ধাতুমূল্য।

$A=P(1-i)^n$

$\therefore$ Depreciation $=P-A$.

উদা. 1. বার্ষিক 3% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 4 বৎসরের 7646 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে নির্ণয় কর এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের পরিমাণ নির্ণয় কর।

এখানে $P=$ 7646 টাকা

$A=?$

$i=3\%=\frac{3}{100}=\cdot03$

$n=4$ বৎসর

আমরা জানি, $A=P(1+i)^n$

বা, $A=7646(1+\cdot03)^4$

বা, $A=7646\times(1\cdot03)^4$

$$\log A=\log \{7646\times(1{\cdot}03)^4\}$$
$$=\log 7646+4\log 1{\cdot}03$$
$$=3{\cdot}8834+4\times{\cdot}0128$$
$$=3{\cdot}8834+{\cdot}0512$$
$$=3{\cdot}9346$$
$$=\log 8602 \qquad \text{(antilog-এর সাহায্যে)}$$
$$\therefore\ A=8602$$

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল $(A)=8602$ টাকা

এবং চক্রবৃদ্ধি সুদ $(C.I.)=A-P=8602-7646$
$=956$ টাকা।

উদা. 2. বৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধিতে 6,345 টাকা 7 বৎসরে সুদে-আসলে 7,288 টাকা হইলে সুদের হার নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $A=P(1+i)^n$

বা, $7288=6345(1+i)^7$

বা, $\log 7288=\log 6345+7\log(1+i)$

বা, $3{\cdot}8626=3{\cdot}8024+7\log(1+i)$

বা, $7\log(1+i)=3{\cdot}8626\times3{\cdot}8024$

বা, $7\log(1+i)={\cdot}0602$

বা, $\log(1+i)=\dfrac{{\cdot}0602}{7}={\cdot}0086$

বা, $\log(1+i)=\log 1{\cdot}020$ ( antilog-এর সাহায্যে )

$\therefore\ 1+i=1{\cdot}020$

$\therefore\ i=1{\cdot}020-1={\cdot}020$

$=\dfrac{02{\cdot}0}{100}=2\%$ $\left(\therefore\ i=\dfrac{r}{100}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $=2\%$ ( বার্ষিক )।

উদা. 3. একটি যন্ত্রের অবচয় হয় ক্রমহ্রাসমান পদ্ধতিতে উহার বর্ষারম্ভের মূল্যের 10%। যন্ত্রটির প্রাথমিক মূল্য 5810 টাকা এবং সর্বশেষ ধাতুমূল্য 2250 টাকা হইলে যন্ত্রটির কার্যকাল নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $A = P(1-i)^n$

বা, $2250 = 5810\left(1 - \frac{10}{100}\right)^n$

বা, $2250 = 5810(1 - \cdot 1)^n$

বা, $225 = 581(\cdot 9)^n$

বা, $\log 225 = \log 581 + n \log \cdot 9$

বা, $2\cdot 3522 = 2\cdot 7642 + n \log \cdot 9$

বা, $2\cdot 3522 - 2\cdot 7642 = n(-1 + \cdot 9542)$

বা, $-\cdot 4120 = -n \times \cdot 0458$

বা, $\cdot 4120 = n \times \cdot 0458$

$\therefore \quad n = \frac{\cdot 4120}{\cdot 0458} = 9$ বৎসর ( আসন্ন )।

**মন্তব্য :** $n$ ( বৎসর ) বাহির করিবার সময় antilog-এর প্রয়োজন হয় না।

## প্রশ্নমালা 13

1. বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 12 বৎসর অন্তে দেয় 1000 টাকার বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

2. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 4 বৎসরে 1000 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে নির্ণয় কর এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের হার নির্ণয় কর।

3. সুদ 6 মাস অন্তে দেয় হইলে বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 6000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হইবে ?

4. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে 3 মাস অন্তে দেয় 4 বৎসরের জন্য 50 টাকা রাখা হইল। চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় কর।

5. বৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধিতে বার্ষিক সুদের হার কত হইলে কিছু টাকা 17 বৎসরে তাহার দ্বিগুণ হইবে ?

6. বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকা 18 বৎসরে সুদে-আসলে 10,000 টাকা হইবে ?

7. বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে সীমা কি পরিমাণ টাকা নিয়োগ করিলে 4 বৎসর পরে 4000 টাকা পাইবে ?

8. বার্ষিক 5% হারে 1,60,000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

9. প্রথম বৎসরে সুদের হার 2%, দ্বিতীয় বৎসরে 3% এবং তৃতীয় বৎসরে 4% হইলে 2,000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

10. বার্ষিক 5% হারে কত টাকার 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 441 টাকা হইবে ?

11. সুদ 3 মাস পরে দেয় হইলে 500 টাকার 10% হারে 1 বৎসর 6 মাসের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

12. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% চক্রবৃদ্ধি হারে 1500 টাকার 14 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হইবে ?

13. সুদ 6 মাস পরে দেয় হইলে বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% চক্রবৃদ্ধি হারে কত বৎসরে কিছু টাকা তাহার দ্বিগুণ হইবে ?

14. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1000 টাকার 20 বৎসরে চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হইবে ?

15. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে এবং প্রথম বৎসরে সুদের হার বার্ষিক 5% এবং দ্বিতীয় বৎসরে বার্ষিক 6% হইলে 8000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় কর।

16. সুদ 6 মাস অন্তে দেয় হইলে এবং বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকা 2 বৎসরে সুদে-আসলে 1401·60 টাকা হইবে ?

17. প্রতি বৎসর কত হার সুদে ( চক্রবৃদ্ধি হার সুদে ) কিছু টাকা 25 বৎসরে তিনগুণ হইবে ?

18. 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে 1,600 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 1764 টাকা হইবে ?

19. সুদ 6 মাস অন্তে দেয় হইলে বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 6000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

20. যদি পূর্ব শিবপুর গ্রামের লোকসংখ্যা প্রতিবৎসর ঐ বৎসরের গোড়াতে যে লোকসংখ্যা ছিল তাহার 1·8% বৃদ্ধি পায়, তাহা হইলে কত বৎসরে লোকসংখ্যা প্রাথমিক লোকসংখ্যার 30% বৃদ্ধি পাইবে ?

21. একটি যন্ত্রের অবচয় (Depreciation) হয় উহার বর্ষারম্ভের মূল্যের 10%। উহার প্রাথমিক মূল্য ছিল 10,000 টাকা এবং শেষপর্যন্ত ধাতুমূল্য হিসাবে পাওয়া গেল 3750 টাকা যন্ত্রটি কতদিন ব্যবহার করা হইয়াছিল ?

22. কোন যন্ত্রের অবচয়ের জন্য প্রতি বৎসর পূর্ব বৎসরের মূল্যের 10% বাদ দেওয়া হয় এবং 4 বৎসরের শেষে যন্ত্রটির ধাতুমূল্য 1,31,220 টাকা হইলে যন্ত্রটির প্রাথমিক মূল্য কত ?

# চতুর্দশ অধ্যায়
# বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি
## ( Annuities )

14.1. যদি কোন শর্তে একই সময় পরপর একই পরিমাণ অর্থ পাওয়া যায়, তাহা হইলে ঐ অর্থকে **বার্ষিকী** বা **বার্ষিক বৃত্তি** বলে।

সাধারণতঃ এক বৎসর পর পর টাকা দেওয়া হয়। কখনও কখনও 6 মাস, 3 মাস বা 1 মাস পর পরও টাকা দেওয়া হয়। যদি প্রতি বৎসর $A$ টাকা দেওয়া হয়, তাহা হইলে ঐ বার্ষিকীকে $A$ টাকার বার্ষিকী বলা হয়।

## বার্ষিকীর শ্রেণীবিভাগ
## (Divisions of Annuity)

(a) **নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত দেয় বার্ষিকী** (*Annuity Certain*): যদি বার্ষিকীর টাকা নির্দিষ্ট কয়েক বৎসর দেওয়া হয়, তাহা হইলে ঐ বার্ষিকীকে নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত দেয় বার্ষিকী বলা হয়।

(b) **চিরস্থায়ী বার্ষিকী** (*Perpetual Annuity or Perpetuity*) : যদি বার্ষিকীর টাকা চিরকাল দেয় হয়, তাহা হইলে ঐ বার্ষিকীকে চিরস্থায়ী বার্ষিকী বলা হয়।

(c) **প্রত্যক্ষ বার্ষিকী** (*Immediate Annuity*) : যখন বার্ষিকীর টাকা কোন নির্দিষ্ট সময়ের শেষে দেওয়া হয়, তখন তাহাকে প্রত্যক্ষ বার্ষিকী বলা হয়।

(d) **দেয় বার্ষিকী** (*Annuity Due*) : যদি বার্ষিকীর টাকা বৎসরের শুরুতে দেওয়া হয়, তাহা হইলে ঐ বার্ষিকীকে দেয় বার্ষিকী বলা হয়। কোন বার্ষিকীর কথা পরিষ্কার ভাবে যদি বলা না থাকে, তাহা হইলে আমরা বার্ষিকী বলিতে প্রত্যক্ষ বার্ষিকীকে ধরিয়া লইব।

(e) **অনাদায়ী বার্ষিকী** (*Unpaid or Foregone Annuity*) : যদি কোন বার্ষিকী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য অনাদায়ী থাকে, তাহা হইলে ঐ বার্ষিকীকে ঐ নির্দিষ্ট সময়ের জন্য অনাদায়ী বার্ষিকী বলা হয়।

এইক্ষেত্রে অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ হয় অনাদায়ী সময়ের জন্য সুদসহ বিভিন্ন কিস্তির সমষ্টি। এইক্ষেত্রে প্রতিটি কিস্তিকে ইহা যে সময়ের জন্য অনাদায়ী সেই সময়ের সুদ-সমেত লওয়া হয়।

(f) **বিলম্বিত বার্ষিকী** (*Deferred Annuity*) : যে বার্ষিকী কিছু সময় পরে কার্যকরী হয় সেই বার্ষিকীকে বিলম্বিত বার্ষিকী বলে।

যদি কোন বার্ষিকীর টাকা $n$ বৎসরের জন্য বিলম্বিত থাকে, তাহা হইলে $n$ বৎসরের শেষে কার্যকরী হইবে এবং প্রথম কিস্তির টাকা $(n+1)$ বৎসর পরে দেয় হইবে।

(g) **বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী** (*Deferred Perpetuity*) : যদি কোন বার্ষিকী কিছু সময় পরে আরম্ভ হইয়া বরাবর চলিতে থাকে, সেই বার্ষিকীকে বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী বলে।

**মন্তব্য :** বার্ষিকীর ক্ষেত্রে সুদ সব সময় চক্রবৃদ্ধি হারে গণনা করা হয়।

## 14.2. বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য (*Present Value of an Annuity*)

কোন বার্ষিকীর বিভিন্ন কিস্তির বর্তমান মূল্যের যোগফলকে এই বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য বলা হয়।

**চিরস্বত্ব সম্পত্তি** (*Freehold estate*) : যাহা চিরস্থায়ী বার্ষিকী উৎপন্ন করে তাহাকেই চিরস্বত্ব সম্পত্তি বলে। এই চিরস্থায়ী বার্ষিকীকে খাজনা (rent) বলা হয়।

**লিজ্ সম্পত্তি বা লিজ্** (*Lease-hold estate*) : কোন নির্দিষ্ট সময়ের সত্ত্বাধিকার-বিশিষ্ট সম্পত্তিকে লিজ্ বলা হয়। চিরস্বত্ব সম্পত্তির মূল্য উহার খাজনার বর্তমান মূল্যের সমান হয়।

### বিভিন্ন চিহ্ন ও সূত্রাবলী :

$A$ = বার্ষিকী (Annuity) বা প্রতি কিস্তির টাকা।

$M = n$ বৎসর বা $n$ period-এর জন্য অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ।

$V = n$ বৎসর চলিবে এইরূপ বার্ষিকী $A$-এর বর্তমান মূল্য।

$i$ = একক পরিমাণ টাকার উপর এক বৎসরের বা একটি period-এর সুদ।

**মন্তব্য :** প্রতি ক্ষেত্রেই চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ ধরা হয়। কোন বর্তমান মূল্যকে ঐ বার্ষিকীর ক্রয়মূল্য ( Purchase Price ) বলে।

**14.3. (a) বার্ষিকীর মোট পরিমাণ** (*Amount of an Annuity*)

(*i*) প্রত্যক্ষ বার্ষিকী :

$$M=\frac{A}{i}\{(1+i)^n-1\}$$

(*ii*) দেয় বার্ষিকী :

$$M=\frac{A}{i}(1+i)\{(1+i)^n-1\}$$

(*iii*) বিলম্বিত বার্ষিকী :

$$M=\frac{A}{i}\left\{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^m}\right\}$$

[ কোন বিলম্বিত বার্ষিকী $A$, $m$ বৎসর পরে আরম্ভ হইয়া $n$ বৎসর ধরিয়া চলে। ]

(*b*) **বর্তমান মূল্য** ( *Present Value* ) :

(*i*) প্রত্যক্ষ বার্ষিকী :

$$V=\frac{A}{i}\{1-(1+i)^n\}$$

(*ii*) দেয় বার্ষিকী :

$$V=\frac{A}{i}(1+i)\{1-(1+i)^{-n}\}$$

(*iii*) বিলম্বিত বার্ষিকী :

$$V=\frac{A}{i}\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m+n}}$$

[ কোন বিলম্বিত বার্ষিকী $A$, $m$ বৎসর পরে শুরু হইলে এবং ইহার পর $n$ বৎসর ধরিয়া চলিলে ইহার বর্তমান মূল্য (*iii*) নং সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যাইবে। ]

(*iv*) চিরস্থায়ী বার্ষিকী :

$$V=\frac{A}{i}$$

(*v*) বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী :

$$V=\frac{A}{i}\frac{1}{(1+i)^m}$$

[ কোন বিলম্বিত বার্ষিকী $A$, $m$ বৎসর পরে চালু হইবে এইরূপ বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী $A$-এর বর্তমান মূল্য (*v*) নং সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যাইবে। ]

### 14.4. প্রাপ্যগুলি বৎসর অন্তে দেয় নয় এইরূপ বার্ষিকী :

মনে কর, $A$ টাকার বার্ষিকী $p$ বার দেয় অর্থাৎ $\frac{A}{p}$ টাকা $\frac{1}{p}$ বৎসর পর পর দেয় এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের period $\frac{1}{p}$ বৎসর হয়। অতএব প্রতি কিস্তির টাকার পরিমাণ $\frac{A}{p}$, $n$ বৎসরে কিস্তির সংখ্যা $np$, সুদের হার $r\%$ per annum হইলে এক্ষেত্রে $i=1$ টাকার $\frac{1}{p}$ বৎসরের সুদ $\frac{r}{100p}$ হইবে।

উপরের সূত্রগুলিতে এই ক্ষেত্রে $A$-এর পরিবর্তে $\frac{A}{p}$, $n$-এর পরিবর্তে $(n\times p)$, $i$-এর পরিবর্তে $\left(\frac{r}{100p}\right)$ বসাইতে হইবে।

**উদা. 1.** যদি কোন বার্ষিকী তিনমাস অন্তর দেয় হয়, সুদের period-ও যদি 3 মাস হয় এবং $A=120$, $n=8$ বৎসর, $r=5\%$ per annum হয়, তাহা হইলে $M$ হইবে

$$M=\frac{30}{\cdot 0125}\{(1+\cdot 0125)^{32}-1\}.$$

### 14·5. ঋণশোধক তহবিল (*Sinking Fund*) :

কোন নির্দিষ্ট দায় (Liabilities) খারিজ করিবার জন্য বা ভবিষ্যতে কোন নির্দিষ্ট সময়ে কোন ক্ষয়িষ্ণু সম্পত্তি বদলাইবার জন্য চক্রবৃদ্ধি হার সুদে লগ্নী করিয়া যে তহবিল গঠন করা হয় তাহাকে ঋণশোধক তহবিল বলে।

প্রতিবৎসর যে পরিমাণ টাকা আলাদা করিয়া রাখা হয় তাহাকে যদি $A$ ধরা হয় এবং $n$ বৎসর শেষে যে দায় (Liability) শোধ করা হয় তাহার পরিমাণকে যদি $M$ ধরা হয়, তাহা হইলে $M$ হইবে $A$ টাকা বার্ষিকীর $n$ বৎসরের মোট পরিমাণ।

$$\therefore \quad M=\frac{A}{i}\{(1+i)^n-1\}$$

এখানে $A$ হইল প্রতি বৎসরের শেষে লগ্নীকৃত টাকার পরিমাণ এবং $M$ হইল $n$ বৎসরের ঋণশোধক তহবিলের পরিমাণ।

**মন্তব্য :** কিস্তিতে ঋণ পরিশোধের ক্ষেত্রে বার্ষিকীর বর্তমান মূল্যের সূত্র $V$ ব্যবহার করা হয় এবং কিস্তিতে অর্থ বিনিয়োগ ও সঞ্চয়ের ক্ষেত্রে বা ঋণশোধক তহবিলের ক্ষেত্রে বার্ষিকীর মোট পরিমাণ $M$ ব্যবহার করা হয়।

উদা. 2. বার্ষিক 5% হারে 2000 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিকীর মূল্য (বর্তমান মূল্য) নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $V=\frac{A}{i}$

এখানে $A=2000, \quad i=\frac{5}{100}=\cdot05, \quad V=?$

$$\therefore \quad V=\frac{2000}{\cdot05}=\frac{2000\times\overset{20}{\cancel{100}}}{\cancel{5}}=40{,}000 \text{ টাকা।}$$

উদা. 3. বার্ষিক 100 টাকার প্রত্যক্ষ বার্ষিকীর টাকা 10 বৎসরের জন্য অনাদায়ী থাকিল। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ ধরিয়া উহার মোট পরিমাণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $M=\frac{A}{i}\{(1+i)^n-1\}$

এখানে $A=100, \quad i=\frac{5}{100}=\cdot05, \quad n=10, \quad M=?$

এখন $(1+i)^n=(1+\cdot05)^{10}=(1\cdot05)^{10}$

মনে কর, $x=(1\cdot05)^{10}$

$$\log x=10 \log 1\cdot05$$
$$=10\times\cdot0212=\cdot2120=\log 1\cdot629$$
$$\therefore \quad x=1\cdot629$$

$$\therefore \quad M=\frac{100}{\cdot05}\{(1\cdot05)^{10}-1\}=2000\times(1\cdot629-1)$$

$$=2000\times\cdot629=\frac{2000}{100}\times629=1{,}258 \text{ টাকা।}$$

উদা. 4. সীমা 10,000 টাকা ঋণ করিল এই শর্তে যে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 1,000 টাকার কিস্তিতে পরিশোধ করিবে। কয় বৎসরে ঐ ঋণ পরিশোধ করিবে ?

$$V=\frac{A}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

$$\text{বা, } 10{,}000=\frac{1{,}000}{\cdot05}\left\{1-\frac{1}{(1\cdot05)^n}\right\}$$

বা, $\frac{10,000\times{}^{\cdot}05}{1000}=\{1-(1{}^{\cdot}05^{-n}\}$

বা, $\frac{10,000\times5}{1000\times100}=\{1-(1{}^{\cdot}05)^{-n}\}$

বা, $\frac{5}{10}=1-(1{}^{\cdot}05)^{-n}$

বা, $(1{}^{\cdot}05)^{-n}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

বা, $-n\log 1{}^{\cdot}05=\log 1-\log 2$

বা, $-n\times{}^{\cdot}0212=-{}^{\cdot}3010$

$\therefore\ n=\frac{{}^{\cdot}3010}{{}^{\cdot}0212}=14$ বৎসর ( প্রায় )।

## প্রশ্নমালা 14

1. বার্ষিক সুদের হার $3\frac{1}{2}\%$ হইলে 12 বৎসরের জন্য দেয় 150 টাকার বার্ষিকীর মোট পরিমাণ এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

2. বার্ষিক সুদের হার 4% হইলে 5 বৎসরের জন্য দেয় 300 টাকার বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

3. বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2400 টাকার বার্ষিকীর 20 বৎসর দেয় হইলে বর্তমান মূল্য কত?

4. সত্যবাবু 25,000 টাকা মূল্যের একটি সম্পত্তি ক্রয় করিলেন এবং চুক্তি করিলেন যে তিনি সম্পত্তি ক্রয়ের সাথে সাথেই 10,000 টাকা শোধ করিবেন এবং বাকী টাকা 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 15টি বার্ষিক সমান কিস্তিতে শোধ করিবেন। তাহা হইলে সত্যবাবুকে প্রতিবৎসর কত টাকা দিতে হইবে তাহা নির্ণয় কর।

5. বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10 বৎসর দেয় 100 টাকার প্রত্যক্ষ বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

6. 40,000 টাকার কোন একটি ঋণ 30টি সমান কিস্তিতে পরিশোধ করিতে হইবে। প্রতি কিস্তিতে সুদ ও আসল থাকিলে বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে প্রতি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

7. সৌরেনবাবু 4,00 টাকা এই শর্তে ঋণ গ্রহণ করিলেন যে ঐ ঋণ 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 6টি সমান কিস্তিতে পরিশোধ করিবেন। প্রথম কিস্তি প্রথম বৎসরের শেষে দেয় হইবে। প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

8. বার্ষিক 5% হার সুদে 10 বৎসর চলিবে এইরূপ 150 পাউণ্ডের বার্ষিকী বা 7 বৎসর পরে শুরু হইবে এইরূপ 79 পাউণ্ড 4 শিলিং এর চিরস্থায়ী বার্ষিকী—এই দুইটির মধ্যে কোন্‌টি বেশী লাভজনক ?

9. প্রতি বৎসর শেষে আসল এবং সুদসমেত 10টি সমান কিস্তিতে ঋণ পরিশোধ করিবার শর্তে রাজী হইয়া তপতী 4% চক্রবৃদ্ধিতে 20,000 টাকা ঋণ করিল। প্রত্যেকটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

10. 20 বৎসর শেষে 1,00,000 টাকার নূতন যন্ত্রপাতি ক্রয় করিবার উদ্দেশ্যে একটি ঋণশোধক তহবিল গঠন করা হইল। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ পাওয়া গেলে ঋণশোধক তহবিলের জন্য মোট লাভ হইতে প্রতিবৎসর কত টাকা আলাদা করিয়া রাখিতে হইবে ?

11. 25 বৎসর পরে 50,000 পাউণ্ড মূল্যের যন্ত্রপাতি পালটাইবার জন্য একটি ঋণশোধক তহবিল গঠন করা হইল। বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ পাওয়া গেলে ঋণশোধক তহবিলের জন্য লাভ প্রতিবৎসর কত টাকা আলাদা করিয়া রাখিতে হইবে ?

12. 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে প্রতিবৎসর কত টাকা বিনিয়োগ করিলে 20 বৎসর পরে একটি জিনিস অপসরণ করিয়া অপর একটি জিনিস পুনঃস্থাপন করা যাইবে ? যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য 60,000 টাকা এবং 20 বৎসর পরে এইরূপ যন্ত্রের দাম 25% বাড়িবে বলিয়া মনে করা হয়।

## পঞ্চদশ অধ্যায়

# সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণী

## ( Exponential Series and Logarithmic Series )

15.1. অসীম শ্রেণী $1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$ কে $e$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অর্থাৎ $e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$

সাধারণতঃ $e$-কে আমরা লিখিতে পারি

$$e=\underset{n\to\infty}{Lt}(1+\tfrac{1}{n})^n$$

দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে যদি $\frac{1}{n}<1$ হয় তাহা হইলে আমরা পাই,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$

বা, $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{(1-\frac{1}{n})}{\lfloor 2}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \quad (1)$$

উপরের relation-টি $n$-এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রযোজ্য হয় ( holds good )।

এখন $n$-কে যদি খুব বড় ধরা হয়, তাহা হইলে যেহেতু $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ ইত্যাদি $\to 0$ সেইজন্য $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, প্রভৃতি $\to 1$.

$\therefore$ (1) নম্বরের উভয় দিকে Limit লইলে পাই ( যখন $n\to\infty$ )

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\infty$$

$$\therefore\quad e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\infty.$$

অনুরূপভাবে আমরা প্রমাণ করিতে পারি,

$$e^x = \underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\infty$$

ডানদিকের এই শ্রেণীটিকে বলা হয় সূচক শ্রেণী।

$x$-এর যা খুশি সসীম মান দেওয়া যাইতে পারে।

**15.2. e একটি ধ্রুবক রাশি এবং ইহা 2 ও 3-এর মধ্যে অবস্থিত অর্থাৎ 2<e<3.**

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\infty$$

$$=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\infty$$

ইহা হইতে বলা যায় $e$-এর মান 2 হইতে বড়।

পুনরায় $\lfloor 3 = 3.2.1$

$\therefore\ \lfloor 3 > 2.2.1$ অর্থাৎ $\lfloor 3 > 2^2$

$\therefore\ \frac{1}{\lfloor 3} < \frac{1}{2^2}$

অনুরূপভাবে $\frac{1}{\lfloor 4} < \frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{\lfloor 5} < \frac{1}{2^4}$ ......

$$\therefore\quad e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\infty$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\infty$$

অর্থাৎ $<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

অর্থাৎ $<1+2$

অর্থাৎ $<3$

$\therefore$ $e$-এর মান 3 হইতে ছোট।

$\therefore$ $e$ একটি সসীম সংখ্যা যাহার মান 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী।

অর্থাৎ $2<e<3$.

উদা. 1. প্রমাণ কর :

$$\frac{1^3}{\lfloor 1}+\frac{2^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3}{\lfloor 3}+\frac{4^3}{\lfloor 4}+\ldots=5e$$

$$T_n=\frac{n^3}{\lfloor n}=\frac{n^2}{\lfloor n-1}=\frac{n^2-1+1}{\lfloor n-1}=\frac{n^2-1}{\lfloor n-1}+\frac{1}{\lfloor n-1}$$

$$=\frac{n+1}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}=\frac{n-2+3}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}$$

$$=\frac{n-2}{\lfloor n-2}+\frac{3}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}$$

$$=\frac{1}{\lfloor n-3}+\frac{3}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}$$

$n=1, 2, 3, 4\ldots$ বসাও এবং যেহেতু $\frac{1}{\lfloor -n}=0$, $\lfloor 0=1$

$\therefore\quad T_1=0+3.0+1$

$T_2=0+3.1+\frac{1}{\lfloor 1}$

$T_3=1+3.\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}$

$T_4=\frac{1}{\lfloor 1}+3.\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}$

$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

Vertically যোগ করিয়া পাই,

$$S_\infty=\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}+\cdots\right)+3\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\right)$$

$$=e+3e+e=5e.$$

উদা. 2. $\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1+3}{\lfloor 2}x+\frac{1+3+5}{\lfloor 3}x^2+\cdots\infty=(x+1)e^x$

$$T_n=\frac{n^2}{\lfloor n}x^{n-1}=\frac{n}{\lfloor n-1}x^{n-1}=\frac{n-1+1}{\lfloor n-1}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{\lfloor n-2}x^{n-1}+\frac{1}{\lfloor n-1}x^{n-1}$$

$n=1, 2, 3\cdots$ বসাইয়া এবং vertically যোগ করিয়া পাই,

$$S_\infty=\left(x+\frac{x^2}{\lfloor 1}+\frac{x^3}{\lfloor 2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\infty\right)$$

$$=x\left(1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\infty\right)$$

$$=xe^x+e^x=(x+1)e^x.$$

**15.3. লগারিদম্ শ্রেণী :**

$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \infty,$ $(|x|<1)$ শ্রেণীটিকে লগারিদম্ শ্রেণী বলে।

**প্রমাণ কর** $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \infty$

আমরা জানি, $a^y = e^{y \log e^a}$

$$a^y = e^{y \log e^a} = 1 + (y \log e^a) + \frac{y(\log e^a)^2}{\lfloor 2} + \frac{(y \log e^a)^3}{\lfloor 3} + \cdots$$

$a = 1 + x$ বসাও।

$$\therefore \quad (1+x)^y = 1 + y \log e^{(1+x)} + \frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log e^{(1+x)}\right\}^2 + \cdots \to (1)$$

এখন যেহেতু $|x|<1$, দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots \to (2)$$

যদি $|x|<1$ হয় তাহা হইলে (1) ও (2) হইতে পাই,

$$1 + y \log_e (1+x) + \frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2 + \cdots\cdots$$

$$= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots$$

যেহেতু ইহা একটি অভেদ

$\therefore$ উভয় দিকের $y$-এর সহগ সমান হইবে।

$$\therefore \quad \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \cdots \infty \to (3)$$

**15.4.** সাধারণ লগারিদমে নিধান 10 এবং এই লগারিদমে নিধান $e$ হয়। সাধারণ লগারিদম্ হইতে এই লগারিদম্ পৃথক্। এই লগারিদম্‌কে Nepierian লগারিদম্ বলা হয়।

মনে কর, একটি সংখ্যা $n$

$$\therefore \quad \log_{10}{}^n = \log_e{}^n \times \log_{10}{}^e$$

বা, $\log_{10}{}^n = \log_e{}^n \times \frac{1}{\log_e{}^{10}}$

নেপিরিয়ান লগারিদম্‌কে $\frac{1}{\log_e{}^{10}}$ দ্বারা গুণ করিলে সাধারণ লগারিদম্

পাওয়া যায়। $\frac{1}{\log_e 10}$-কে সাধারণ লগারিদম্ প্রণালীর মডিউলাস বলে।

সাধারণ লগারিদম্ প্রণালীর মডিউলাস

$$=\frac{1}{\log_e 10}=\frac{1}{2{\cdot}30258509}={\cdot}43429448.$$

এই মডিউলাস্‌কে $\mu$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

**কতকগুলি প্রয়োজনীয় results ঃ**

(1) $e=1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty$

(2) $e^x=1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty$

(3) $e^{-x}=1-\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\cdots\cdots\infty$

(4) $e^{-1}=\frac{1}{e}=1-\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty$

(5) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\infty$

(6) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty$

(7) $\frac{e+e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty$

(8) $\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots\cdots\infty$

**উদা. 3.** প্রমাণ কর ঃ

$$e+\frac{1}{e}=2\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\right)$$

আমরা জানি, $e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\to(1)$

(1)-নম্বরে $x=1$, $x=-1$ বসাইয়া পাই,

$$e=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\to(2)$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}=1-1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\cdots\cdots\to(3)$$

(2)+(3),

$$e+\frac{1}{e}=2\left[1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\right]$$

## প্রশ্নমালা 15

1. প্রমাণ কর :

(i) $\frac{1}{\lfloor\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{4}}-\frac{1}{\lfloor\underline{5}}+\cdots\cdots=\frac{1}{e}$

(ii) $1+\frac{1+2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1+2+2^2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots=e^2-e$

(iii) $1+\frac{1+2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1+2+3}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots=\frac{3e}{2}$

(iv) $1+\frac{2^4}{\lfloor\underline{2}}+\frac{3^4}{\lfloor\underline{3}}+\frac{4^4}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots=15e$

(v) $\frac{1^2.2^2}{\lfloor\underline{1}}+\frac{2^2.3^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{3^2.4^2}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots=27e$

(vi) $1+\frac{1+a}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1+a+a^2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1+a+a^2+a^3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots=\frac{e-e^a}{1-a}$

(vii) $\left\{1+\frac{1}{\lfloor\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\right\}\times\left\{1-\frac{1}{\lfloor\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}-\cdots\right\}=1$

(viii) $\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots=1$

(ix) $\frac{2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{4}{\lfloor\underline{5}}+\frac{6}{\lfloor\underline{7}}+\cdots=\frac{1}{e}$

(x) $\dfrac{\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\underline{6}}+\cdots}{\frac{1}{\lfloor\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{5}}+\cdots}=\frac{e-1}{e+1}$

(xi) $\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{\lfloor\underline{4}}+\frac{3^2}{\lfloor\underline{5}}+\cdots=2e-5$

(xii) $\dfrac{1+\frac{2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{2^2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{2^3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots}{1+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{5}}+\frac{1}{\lfloor\underline{7}}+\cdots}=e$

(xiii) $\dfrac{1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\underline{6}}+\cdots}{1+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{5}}+\frac{1}{\lfloor\underline{7}}+\cdots}=\frac{e^2+1}{e^2-1}$

2. $\dfrac{e^{5x}+e^{x}}{e^{3x}}$ এর বিস্তৃতি (ascending powers of $n$) নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে $\left(1+\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\right)^2$-এর $x^n$-এর সহগ $\dfrac{2^{n-1}}{\lfloor n}$.

4. দেখাও যে $1+\dfrac{a+bx}{\lfloor 1}+\dfrac{(a+bx)^2}{\lfloor 2}+\cdots$

এর $x^n$ এর সহগ $\dfrac{e^a b^n}{\lfloor n}$.

5. প্রমাণ কর $2\log n-\log(n+1)-\log(n-1)$

$$=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\cdots$$

6. প্রমাণ কর $2\log n-\log(n+1)-\log(n-1)$

$$=2\left\{\frac{1}{2n^2-1}+\frac{1}{3(2n^2-1)^3}+\frac{1}{5(2n^2-1)^5}+\cdots\right\}$$

7. প্রমাণ কর $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+1)^2}+\dfrac{1}{3(n+1)^3}+\cdots$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$$

8. $1+\dfrac{1}{\lfloor 2}+\dfrac{1.3}{\lfloor 4}+\dfrac{1.3.5}{\lfloor 6}+\cdots$ কে in terms of $e$-তে প্রকাশ কর।

যোগফল নির্ণয় কর :

9. $\dfrac{1^2}{\lfloor 1}+\dfrac{2^2}{\lfloor 2}+\dfrac{3^2}{\lfloor 3}+\cdots$

10. $\dfrac{1^3}{\lfloor 1}+\dfrac{2^3}{\lfloor 2}+\dfrac{3^3}{\lfloor 3}+\cdots$

11. প্রমাণ কর :

(a) $\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{6.7}+\cdots\infty=1-\log 2.$

(b) $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{3.4.5}+\dfrac{1}{5.6.7}+\cdots=\log 2-\frac{1}{2}.$

12. যোগফল নির্ণয় কর :

$$1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6}+\cdots$$

প্রমাণ কর :

13. $1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{2}\log 12.$

14. $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\cdots$

15. $\log_e{}^{(n+1)}-\log_e{}^{(n-1)}=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)$

16. $\log_e{}^{(1+3x+2x^2)}=3x-\frac{5x^2}{2}+\frac{9x^3}{3}-\frac{17x^4}{4}+\cdots$

17. (i) $\log_e{}^{(1-x)}=-2\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots\right\}$

(ii) $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots=1-\log_e{}^2.$

# উত্তরমালা

## প্রশ্নমালা 1

1. (*i*) $\frac{1}{xy^{5}}$, (*ii*) $\frac{1}{xy^{\frac{2}{3}}}$, (*iii*) $\frac{y^3}{x^3}$

2. (*i*) 1, (*ii*) $\frac{y^5}{x^{13}}$, (*iii*) 1, (*iv*) $\frac{1}{4}$, (*v*) 6, (*vi*) 216.

(*vii*) $\frac{17\sqrt{5}+35}{55}$ (*viii*) $\frac{21\sqrt{2}-10}{2\cdot5}$, (*ix*) 1,

(*x*) $x^a$, (*xi*) 27, (*xii*) $\left(\frac{x}{y}\right)^{m+n}$, (*xiii*) 1,

(*xiv*) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$, (*xv*) 1, (*xvi*) 1, (*xvii*) 1.

13. (*i*) $x^a$ (*ii*) 1.

## প্রশ্নমালা 2

1. (*i*) $35\sqrt{10}$ (*ii*) $12\sqrt[4]{6}$ (*iii*) $12\sqrt[12]{648}$ (*iv*) $7+4\sqrt{6}$

2. (*i*) $\frac{3}{5}\sqrt{30}$ (*ii*) $\frac{4}{5}\sqrt[6]{108}$ (*iii*) $\frac{1}{12}\sqrt[6]{180}$ (*iv*) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. (*i*) $3+2\sqrt{2}$ (*ii*) $1-\sqrt[3]{2^5}+\sqrt[3]{2^{\frac{3}{4}}}$ (*iii*) $(\sqrt{3}-1)$

(*iv*) $\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$ (*v*) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$ (*vi*) $x^2-\sqrt{x^4-1}$

(*vii*) $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

4. (*i*) $5-\sqrt{3}$ (*ii*) $\sqrt[4]{6}(\sqrt{2}-1)$ (*iii*) $4a+2\sqrt{4a^2-25}$

(*iv*) $\pm(3+2\sqrt{2})$ (*v*) $\pm(2\sqrt{7}-\sqrt{5})$ (*vi*) $\pm(5-2\sqrt{3})$

(*vii*) $\pm(3-2\sqrt{2})$ (*viii*) $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ 5. 14·070

6. (*i*) $\sqrt{3}$ বা 1·732 (*ii*) 0 7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 8. $\frac{2}{3}$ 9. $(2+\sqrt{3})$

10. 195 11. 289 12. 0 13. 0 14. 0 18. 0

19. $\frac{4m^2-1}{4m^2-3}$.

## প্রশ্নমালা 3

**1.** (*i*) $\pm(3+7i)$ (*ii*) $\pm(5-2i)$ (*iii*) $\pm(3-4i)$
(*iv*) $\pm(5-3i)$ (*v*) $\pm(a+i)$ **2.** (*i*) 5 (*ii*) 5
(*iii*) 1 (*iv*) $\sqrt{2}$ **3.** $4-3i\sqrt{6}$ **4.** $-234$.

## প্রশ্নমালা 4

**1.** $l, m, n$ ধ্রুবক হইলে $lmn=1$ হয়। **4.** $16\frac{56}{199}$ দিন **5.** $\pm 8$
**6.** 346·5 বর্গফুট **7.** 45 বর্গফুট **8.** 784 ফুট **9.** 32
**10.** $\frac{mn}{p}$ **11.** $12x^2-25xy+12y^2=0$ **15.** $b^2x^2+a^4y^2=a^2b^2$
22. 66 টাকা 23. 1610 ফুট, 305·9 ফুট 24. 6 ইঞ্চি।

## প্রশ্নমালা 5

**1.** (*i*) 14, $2n$ (*ii*) 46, $3n-5$ (*iii*) $\frac{19}{3}$, $\frac{2}{3}(n+1)$
(*iv*) 20, 30, $2n$ (*v*) $\frac{143}{3}$, $\left(\frac{23+4n}{3}\right)$ (*vi*) $a+17d$,
$\{a+d(2n-1)\}$ **2.** $m=-23$
**3.** (*i*) 11 তম পদ (*ii*) 21 তম পদ (*iii*) 34 তম পদ
**4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left(2\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{2}\cdots\cdots\right)$ **5.** 94 তম পদ
**6.** 94 তম পদ **7.** 3, 5, 7, 9, 11⋯ **8.** $(p+q-m)$
**9.** 0. **10.** 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51.
**11.** 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82. **12.** 8.
**13.** (*i*) 1335. (*ii*) 420. (*iii*) $-\frac{5}{2}$.
(*iv*) $\frac{85}{4}$. (*v*) $n(3-2n)$ (*vi*) $65\sqrt{3}$
(*vii*) $2n$. (*viii*) $\frac{n(n+1)}{2}$. (*ix*) $\frac{n}{(a+b)}\left[na-\frac{n+1}{2}.b\right]$
**14.** 20. **15.** 3, 7, 11. *or*, 11, 7, 3.
**18.** (*i*) 1035. (*ii*) 2070. **19.** 121. **21.** 7.
**22.** 2460. **23.** $n=12$. **24.** 2401.
**25.** (*i*) $\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32)$. (*ii*) $_{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$
(*iii*) $\frac{n}{4(n+1)}$ (*iv*) $n^2(2n^2-1)$
(*v*) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ (*vi*) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
(*vii*) $\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}$ (*viii*) $\frac{n}{3}\left(4n^2+6n-1\right)$
**26.** 82·50 টাকা, 87·50 টাকা, 92·50 টাকা।

## প্রশ্নমালা 6

1. (i) 512. (ii) 512. (iii) $\frac{y^6}{x^4}$ (iv) $21\times(\frac{2}{3})^7$

2. 1, 4, 16.

3. 1, 2, 4 বা, 4, 2, 1.

4. (i) $-14762$. (ii) $\frac{a\{1-(-r)^n\}}{1+r}$.

(iii) $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$. (iv) $-\frac{31}{2}(2-\sqrt{2})$.

5. (i) 16, 32, 64, 128, 256. (ii) 4, 16, 64.

(iii) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$.

6. (i) $\frac{6}{8}$, $\{(10)^{n+1}-10-9n\}$ (ii) $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

(iii) $\left[\frac{20}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{2n}{9}\right]$

8. 16, 24, 36, 54, 81.

12. 16 টাকা, 16,384 টাকা

17. 27 ও 3 বা, 3 ও 27,

18. 2, 5, 8.

19. 32, 18 বা, 18, 32.

22. (3, 48)

## প্রশ্নমালা 7

1. (i) বীজদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান।

(ii) বীজদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

(iii) বীজদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ।

(iv) বীজদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান।

3. $-1$ বা, $-\frac{2}{9}$.

6. 0.

8. বীজদ্বয় কাল্পনিক।

10. (i) $-q^3+3qr$. (ii) $-\frac{q}{r}$.

11. (i) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (ii) $\mp\frac{b}{a^2}\sqrt{b^2-4ac}$

(iii) $\frac{3abc-b^3}{a^2c}$ (iv) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$ (v) $\frac{3ab-b^3}{a^2c}$

(vi) $\pm\frac{(b^2-ac)}{a^2c}\sqrt{b^2-4ac}$

(vii) $\frac{pqb^2+ac(p-q)^2}{a^2}$

12. (i) $-\frac{p}{q}$ (ii) $\pm\frac{1}{q}\sqrt{p^2-4q}$ (iii) $\frac{3pq-p^3}{q^3}$

(iv) $\frac{3pq-p^3}{q^2}$ (v) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$ (vi) $pq^4(3q-p^2)$

(vii) $1-p+p^2-q-pq+q^2$

13. (i) $\frac{p^2-4p^2q+2q^2}{q^2}$ (ii) $\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p}{q^2}$ (iii) $2p^2+q$

14. (i) $x^2-5x+6=0$ (ii) $x^2-4x+1=0$

(iii) $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2$

15. (i) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$

(ii) $a^2x^2+3abx+2b^2+ac=0$

(iii) $acx^2+b(a+c)x+(a+c)^2=0$

(iv) $a^4x^2-a^2(2b^2-4ac)x+b^2(b^2-4ac)=0$

(v) $acx^2-bx+1=0$ (vi) $ac(x+1)^2=b^2x$

16. (i) $qx^2-p(q+1)x+(q+1)^2=0$

(ii) $x^2-px-(9q-2p^2)=0$

(iii) $x^2-p(m+n)x+mnp^2+q(m-n)^2=0$

17. $x^2-68x+256=0$

18. $4x^2-10(1+m)x+4m^2+17m+4=0$

19. $3x^2-16x+16=0$ 20. $x^2-50x+49=0$

21. $12x^2-8x+1=0$ 23. $bcx^2+(b^2+ca)x+ab=0$

25. $9x^2-79x+25=0$ 27. $4x^2-15x+18=0$

28. $2x^2+(b-2\sqrt{c})x-b\sqrt{c}=0$ 31. 8

32. $4x^2-12x+5=0$ 33. $cx^2+bx+a=0$

34. $2(q+q')-pp'$ 39. $cx^2+bx+a=0$

50. $k=\frac{7}{4}$ বা, $k=-\frac{11}{8}$

53. (i) $-\frac{49}{8}$ (ii) 3 (iii) 5 (iv) $\frac{26}{3}$

54. (i) 4 (ii) 8 58. 3

## প্রশ্নমালা 8 (A)

1. (*i*) 30 (*ii*) 1680 (*iii*) 720 2. (*i*) 10 (*ii*) $\frac{1}{7}$ (*iii*) $2^n n^2(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 5.3.1$ 3. (*i*) 4 বা 5 (*ii*) $m=8$, $n=2$ 5. 4 8. (*i*) 20 (*ii*) 120 (*iii*) 120 9. 288 10. 60 11. 1560 12. 720 13. 576, 4320 14. 720, 120, 600, 96 15. (*i*) 5040 (*ii*) $\frac{\underline{|8}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}}$ (*iii*) 2520 (*iv*) 1260 (*v*) 3632428800 (*vi*) 34650 16. $\underline{|15} - 2\underline{|14}$ 17. $\underline{|n-1}\{n-2\}$ 18. 154 19. 111 20. 40320, 720 21 1440 22. 967680 23. 1260 24. $\frac{\underline{|33}}{\underline{|4}(\underline{|3})^2(\underline{|5})^3}$ 25. 14400 26. 3125 27. $\underline{|6}$ 28. $\underline{|29}$ 29. $\underline{|5}$ 30. $\frac{1}{2}\underline{|7}$

## প্রশ্নমালা 8 (B)

1. (*i*) 3 (*ii*) 4960 (*iii*) 102 3. 10 4. 7 5. (*i*) $m-1$ (*ii*) $n=14$ 7. 495 8. 28665 9. 462, 256 10. 246, 11. 210, 371 12. 201376, 31465, 169911 13. 196, 252 14. ${}^{60}C_3, {}^{59}C_2$ 15. $\frac{\underline{|20}}{2\,\underline{|10}\,\underline{|10}}$ 16. $\frac{\underline{|20}}{\underline{|4}\,\underline{|4}\,\underline{|4}\,\underline{|4}\,\underline{|4}}$ 17. 371, 210 18. $[{}^{12}C_2-(C^4{}_2-1)]$ 19. 220 20. $n=8, r=3$ 21. $\frac{n(n-3)}{2}$.

## প্রশ্নমালা 9

1. (*i*) $x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5x^2a^3+5xa^4+a^5$

(*ii*) $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4x^3y^3+y^4$

(*iii*) $x^7+7x^5+21x^3+35x+\frac{35}{x}+\frac{21}{x^3}+\frac{7}{x^3}+\frac{7}{x^5}+\frac{1}{x^7}$

(iv) $32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5$

$+10x^2+5x^4)$ (vi) $1+\frac{21}{2}x+\frac{189}{4}x^2+\frac{945}{8}x^3+\frac{2835}{16}x^4$

$+\frac{5103}{32}x^5+\frac{5103}{64}x^6+\frac{2187}{123}x^7$ .

(vii) $729y^6-972y^5+540y^4-160y^3+\frac{80}{3}y^2-\frac{2}{27}y+\frac{32}{729}$

(viii) $x^2-15\frac{x^{\frac{8}{5}}}{y^2}+90\frac{x^{\frac{6}{5}}}{y^4}-270\frac{x^{\frac{4}{3}}}{y^6}+405\frac{x^{\frac{2}{5}}}{y^8}-\frac{243}{y^{10}}$

(ix) $x^8+4x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^7}+\frac{1}{x^{12}}$ 2. $\frac{12155}{2^6}x^8$ 3. 252

4. ${}^{2n}C_{n-1}b^2$ 5. $2835\ x^4$

6. (i) $\left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1}+(2n+1)\left(\frac{x}{y}\right)^{2n-1}+\frac{(2n+1).2n}{21}\left(\frac{x}{y}\right)^{2n-3}$

$+\cdots\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}$

সাধারণ পদ $=\frac{(2n+1)2n(2n-1)\cdots(2n+2-r)}{\lfloor r}\left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1-2r}$

(ii) ·997002 7. (i) $12012\frac{3^{18}}{x^6}$ (ii) $\frac{2835}{8}$ (iii) 252

(iv) $126a-\frac{126}{a}$ (v) $630\times6^5x^{10}y^4,\ 630\times6^5x^{10}y^4$

9. (ii) $1120x^4y^4$ 10. $110565a^4$ 11. 540 12. $-252$

13. (i) $\frac{\lfloor m}{\lfloor\frac{m-r}{2}\lfloor\frac{m+r}{2}}$ (ii) $-2288y^3$ (iii) $10c^9$ (iv) 1365 (v) $2^7.3^3.120$

15. $r=8$, 495

16. (i) $\frac{1216215}{2^6}$ (ii) 195 (iii) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}$

(iv) $184756a^{10}b^{10}$ (v) $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m\lfloor n}$ (vi) 70

20. 1, 2, 7 22. ·997

## প্রশ্নমালা 10

1. (*i*) $1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^2+\cdots\cdots$

$$t_{r+1}=(-1)^{r-2}\frac{3}{2^r}\cdot\frac{1\,3.5\cdots\cdots(2r-5)}{\lfloor r}x^r$$

(*ii*) $1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\cdots\cdots$

$$t_{r+1}=\frac{(-1)^r1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{\lfloor r}x^r$$

(*iii*) $1+\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{9}x^4+\frac{40}{81}x^6+\cdots\cdots$

$$t_{r+1}=\frac{(-1)^{2r}2.5.7\cdots\cdots(3r-1)}{3^r\lfloor r}x^{2r}$$

(*iv*) $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\cdots\cdots$

$$t_{r+1}=(9)^{2},\frac{2.5\,8\cdots\cdots(3r-1)}{3^r\lfloor r}(3x)^r$$

(*v*) $1-6x+24x^2-80x^3+\cdots\cdots$

$$t_{r+1}=\frac{(-1)^r3.4.5\cdots\cdots(r+2)}{\lfloor r}(2x)^r$$

2. $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}x^3+\cdots\cdots$  3. $\frac{r+1)(r+2)(r+3)}{6}$

4. $2^r$  5. $\frac{b^r}{a^r+1}x^r$  7.  8. 121

9. $4r$  11. $1-2x-x^2-\frac{4}{3}x^3-\cdots$

12. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^6$  13. $1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots\cdots$

14. (*i*) ·997002 (*ii*) 9·997 (*iii*) 1·005 (*iv*) 4·9597

20. (*i*) $\sqrt{27}$ (*ii*) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (*iii*) $(4)^{\frac{1}{3}}$ (*iv*) 1

## প্রশ্নমালা 11

1. $\frac{3}{2}$  2. $\frac{3}{4}$  3. $\frac{2}{3}$  4. 2  5. $\frac{5\sqrt{5}+11}{4}$

6. $7(7+\sqrt{42})$  7. $\frac{1+x}{(1-x)^2}$  8. 1  9. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

10. $(2)^{\frac{1}{3}}$  11. $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{3}}$  12. $\sqrt{3}$  13. $\frac{13}{24}$  14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $\frac{171}{495}$  16. $\frac{8}{9}$  17. $\frac{62}{495}$  18. $\frac{14}{9}$  19. $\frac{9}{110}$

## প্রশ্নমালা 12

2. (*i*) 4 (*ii*) 6 (*iii*) 3 (*iv*) $\frac{1}{4}$ (*v*) 4

3. 1·059 4. (*i*) − 2·3467874 (*ii*) ·8266063 5. $x=4$

6. (*i*) 11·15 (*ii*) 14050 (*iii*) ·5776 (*iv*) ·5988
(*v*) 261 (*vi*) 1·248 (*vii*) 2·588 (*viii*) 578·8
(*ix*) 20·19 (*x*) 2·545 (*xi*) ·006651 (*xii*) 1·892
(*xiii*) ·9703

14. (*i*) $\dfrac{\log a}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$ (*ii*) 1·59 (*iii*) 1·77 (*iv*) $n=$·009

15. $x=2·71,\ y=1·71$ 16. (*i*) 2·0969100 (*ii*) 1·8750613

## প্রশ্নমালা 13

1. 589·90 টাকা 2. সুদ-আসল $(A)=1215$ টাকা
চক্রবৃদ্ধি সুদ $=215$ টাকা 3. 1164·31 টাকা

4. 11·46 টাকা 5. 4·1% 6. 4936·29 টাকা
7. 2000 টাকা 8. 16,400 টাকা 9. 185·25 টাকা
10. 400 টাকা 11. 79·70 টাকা 12. 2000 টাকা
13. 15·8 বৎসর 14. 1655 টাকা 15. 916·86 টাকা
16. 1269·57 টাকা 17. 4·5% 18. 2 বৎসর
19. 1164·31 টাকা 20. 15 বৎসর (প্রায়) 21. 9·3 বৎসর
22. 2,00,000 টাকা

## প্রশ্নমালা 14

1. 2190·28 টাকা 2. 1335·58 টাকা 3. 312·00 টাকা
4. 1444·53 টাকা 5. 811·06 টাকা 6. 2316 টাকা
7. 1787·71 টাকা 8. প্রথমটি লাভজনক 9. 2470·14 টাকা
10. 3021·15 টাকা 11. 1205 টাকা (প্রায়) 12. 2266 টাকা

## প্রশ্নমালা 15

2. $2\left\{1+\dfrac{2^2x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{2^2x^4}{\lfloor 4}+\cdots\dfrac{2^{2n}x^{2n}}{\lfloor 2n}+\cdots\right.$

8. $\sqrt{e}$ 9. $2e$ 10. $5e$ 12. $\frac{3}{2}\log_e 2$

# ত্রিকোণমিতি ( Trigonometry )

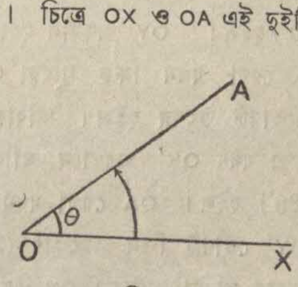
## প্রথম অধ্যায়

## কোণের পরিমাণ

## ( Measurement of an Angle )

### 1.1. ত্রিকোণমিতিক কোণ :

কোণ সম্বন্ধে জ্যামিতিতে বলা হইয়াছে যে, দুইটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হইলে ঐ বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন হয়। যে বিন্দুতে সরলরেখা দুইটি মিলিত হইল তাহাকে কোণটির শীর্ষ এবং সরলরেখা দুইটিকে কোণটির দুইটি বাহু বলা হয়। দুইটি সরলরেখা দ্বারা যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহা $0°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত পরিমাপ করা হয় এবং কোণের মান অনুযায়ী কোণটিকে সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ বা প্রবৃদ্ধকোণ বলা হয়। চিত্রে OX ও OA এই দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়া XOA কোণ উৎপন্ন করিল। অর্থাৎ $\angle XOA = \theta$ একটি কোণ হইল। এই কোণটি সূক্ষ্মকোণ হইবে যদি $0 < \theta < 90°$ হয়। কোণটি স্থূলকোণ হইবে যদি $90° < \theta < 180°$ এবং কোণটি প্রবৃদ্ধকোণ হইবে যদি $180° < \theta < 360°$ হয়। জ্যামিতিতে এই কোণ সব সময় ধনাত্মক ধরা হয় এবং ঋণাত্মক কোণ সম্বন্ধে কোন সময়ই আলোচনা হয় না।

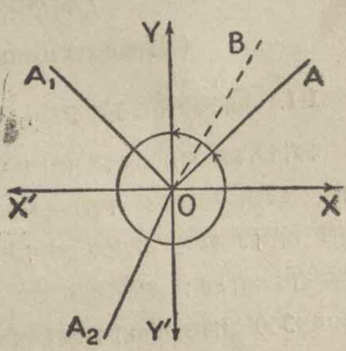



চিত্র—1

এখন মনে কর, OX রেখা হইল প্রারম্ভিক রেখা। OX রেখা যদি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া আসিয়া ( anticlockwise ) কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে সেই কোণকে ধনাত্মক ( positive ) কোণ বলা হয়। আবার OX রেখা যদি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার দিকে ঘুরিয়া আসিয়া কোণ উৎপন্ন করে তাহা হইলে সেই কোণটিকে ঋণাত্মক ( Negative ) কোণ বলা হয়। অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনে ধনাত্মক কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণনে ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন হয়।

## 1.2. কোণের পরিমাণ :

মনে কর, একই সমতলে XOX′ সরলরেখা ও YOY′ সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইয়া O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। ইহার ফলে সমগ্র তলটি চারিটি পাদে (Quadrant) বিভক্ত হইয়াছে। প্রথম পাদটি হইল XOY, দ্বিতীয় পাদ YOX′, তৃতীয় পাদ X′OY′, চতুর্থ পাদ Y′OX। মনে কর OA সরলরেখা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে OX অবস্থান হইতে ঘুরিতে লাগিল। এইভাবে ঘূর্ণনের ফলে প্রথমে XOA কোণ উৎপন্ন হইল। ইহা যেহেতু 90° কোণ অপেক্ষা ছোট অতএব XOA কোণটি সূক্ষ্মকোণ হইল। OA অবস্থান হইতে কিছু ঘুরিয়া OA সরলরেখা যখন OY অবস্থানে আসিল তখন XOY কোণটি এক সমকোণ (90°) হইল। OY অবস্থান হইতে




চিত্র—2

OA রেখা যখন কিছু ঘুরিয়া $OA_1$ অবস্থানে আসিল তখন $XOA_1$ স্থূলকোণটি উৎপন্ন হইল। আবার $OA_1$ অবস্থান হইতে OA রেখা কিছু ঘুরিয়া যখন OX′ অবস্থানে আসিল তখন XOX′ কোণটি দুই সমকোণ (180°) হইল। OA রেখা যখন আবার OY′ অবস্থানে আসিল তখন XOY′ কোণটি তিন সমকোণ (270°) হইল। OA রেখা যখন সম্পূর্ণ একবার ঘুরিয়া আসিয়া OX এর সহিত মিলিত হইল তখন সমগ্র XOA কোণটি চারি সমকোণ (360°) হইল। এখন যদি OA রেখা OX অবস্থান হইতে সম্পূর্ণ একপাক ঘুরিয়া আরও কিছু বেশী ঘুরিয়া আসে, তবে যে কোণটি (∠XOB) উৎপন্ন হইবে তাহা চারি সমকোণ অপেক্ষা বড়। অর্থাৎ পূর্ববর্তী কোণটি যদি $\theta$ হয় তাহা হইলে পরবর্তী কোণটি $360°+\theta$ হইবে। OA সরলরেখা যদি OX অবস্থান হইতে অনুরূপভাবে সম্পূর্ণ দুপাক ঘুরিয়া আসিয়া OB অবস্থানে আসে তাহা হইলে যে কোণ উৎপন্ন হইবে তাহা হইল $360°\times 2+\theta$।

এইভাবে ত্রিকোণমিতিতে যে কোন মাপের কোণ, ধনকোণ বা ঋণকোণ আমরা লইতে পারি।

কোন কোণের পরিমাণ নির্ণয়ের জন্য তিনটি পদ্ধতি আছে। যেমন—

(i) ষষ্টিক পদ্ধতি ( Sexagesimal system )

(ii) শতক পদ্ধতি ( Centesimal system )

(iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি ( Circular system )

(i) **ষষ্টিক পদ্ধতি**—এই পদ্ধতিতে একটি সমকোণকে 90টি সমান অংশে ভাগ করা হয় এবং প্রতি অংশকে এক ডিগ্রী ( $1^\circ$ ) বলা হয়। এক ডিগ্রীকে আবার 60টি সমান অংশে ভাগ করা হয় এবং এক-একটি ভাগকে এক মিনিট ( $1'$ ) বলা হয়। অনুরূপভাবে এক মিনিটকে 60টি সমান অংশে ভাগ করা হয় এবং এক একটি ভাগকে এক সেকেণ্ড ( $1''$ ) বলা হয়।

1 সমকোণ $= 90^\circ$ ( ডিগ্রী )

$1^\circ$ ( ডিগ্রী ) $= 60'$ ( মিনিট )

$1'$ ( মিনিট ) $= 60''$ ( সেকেণ্ড )।

কোণের পরিমাপ ষষ্টিমূলক এককের সাহায্যে বেশী করা হয়।

(ii) **শতক পদ্ধতি**—এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে একশতটি সমান অংশে ভাগ করা হয় এবং তাহার একটি অংশকে এক গ্রেড ( grade ) বলা হয়। এক গ্রেডকে আবার একশতটি সমান অংশে ভাগ করা হয়। এক-একটি অংশকে এক শতাংশমূলক মিনিট বলা হয়। এক মিনিটকে আবার একশতটি অংশে ভাগ করা হয়। এক-একটি অংশকে এক শতাংশমূলক সেকেণ্ড বলা হয়।

1 সমকোণ $= 100$ গ্রেড $= 100^g$

$1^g$ গ্রেড $= 100$ শতাংশ মিনিট $= 100^`$

$1^`$ শতাংশ মিনিট $= 100$ শতাংশ সেকেণ্ড $= 100^{``}$

**মন্তব্য :** ষষ্টিক পদ্ধতিতে এক মিনিটকে লেখা হয় $1'$ চিহ্ন দ্বারা এবং এক সেকেণ্ডকে লেখা হয় $1''$ চিহ্ন দ্বারা।

আবার শতক পদ্ধতিতে এক শতাংশ মিনিটকে $1^`$ চিহ্ন দ্বারা এবং এক শতাংশ সেকেণ্ডকে $1^{``}$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়।

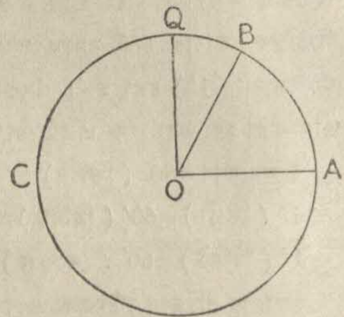
(iii) **বৃত্তীয় পদ্ধতি**—যে কোন বৃত্তে তাহার ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ কাটা হইলে ঐ বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক রেডিয়ান ($1^c$) বলে। ইহা একটি ধ্রুবক কোণ এবং ইহার পরিমাণ $57^\circ 17' 44{\cdot}8''$. এই পদ্ধতিতে 1 রেডিয়ানকে একক ধরা হয়।

## 1·3. উপপাদ্য ঃ

### উপপাদ্য 1

**প্রমাণ কর যে রেডিয়ান পরিমিত কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।**

মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O, চাপ AB, ব্যাসার্ধ $r$ এবং চাপ AB = ব্যাসার্ধ $r$।




চিত্র—3

সূত্রানুসারে, $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান $(1^c)$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle AOB$ ধ্রুবক।

**অঙ্কন।** যেহেতু কোন বৃত্তের চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান, অতএব

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOQ} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AQ} = \frac{\text{ব্যাসার্ধ}}{\frac{1}{4}\text{ পরিধি}} = \frac{r}{\frac{2\pi r}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

[ যেহেতু $\angle AOQ$ এক সমকোণ, অতএব চাপ AQ ঐ বৃত্তের পরিধির এক-চতুর্থাংশ হইবে। $\therefore$ চাপ $AQ = \frac{1}{4}$ পরিধি $= \frac{2\pi r}{4}$. ]

$\therefore \quad \angle AOB = \frac{2}{\pi} \times \angle AOQ = \frac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ।

$\therefore$ অর্থাৎ 1 রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ = ধ্রুবক।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে রেডিয়ান পরিমিত কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।

**মন্তব্য ঃ** 1 রেডিয়ান $= 1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ

$$= \frac{2}{\pi} \times 90^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{\cdot}14159}$$

$= 57{\cdot}29577$ ডিগ্রী $= 57^\circ 17' 44{\cdot}8''$ (প্রায়)।

এবং 1 ডিগ্রী $= {\cdot}0174533$ রেডিয়ান (প্রায়)।

আবার 1 রেডিয়ান $=\frac{2}{\pi}\times 90^\circ$

$\therefore\ 90^\circ=\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $=\frac{\pi^c}{2}$

$180^\circ=$ দুই সমকোণ $=\pi$ রেডিয়ান $=\pi^c$

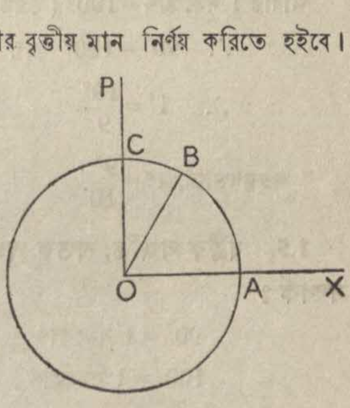
$360^\circ=$ চারি সমকোণ $=2\pi$ রেডিয়ান $=2\pi^c$.

## উপপাদ্য 2

**প্রমাণ কর যে কোন বৃত্তের কোন চাপ ও ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ চাপ-সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান হইবে।**

অর্থাৎ কোন বৃত্তের $S$-একক দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ যদি বৃত্তের কেন্দ্রে $\theta$-রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ যদি $r$-একক হয় তাহা হইলে $\theta=\frac{S}{r}$ বা $S=r\theta$ হইবে।

মনে কর, XOP একটি কোণ। ইহার বৃত্তীয় মান নির্ণয় করিতে হইবে। O-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ ($OA=r$) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। এই বৃত্ত OP-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন $\angle AOC$, AC চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ হইল। OA-এর সমান করিয়া AB চাপ কাটিয়া লওয়া লইল এবং OB যোগ করা হইল।




চিত্র—4

সূত্রানুসারে $\angle AOB=1$ রেডিয়ান।

যেহেতু কোন বৃত্তের চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান,

অতএব $\frac{\angle XOP}{\angle AOB}=\frac{\text{বৃত্তচাপ AC}}{\text{বৃত্তচাপ AB}}=\frac{\text{বৃত্তচাপ AC}}{\text{ব্যাসার্ধ OA}}$

$=\frac{S}{r}$ ( $\because$ বৃত্তচাপ $AC=S$ এবং ব্যাসার্ধ $OA=r$ দেওয়া আছে )

$$\therefore \quad \angle XOP = \frac{S}{r} \times \angle AOB$$

$$= \frac{S}{r} \times \text{এক রেডিয়ান} = \frac{S}{r} \text{ রেডিয়ান।}$$

এখন যেহেতু AC বৃত্তচাপটি ঐ বৃত্তের কেন্দ্র O-তে $\theta$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে,

অতএব $\theta = \frac{S}{r}$ রেডিয়ান হইল ;

বা, $S = r\theta$.

$\therefore$ কোণের বৃত্তীয় মান $= \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$ ।

**1.4. ষষ্টিক পদ্ধতি ও শতক পদ্ধতির পারস্পরিক সম্পর্ক :**

1 সমকোণ $= 90^\circ$ ( ডিগ্রী )

আবার 1 সমকোণ $= 100^g$ ( গ্রেড )

$\therefore \quad 90^\circ = 100^g$ বা, $9^\circ = 10^g$

$$\therefore \quad 1^\circ = \frac{10^g}{9}$$

অনুরূপভাবে, $1^g = \frac{9^\circ}{10}$.

**1.5. ষষ্টিক পদ্ধতি, শতক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতির পারস্পরিক সম্পর্ক :**

$90^\circ = 1$ সমকোণ

$100^g = 1$ সমকোণ

$\frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ

$$90^\circ = 100^g = \frac{\pi^c}{2} \text{ বা } 180^\circ = 200^g = \pi^c \quad \cdots \quad (1)$$

মনে কর, একটি কোণের পরিমাণ ষষ্টিক পদ্ধতিতে $D^\circ$, শতক পদ্ধতিতে $G^g$, বৃত্তীয় পদ্ধতিতে $R^c$ ।

যেহেতু $90^\circ = 1$ সমকোণ $\therefore \quad 1^\circ = \frac{1}{90}$ সমকোণ

$$\therefore \quad D^\circ = \frac{D}{90} \text{ সমকোণ।}$$

আবার যেহেতু $100^g = 1$ সমকোণ $\therefore\ 1^g = \frac{1}{100}$ সমকোণ।

$$\therefore\ G^g = \frac{G}{100} \text{ সমকোণ।}$$

আবার যেহেতু $\frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ। $\therefore\ 1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

$$\therefore\ R^c = \frac{2R}{\pi} \text{ সমকোণ।}$$

$$\therefore\ \frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}.$$

ইহাই হইল তিনটি পদ্ধতির মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক।

## 1.6. কোণের বিভিন্ন এককের পারস্পরিক সম্পর্ক :

$1$ সমকোণ $= 90^\circ = 100^g = \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

$\therefore\ \pi$ রেডিয়ান $= 180^\circ$ বা $\pi^c = 180^\circ$

বা, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$ আবার $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

$\therefore\ \theta^\circ = \left(\frac{\pi\theta}{180}\right)^c$ এবং $\theta^c = \left(\frac{180\ \theta}{\pi}\right)^\circ$

আবার $90^\circ = 100^g$ $\therefore\ 1^\circ = \left(\frac{10}{9}\right)^g$ এবং $1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$

$\therefore\ \theta^\circ = \left(\frac{10.\theta}{9}\right)^g$ এবং $\theta^g = \left(\frac{9\theta}{10}\right)^\circ$

আবার যেহেতু $100^g = 1$ সমকোণ

$\therefore\ 1^g = \frac{1}{100}$ সমকোণ $= \frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{200}$

$\therefore\ 100^g = 90^\circ$ $\therefore\ 1^g = \frac{9^\circ}{10}$

আবার যেহেতু $\pi^c = 2$ সমকোণ $= 180^\circ$

$\therefore\ 1^c = \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী $= \frac{180^\circ}{\pi}$

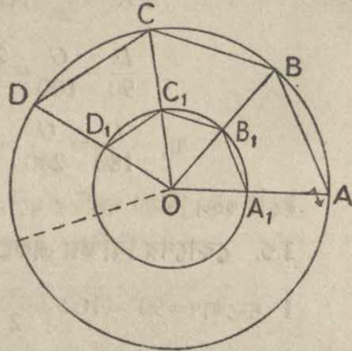
$\therefore\ \pi^c = 2$ সমকোণ $= 200^g$

$\therefore\ 1^c = \frac{200}{\pi}$ ( গ্রেড ) $= \frac{200^g}{\pi}$ ।

## উপপাদ্য 3

**যে-কোন বৃত্তে বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ একটি ধ্রুবক অনুপাতে থাকে।**

O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করা হইল এবং বাহিরের বৃত্তটিতে *n* সংখ্যক বাহু-বিশিষ্ট একটি অন্তর্লিখিত সুষম বহুভুজ ABCD⋯ ⋅অঙ্কন করা হইল। এখন OA, OB, OC, OD, ⋯ব্যাসার্ধগুলি ভিতরের বৃত্তটিকে যথাক্রমে $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$⋯বিন্দুগুলিতে ছেদ করে। $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1D_1$⋯⋯প্রভৃতি রেখাগুলি যোগ করিয়া *n* সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ ভিতরের বৃত্তটিতে অন্তর্লিখিত হইয়াছে।



চিত্র—5

এখন OAB ও $OA_1B_1$ ত্রিভুজ দুইটিতে

$$\angle AOB = \angle A_1OB_1, \quad \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} \quad \left( \because \begin{array}{l} OA_1 = OB_1 \\ OA = OB \end{array} \right)$$

∴ OAB ও $OA_1B_1$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

$$\text{এখানে} \quad \frac{\text{ABCD}\cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}}{A_1B_1C_1D_1\cdots \text{বহুভুজের পরিসীমা}}$$

$$= \frac{n\,AB}{n\,A_1B_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1}$$

( যেহেতু OAB, $OA_1B_1$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ )।

*n*-এর মান যাহাই হউক না কেন উপরের সম্বন্ধটি ঠিক থাকিবে। অতএব সুষম বহুভুজ দুইটির বাহুসংখ্যা (*n*) অসীম হইলে প্রত্যেক বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি বৃত্তের পরিধিস্থ বিন্দুগুলির সাথে মিশিয়া যাইবে এবং সুষম বহুভুজ দুইটির পরিসীমা বৃত্ত দুইটির পরিসীমার সহিত এক হইয়া যাইবে। অতএব উপরের সম্বন্ধ হইতে আমরা পাই,

$$\frac{ABCD\cdots\text{বৃত্তের পরিসীমা}}{A_1B_1C_1D_1\cdots\text{বৃত্তের পরিসীমা}}=\frac{\text{বহির্বৃত্তের পরিধি}}{\text{অন্তর্বৃত্তের পরিধি}}=\frac{OA}{OA_1}$$

$$=\frac{\text{বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{\text{অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

বা, $\frac{\text{বহির্বৃত্তের পরিধি}}{\text{বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}=\frac{\text{অন্তর্বৃত্তের পরিধি}}{\text{অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

$\therefore$ $\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$ = একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

**মন্তব্য :** যেহেতু একটি বৃত্তের ব্যাস তাহার ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ, সুতরাং

$\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাস}}$ = একটি ধ্রুবক সংখ্যা

অর্থাৎ $\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাস}}=\pi$ রেডিয়ান।

$\therefore$ কোন বৃত্তের পরিধি $=\pi\times 2r$ ( $r$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ )

$=2\pi r$ ( একক )।

**মন্তব্য :** $\pi$-এর মান $\frac{22}{7}$ এবং আরও আসন্ন মান 3·14159⋯ ।

**উদা. 1.** 41425″ কে ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

```
60)41425″(690′
   360
   ----
    542
    540
    ---
     25″

60)690(11°
   60
   ---
    90
    60
    --
    30′
```

$\therefore$ $41425''=11^\circ\ 30'\ 25''$.

**উদা. 2.** 15° 25′ 20″ কে সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

```
15° 25′ 20″
 60
------
900′
 25′
------
925′
 60
------
55500″
   20″
------
55520″
```

$\therefore$ $15^\circ\ 25'\ 20''=55520''$.

**উদা. 3.** $5^g\ 15'\ 30''$ কে সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

$$\begin{array}{r} 5^g\ 15'\ 30'' \\ 100 \\ \hline 500' \\ 15' \\ \hline 515' \\ 100 \\ \hline 51500'' \\ 30'' \\ \hline 51530'' \end{array}$$

$\therefore\ 5^g\ 15'\ 30'' = 51530''.$

**উদা. 4.** $61°\ 25'\ 30''$ কে গ্রেড, মিনিট, সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

$61°\ 25'\ 30'' = 61°\ 25'\ \frac{30}{60} = 60°\ 25{\cdot}5'$

$= 61°\ \frac{25{\cdot}5}{60} = 61{\cdot}425° = \frac{61{\cdot}425}{90}$ সমকোণ

$= {\cdot}682$ সমকোণ

$= {\cdot}682 \times 100$ গ্রেড $= 68{\cdot}2^g$

$= 68^g\ 20'.$

**উদা 5.** (i) $30°$ (ii) $50^g$ (iii) $5^g\ 20'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(i) আমরা জানি $1° = \frac{\pi^c}{180}.$

$\therefore\ 30° = \frac{\pi^c}{180} \times 30 = \frac{\pi^c}{6}$

(ii) $\because\ 1^g = \frac{\pi^c}{200}$

$\therefore\ 50^g = \frac{\pi^c}{200} \times 50 = \frac{\pi^c}{4}.$

(iii) $5^g20' = 5{\cdot}2^g = \frac{52^g}{100}$

$\because\ 1^g = \frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান

$\therefore\ 5^g20' = \frac{52^g}{10} = \frac{\pi^c}{200} \times \frac{52}{10}$

$= \frac{13}{500}\pi^c.$

উদা. 6. $\frac{\pi^c}{12}$ কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

$$1^c = \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রী}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi^c}{12} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{12} = 15^\circ.$$

## প্রশ্নমালা 1

ডিগ্রী, মিনিট, সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :—

1. $47712''$ 2. $4520''$ 3. $55845''$

রেডিয়ানে প্রকাশ কর :—

4. $25^\circ 24'$ 5. $24^\circ 35'$ 6. $40^\circ 15' 36''$ 7. $290^\circ 45'$

ডিগ্রীতে প্রকাশ কর :—

8. $\frac{\pi}{6}$ 9. $\frac{12\pi}{6}$ 10. $\frac{3\pi}{4}$ 11. $\frac{7\pi}{6}$.

12. $40^g 20' 50''$ কে ডিগ্রী, মিনিট, সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

13. $40^\circ 15' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

14. কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 1 : 2 : 3 হইলে কোণ তিনটিকে ডিগ্রী ও রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

15. একই দৈর্ঘ্যের চাপ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে $60^\circ$ ও $75^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিলে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।

16. 10 মাইল বেগে বৃত্তাকার পথে ছুটিয়া একজন লোক $36''$-এ কেন্দ্রে $56^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিয়া একটি চাপ অতিক্রম করিল। বৃত্তাকার পথটির ব্যাস নির্ণয় কর।

17. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের বৃত্তমূলক মান $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$। তৃতীয় কোণটির মান ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর।

18. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সেন্টিমিটার। 6 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর।

19. 10 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $33^\circ 15'$ কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

20. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিয়োগফল $\frac{2\pi}{5}$ রেডিয়ান। এই কোণ দুইটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

21. পৃথিবীতে মানুষের চোখে সূর্য একটি 32′ কোণ উৎপন্ন করে। পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব 9,25,00,000 মাইল হইলে সূর্যের ব্যাস নির্ণয় কর।

22. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রী-সংখ্যা এবং বৃহত্তম কোণের রেডিয়ান সংখ্যার অনুপাত 60 : $\pi$। কোণগুলিকে ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

23. কোন ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2 : 5 : 3 হইলে কোণগুলি রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

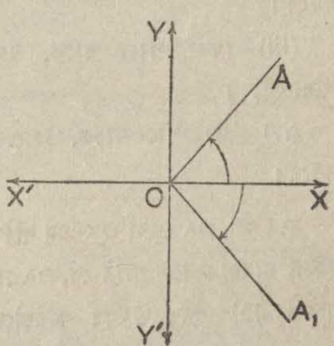
24. $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ানের একটি কোণকে দুইটি অংশে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের ষষ্টিমূলক মিনিট এবং দ্বিতীয় অংশের শতাংশমূলক সেকেণ্ডের অনুপাত 27 : 2500 হয়।

25. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং বৃহত্তর কোণটি ক্ষুদ্রতর কোণটির দ্বিগুণ। কোণগুলিকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
## ( Trigonometrical Ratios of Angles )

**2.1.** মনে কর, একই সমতলে XOX′ সরলরেখা ও YOY′ সরলরেখা পরস্পর লম্ব এবং উহারা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে লম্ব হওয়ার ফলে সমগ্র তলটি চারিটি পাদে বিভক্ত হইয়াছে। প্রথম পাদ হইল XOY, দ্বিতীয় পাদ YOX′, তৃতীয় পাদ X′OY′, চতুর্থ পাদ Y′OX। মনে কর, OA সরলরেখা O-কে কেন্দ্র করিয়া OX অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া OA অবস্থানে আসিল। ইহার ফলে XOA কোণটি উৎপন্ন হইল এবং কোণটি হইল ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ। কারণ ∠XOA 90° অপেক্ষা ছোট। এইভাবে O-কে কেন্দ্র করিয়া OX অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া বাম আবর্তে ( anticlockwise ) ঘুরিয়া OA রেখা OX-এর সহিত যে সকল কোণ উৎপন্ন করিবে তাহার সবকটিই ধনাত্মক কোণ হইবে। আবার OA রেখা O-কে কেন্দ্র করিয়া OX অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার দিকে ঘুরিয়া চতুর্থ পাদে $XOA_1$ কোণটি উৎপন্ন করিল। এই কোণটি হইল ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ। এইভাবে OX অবস্থান হইতে O-কে কেন্দ্র করিয়া OA রেখা ডান আবর্তে ( clockwise ) ঘুরিয়া OX-এর সহিত যে সকল কোণ উৎপন্ন করিবে তাহারা সকলেই ঋণাত্মক কোণ হইবে।



চিত্র—6

যদি কোণগুলি ধনাত্মক হয় এবং OA সরলরেখা

(i) প্রথম পাদে থাকে তাহা হইলে উহাদের পরিমাণ 0° এবং 90°-এর মধ্যে হইবে।

(ii) দ্বিতীয় পাদে থাকে তাহা হইলে উহাদের পরিমাণ $90^\circ$ ও $180^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

(iii) তৃতীয় পাদে থাকে তাহা হইলে উহাদের পরিমাণ $180^\circ$ ও $270^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

(iv) চতুর্থ পাদে থাকে তাহা হইলে উহাদের পরিমাণ $270^\circ$ ও $360^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

আবার যদি কোণগুলি ঋণাত্মক হয় এবং OA রেখা

(i) চতুর্থ পাদে থাকে, উহাদের পরিমাণ $0^\circ$ ও $-90^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

(ii) তৃতীয় পাদে থাকে, উহাদের পরিমাণ $-90^\circ$ ও $-180^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

(iii) দ্বিতীয় পাদে থাকে, উহাদের পরিমাণ $-180^\circ$ ও $-270^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

(iv) প্রথম পাদে থাকে, উহাদের পরিমাণ $-270^\circ$ ও $-360^\circ$ এর মধ্যে হইবে।

মনে কর, OA রেখা OX-এর সহিত $760^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে আমরা বলিতে পারি যে, OA রেখা OX হইতে বাম আবর্তে সম্পূর্ণ দুইবার ঘুরিয়া $40^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। কারণ $760^\circ = 360^\circ \times 2 + 40^\circ$। এক্ষেত্রে OA রেখা প্রথম পাদে অবস্থিত হইয়াছে। আবার মনে কর, OA রেখা OX-এর সহিত $-785^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে আমরা বলিতে পারি যে, OA রেখা OX হইতে ডান আবর্তে সম্পূর্ণ দুইবার ঘুরিয়া $65^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। কারণ $-785^\circ = -360^\circ \times 2 - 65^\circ$। এখানে OA রেখা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইয়াছে।

**মন্তব্য :** ঘূর্ণায়মান OA সরলরেখাকে Generating line বা Radius vector বলা হয়।

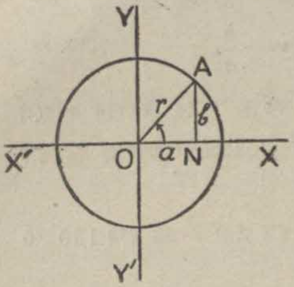
## 2.2. কোণানুপাতের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন :

মনে কর, প্রতিটি চিত্রে XOX′ হইল X-অক্ষ এবং YOY′ হইল Y-অক্ষ এবং উহারা পরস্পর O বিন্দুতে লম্ব।

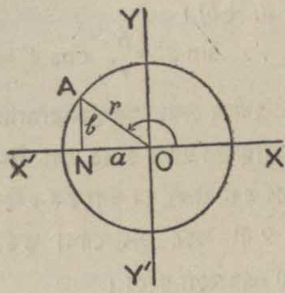
মনে কর, O বিন্দু হইল মূলবিন্দু।

মনে কর, OA-এর দৈর্ঘ্য $r$ ফুট এবং OA রেখা OX হইতে বাম আবর্তে

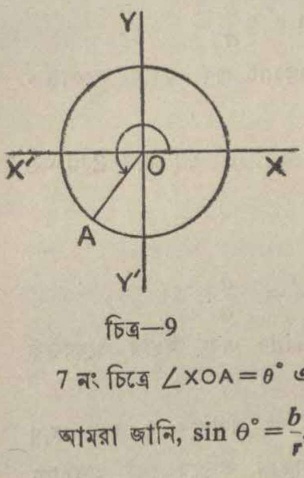
ঘুরিয়া XOA কোণ উৎপন্ন করিল। মনে কর, $\angle XOA = \theta^\circ$। A বিন্দু হইতে XOX′-এর উপর AN লম্ব টান। আবার মনে কর $ON = a$ ফুট এবং $NA = b$ ফুট।



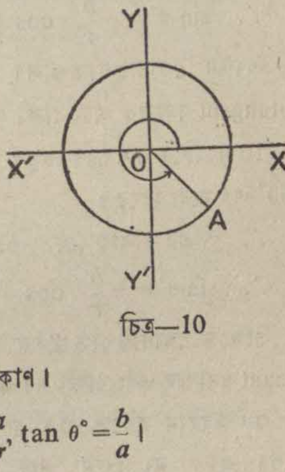

চিত্র—7




চিত্র—8




চিত্র—9




চিত্র—10

7 নং চিত্রে $\angle XOA = \theta^\circ$ এবং ইহা সূক্ষ্মকোণ।

আমরা জানি, $\sin\theta^\circ = \frac{b}{r}$, $\cos\theta^\circ = \frac{a}{r}$, $\tan\theta^\circ = \frac{b}{a}$।

এই চিত্রে A-এর স্থানাঙ্ক $(a, b)$। অতএব আমরা বলিতে পারি—

$$\sin\theta^\circ = \frac{\text{A-এর } y\text{-স্থানাঙ্ক}}{r}$$

$$\cos\theta^\circ = \frac{\text{A-এর } x\text{-স্থানাঙ্ক}}{r}$$

$$\tan\theta^\circ = \frac{\text{A-এর } y\text{-স্থানাঙ্ক}}{\text{A-এর } x\text{-স্থানাঙ্ক}}$$

এখানে দেখা গেল generating line OA যদি প্রথম পাদে থাকে তাহা

হইলে যেহেতু $a, b, r$ সবই ধনাত্মক অতএব কোণানুপাতগুলি সবই ধনাত্মক হইবে।

8 নং চিত্রে $\angle XOA = \theta^\circ$ এবং ইহা স্থূলকোণ। A-এর স্থানাঙ্ক $(-a, +b)$।

$\therefore \quad \sin\theta^\circ = \frac{b}{r}, \quad \cos\theta^\circ = -\frac{a}{r}, \tan\theta^\circ = -\frac{b}{a}.$

এখানে দেখা গেল generating line OA দ্বিতীয় পাদে অবস্থান করিলে কোণানুপাতগুলির sine এবং উহার অন্যোন্যক cosecant শুধুমাত্র ধনাত্মক হইবে এবং বাকী সব ঋণাত্মক হইবে।

9 নং চিত্রে OA রেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং $\theta$-এর মান $180^\circ$ ও $270^\circ$-এর মধ্যে হইবে।

$\therefore$ A-এর স্থানাঙ্ক $(-a, -b)$

$\therefore \quad \sin\theta^\circ = -\frac{b}{r}, \quad \cos\theta^\circ = -\frac{a}{r}, \tan\theta^\circ = \frac{b}{a}.$

এখানে কোণানুপাতগুলির শুধুমাত্র tangent এবং ইহার অন্যোন্যক cotangent ধনাত্মক এবং বাকী সব ঋণাত্মক।

10 নং চিত্রে OA রেখা চতুর্থ পাদে অবস্থিত এবং $\theta^\circ$-এর মান $270^\circ$ ও $360^\circ$-এর মধ্যে হইবে।

$\therefore$ A-এর স্থানাঙ্ক $(a, -b)$

$\therefore \quad \sin\theta^\circ = -\frac{b}{r}, \quad \cos\theta^\circ = \frac{a}{r}, \quad \tan\theta^\circ = -\frac{b}{a}.$

এক্ষেত্রে কোণানুপাতগুলির শুধুমাত্র cosine এবং ইহার অন্যোন্যক secant ধনাত্মক এবং বাকী সব ঋণাত্মক।

OX অবস্থান হইতে OA রেখাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন কোণ উৎপন্ন করুক না কেন উহা যে পাদে অবস্থান করিবে সেই অনুসারে কোণানুপাতগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন নির্ধারণ করা হইবে। নিম্নলিখিত চিত্রটির সাহায্যে কোণানুপাতগুলির চিহ্নসমূহ মনে রাখা সহজ হইবে।

| | |
|---|---|
| Sine Positive (ধনাত্মক) | All Positive (ধনাত্মক) |
| Tan Positive (ধনাত্মক) | Cos Positive (ধনাত্মক) |

OA প্রথম পাদে থাকিলে কোণানুপাতগুলির সবগুলি ধনাত্মক।

OA দ্বিতীয় পাদে থাকিলে শুধু sine ধনাত্মক।

OA তৃতীয় পাদে থাকিলে শুধু tan ধনাত্মক।

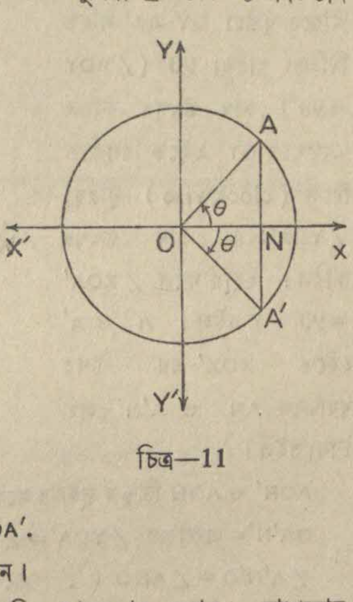
OA চতুর্থ পাদে থাকিলে শুধু cos ধনাত্মক হইবে।

sin, tan, cos ধনাত্মক বলিলে উহাদের অন্যোন্যকগুলিও ধনাত্মক হইবে।

## 2.3. একটি নির্দিষ্ট কোণের ($\theta$) সহিত সংযুক্ত কোণসমূহের কোণানুপাত :

### I. $\theta$-এর যে-কোন মানে ($-$) কোণের কোণানুপাত

মনে কর, OA রেখা OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOA = \theta$ এবং ডান আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOA' = -\theta$ উৎপন্ন করিল।



চিত্র—11

XOX′-এর উপর A বিন্দু হইতে AN লম্ব টান এবং উহাকে এমনভাবে বর্ধিত কর যেন OA′-কে A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন AON ও A′ON ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে $\angle NOA = \angle NOA'$ (যেহেতু কোণ দুইটির সাংখ্যমান সমান)

এবং $\angle ANO = \angle A'NO$

(যেহেতু প্রত্যেকে সমকোণ)

ON সাধারণ বাহু। $\therefore$ $OA = OA'$.

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান। সাংখ্যমান হিসাবে $AN = A'N$

কিন্তু AN ধনাত্মক এবং A′N ঋণাত্মক।

$\therefore$ $A'N = -AN$ এবং $OA = OA'$

$$\therefore \quad \sin(-\theta) = \frac{A'N}{OA'} = -\frac{AN}{OA} = -\sin\theta.$$

$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OA'} = \frac{ON}{OA} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{A'N}{ON} = -\frac{AN}{ON} = -\tan\theta \text{।}$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে আমরা পাই,

$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$

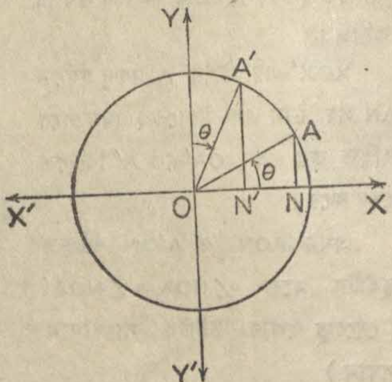
$\sec(-\theta) = +\sec\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta.$

**II. $\theta$-এর যে-কোন মানে $(90^\circ - \theta)$ কোণের কোণানুপাত**

মনে কর, OA রেখা OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOA = \theta$ উৎপন্ন করিল।

আবার মনে কর, OA-এর সমান আর একটি সরলরেখা OA′ এইরূপে বাম আবর্তে ঘুরিয়া OY-এর সহিত মিলিয়া যাইয়া $90^\circ$ ($\angle XOY = 90^\circ$) কোণ উৎপন্ন করিল এবং পরে OY হইতে বিপরীত দিকে (clockwise) ঘুরিয়া $\angle YOA' = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। ইহার ফলে $\angle XOA' = 90^\circ - \theta$ হইল। A ও A′ হইতে XOX′-এর উপর যথাক্রমে AN ও A′N′ লম্ব টানা হইল।




চিত্র—12

AON′ ও AON ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

OA′N′ = একান্তর $\angle YOA' = \angle NOA$

$\angle A'N'O = \angle ANO$ ( $\because$ প্রত্যেকে সমকোণ )

এবং $OA' = OA$ $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ সাংখ্যমানে $A'N' = ON$, $ON' = AN$, $OA' = OA$

আবার ON ও A′N′ একই চিহ্নযুক্ত এবং A′N′ ও ON′ একই চিহ্নযুক্ত এবং OA′ ও OA উভয়েই ধনাত্মক।

$$\therefore \sin(90^\circ - \theta) = \sin \widehat{XOA'} = \frac{A'N'}{OA'} = \frac{ON}{OA} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos \widehat{XOA'} = \frac{ON'}{OA'} = \frac{AN}{OA} = \sin\theta.$$

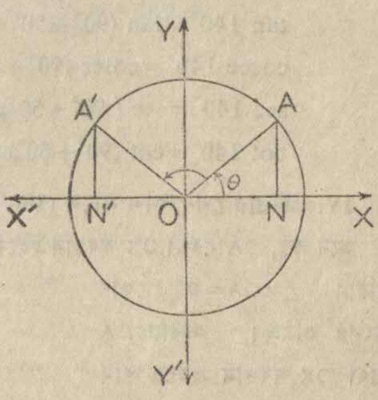
$$\tan(90^\circ - \theta) = \tan \widehat{XOA'} = \frac{A'N'}{ON'} = \frac{ON}{AN} = \cot\theta.$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে পাই,

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$
$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$
$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta.$$

### III. $\theta$-এর যে-কোন মানে $(90^\circ + \theta)$ কোণের কোণানুপাত

মনে কর, OA রেখা OX হইতে বাম আবর্তে ( ধনাত্মক দিকে ) ঘুরিয়া $\angle XOA = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। ইহার পর OA অবস্থান হইতে একই দিকে আরও এক সমকোণ $(90^\circ)$ ঘুরিয়া OA′ অবস্থানে আসিল। ইহার ফলে $\angle XOA' = \angle AOA' + \angle XOA = 90^\circ + \theta$ হইল। XOX′-এর উপর A ও A′ হইতে যথাক্রমে AN ও A′N′ লম্ব টানা হইল।




চিত্র—13

ANO ও A′N′O এই দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ হইতে আমরা পাই,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OA′ ( উভয়েই ধনাত্মক এবং সমান )

এবং $\angle ANO = \angle A'N'O = 1$ সমকোণ।

$\therefore \quad \angle AON = 90^\circ - \angle AOY = \angle AOA' - \angle AOY$
$= \angle YOA' = \angle OA'N'$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ ON = A′N′ ( সাংখ্যমানে )
AN = ON′ ( সাংখ্যমানে )

ON ও A′N′ উভয়েই ধনাত্মক এবং AN ধনাত্মক, ON′ ঋণাত্মক। কাজেই $ON' = -AN$.

$$\therefore \quad \sin(90^\circ + \theta) = \frac{A'N'}{OA'} = \frac{ON}{OA} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{ON'}{OA'} = -\frac{AN}{OA} = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{A'N'}{ON'} = \frac{ON}{-AN} = -\cot\theta$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে আমরা পাই,

$\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=+\sec\theta$

$\sec(90^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta$

**উদাহরণ।** $\sin 140^\circ=\sin(90^\circ+50^\circ)=\cos 50^\circ$

$\cos 140^\circ=\cos(90^\circ+50^\circ)=-\sin 50^\circ$

$\tan 140^\circ=\tan(90^\circ+50^\circ)=-\cot 50^\circ$

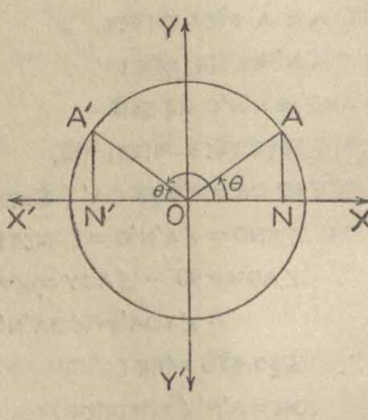
$\operatorname{cosec} 140^\circ=\operatorname{cosec}(90^\circ+50^\circ)=\sec 50^\circ$

$\sec 140^\circ=\sec(90^\circ+50^\circ)=-\operatorname{cosec} 50^\circ$

$\cot 140^\circ=\cot(90^\circ+50^\circ)=-\tan 50^\circ$

### IV. $\theta$-এর যে-কোন মানে $(180^\circ-\theta)$ কোণের কোণানুপাত

মনে কর, OA রেখা OX অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ( ধনাত্মক দিকে ) ঘুরিয়া $\angle XOA=\theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। আবার OA রেখা OX অবস্থান হইতে বাম আবর্তে 2 সমকোণ $(180^\circ)$ ঘুরিয়া OX′ অবস্থানে আসিল এবং পুনরায় OX′ অবস্থান হইতে বিপরীত দিকে $\theta$ কোণ ঘুরিয়া OA′ অবস্থানে আসিল। ইহার ফলে $\angle XOA'=\angle XOX'-\angle X'OA'=180^\circ-\theta$ ( যেহেতু $\angle X'OA'=\theta$ )




চিত্র—14

XOX′-এর উপর A ও A′ হইতে যথাক্রমে AN ও A′N′ লম্ব দুইটি টানা হইল।

ANO ও A′N′O এই দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ হইতে আমরা পাই,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OA′ ( উভয়েই ধনাত্মক ও সমান )।

$\angle AON=\angle A'ON'$ ;

$\angle ANO=\angle A'N'O=1$ সমকোণ

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

সাংখ্যমান হিসাবে AN = A′N′ এবং উভয়েই ধনাত্মক এবং ON = ON′।
কিন্তু ON ধনাত্মক এবং ON′ ঋণাত্মক। কাজেই ON′ = −ON

$$\therefore \sin(180^\circ - \theta) = \frac{A'N'}{OA'} = \frac{AN}{OA} = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{ON'}{OA'} = -\frac{ON}{OA} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{A'N'}{ON'} = \frac{AN}{-ON} = -\tan\theta$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে আমরা পাই,

$$\text{cosec}(180^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta$$
$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$$
$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta.$$

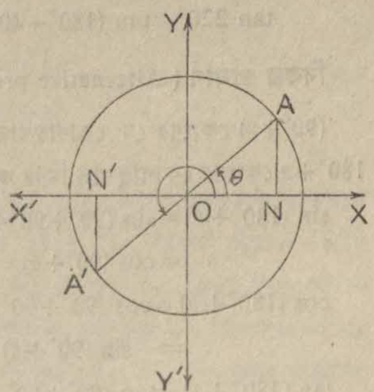
**উদাহরণ।** $\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$

$$\cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ$$
$$\tan 130^\circ = \tan(180^\circ - 50^\circ) = -\tan 50^\circ$$
$$\text{cosec}\,130^\circ = \text{cosec}(180^\circ - 50^\circ) = \text{cosec}\,50^\circ$$
$$\sec 130^\circ = \sec(180^\circ - 50^\circ) = -\sec 50^\circ$$
$$\cot 130^\circ = \cot(180^\circ - 50^\circ) = -\cot 50^\circ$$

## V. $\theta$-এর যে-কোন মানে $(180^\circ + \theta)$ কোণের কোণানুপাত

মনে কর, OA রেখা OX অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOA = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। আবার OA, অবস্থান হইতে একই দিকে ঘুরিয়া OA′ অবস্থানে আসিল। এখন AOA′ একই সরলরেখা হইল। ইহার ফলে $\angle XOA' = 180^\circ + \theta$ হইল।

XOX′-এর উপর A ও A′ হইতে যথাক্রমে AN ও A′N′ লম্ব টানা হইল। ANO ও A′N′O ত্রিভুজ দুইটি হইল সমকোণী ত্রিভুজ।




চিত্র—15

অতিভুজ OA = অতিভুজ OA′ ( উভয়েই ধনাত্মক ও সমান )

$\angle ANO = \angle A'N'O = 1$ সমকোণ

$\angle AON = \angle A'ON'$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সমান।

সাংখ্যমানে $AN = A'N'$ কিন্তু AN ধনাত্মক এবং $A'N'$ ঋণাত্মক।

$\therefore \quad A'N' = -AN$

সাংখ্যমানে $ON = ON'$ কিন্তু ON ধনাত্মক এবং $ON'$ ঋণাত্মক।

$\therefore \quad ON' = -ON$

$$\therefore \quad \sin(180^\circ+\theta) = \frac{A'N'}{OA'} = -\frac{AN}{OA} = -\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta) = \frac{ON'}{OA'} = -\frac{ON}{OA} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta) = \frac{A'N'}{ON'} = \frac{-AN}{-ON} = \tan\theta$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে পাই,

$$\text{cosec}(180^\circ+\theta) = -\text{cosec}\,\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta) = -\sec\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta) = \cot\theta$$

**উদাহরণ।** $\sin 220^\circ = \sin(180^\circ+40^\circ) = -\sin 40^\circ$

$\cos 220^\circ = \cos(180^\circ+40^\circ) = -\cos 40^\circ$

$\tan 220^\circ = \tan(180^\circ+40^\circ) = \tan 40^\circ$.

**বিকল্প প্রমাণ** ( Alternative proof ) :

$(90^\circ+\theta)$ কোণের যে কোণানুপাত নির্ণয় করা হইয়াছে তাহা হইতে $180^\circ+\theta$ কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা সম্ভব।

$$\sin(180^\circ+\theta) = \sin(90^\circ+90^\circ+\theta) = \sin\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}$$
$$= \cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta) = \cos(90^\circ+90^\circ+\theta) = \cos\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}$$
$$= -\sin(90^\circ+\theta) = -\cos\theta.$$

$$\tan(180^\circ+\theta) = \tan(90^\circ+90^\circ+\theta) = \tan\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}$$
$$= -\cot(90^\circ+\theta) = \tan\theta$$

**VI. $\theta$-এর যে-কোন মানে $(270^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত**

$\sin(270^\circ+\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$

$\cos(270^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cos(90^\circ+\theta)$

$=-(-\sin\theta)=\sin\theta$

$$\tan(270^\circ+\theta)=\frac{\sin(270^\circ+\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে পাই,

$\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta)=-\sec\theta$

$\sec(270^\circ+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta$

**মন্তব্য:** পূর্বের ন্যায় চিত্র অঙ্কন করিয়াও জ্যামিতির সাহায্যে কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়।

**VII. $\theta$-এর যে-কোন মানে $(270^\circ-\theta)$ কোণের কোণানুপাত**

$\sin(270^\circ-\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\sin(90^\circ-\theta)$

$=-\cos\theta$

$\cos(270^\circ-\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\cos(90^\circ-\theta)$

$=-\sin\theta$

$\tan(270^\circ-\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\tan(90^\circ-\theta)$

$=\cot\theta$

উহাদের অন্যোন্যকগুলি হইতে পাই,

$\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$

$\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$

**VIII. $(360^\circ\pm\theta)$ এবং $(n\times360^\circ\pm\theta)$ কোণগুলির কোণানুপাত**

ঘূর্ণায়মান রেখা OA, OX অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া OA-তে অবস্থান করিয়া $\theta$ কোণ উৎপন্ন করিল এবং পরে যদি OA রেখা উভয় আবর্তে $n$ সংখ্যক বার পুরা পাক ঘুরে তাহা হইলে উহা পুনরায় OA অবস্থানে আসিবে এবং উৎপন্ন কোণের পরিমাণ হইবে $n\times360^\circ+\theta$, $n$ যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। প্রতিক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান রেখাটির (OA) শেষ অবস্থান হইল OA।

অতএব $n\times 360^\circ+\theta$ এর এবং $\theta$-এর কোণানুপাতগুলি সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হইবে।

অনুরূপভাবে $(n\times 360^\circ-\theta)$-এর এবং $(-\theta)$-এর কোণানুপাতগুলিও এক হইবে।

অতএব $n$ একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে $(n\times 360^\circ\pm\theta)$ বা $(2n\pi\pm\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি $\pm\theta$ কোণের অনুপাতগুলির সমান হইবে।

$$\therefore\ \sin(n\times 360^\circ\pm\theta)=\sin(\pm\theta)$$
$$\cos(n\times 360^\circ\pm\theta)=\cos(\pm\theta)$$
$$\tan(n\times 360^\circ\pm\theta)=\tan(\pm\theta)$$ ইত্যাদি।

যদি $n=1$ হয় তাহা হইলে

$$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\sin(360^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(360^\circ-\theta)=\cos(-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(360^\circ-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

এখন পর্যন্ত যে সকল সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া গেল তাহা সহজে মনে রাখার জন্য একটি নিয়ম নীচে দেওয়া হইল।

**নিয়ম ঃ** (1) যদি $\theta=90^\circ\times$ জোড়সংখ্যা $\pm\theta'$ হয় তাহা হইলে সাংখ্যমানে $\theta$ কোণের sin, cos, tan ইত্যাদি যথাক্রমে $\theta'$ কোণের sin, cos, tan-এর সমান হইবে।

চিহ্নটি (sign) নির্ণয়ের জন্য $\theta$ কোণটির ( সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া ) সীমারেখা কোন্ পাদে অবস্থিত দেখিতে হইবে এবং ইহা ঠিক করিয়া "All, sin, tan, cos" নিয়ম অনুসারে চিহ্নগুলি নির্ণয় করিতে হইবে। অর্থাৎ এই নিয়ম অনুসারে ঐ পাদে sin, cos, tan ইত্যাদির যে চিহ্ন হইবে $\theta'$ কোণের sin, cos, tan ইত্যাদিরও যথাক্রমে সেই চিহ্ন হইবে।

(2) যদি $\theta=90^\circ\times$ বিজোড় সংখ্যা $\pm\theta''$ হয় তাহা হইলে সাংখ্যমানে $\theta$ কোণের sin, cos, cot ইত্যাদি যথাক্রমে $\theta''$ কোণের cos, sin, tan ইত্যাদির যথাক্রমে সমান হইবে এবং ইহাদের চিহ্নগুলিও নিয়ম (i)-এর মত হইবে।

## কয়েকটি কোণের কোণানুপাত

(i) $\sin 90^\circ = \sin(90^\circ + 0) = \sin(90^\circ \times 1 + 0^\circ)$
$= \cos 0^\circ = 1$

(ii) $\cos 90^\circ = \cos(90^\circ + 0^\circ) = \cos(90^\circ \times 1 + 0^\circ)$
$= -\sin 0^\circ = 0$

(iii) $\sin 180^\circ = \sin(180^\circ + 0^\circ) = \sin(90^\circ \times 2 + 0^\circ)$
$= -\sin 0^\circ = 0$

(iv) $\cos 180^\circ = \cos(180^\circ + 0^\circ) = \cos(90^\circ \times 2 + 0^\circ)$
$= -\cos 0^\circ = -1$

(v) $\sin 180^\circ = \tan(180^\circ + 0^\circ) = \tan(90^\circ \times 2 + 0^\circ)$
$= \tan 0^\circ = 1$

(vi) $\sin 270^\circ = \sin(270^\circ + 0^\circ) = \sin(90^\circ \times 3 + 0^\circ)$
$= -\cos 0^\circ = -1$

(vii) $\cos 270^\circ = \cos(270^\circ + 0^\circ) = \cos(90^\circ \times 3 + 0^\circ)$
$= \sin 0^\circ = 0$

(viii) $\tan 270^\circ = \tan(270^\circ + 0^\circ) = \tan(90^\circ \times 3 + 0^\circ)$
$= -\cot 0^\circ = -\infty$

(ix) $\sin 360^\circ = \sin(360^\circ + 0^\circ) = \sin(90^\circ \times 4 + 0^\circ)$
$= \sin 0^\circ = 0$

(x) $\cos 360^\circ = \cos(360^\circ + 0^\circ) = \cos(90^\circ \times 4 + 0^\circ)$
$= \cos 0^\circ = 1$

(xi) $\tan 360^\circ = \tan(360^\circ + 0^\circ) = \tan(90^\circ \times 4 + 0^\circ)$
$= \tan 0^\circ = 0$

উদা. **1**. মান নির্ণয় কর : $\sin 405^\circ$

$\sin 405^\circ = \sin(90^\circ \times 5 - 45^\circ)$

যেহেতু 5 একটি বিজোড় সংখ্যা, অতএব sin-এর পরিবর্তে cos হইবে এবং যেহেতু $405^\circ$ কোণটির সীমারেখা প্রথম পাদে অবস্থিত, অতএব $\sin 405^\circ$ এর চিহ্ন '+' বলিয়া নির্ণেয় মানের চিহ্নটি '+' হইবে।

$\therefore\ \sin 405^\circ = \sin(90^\circ \times 5 - 45^\circ) = +\cos 45^\circ$

$$= +\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**দ্বিতীয় নিয়ম ঃ**

$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**উদা. 2.** $\sin 390^\circ \cos 420^\circ + \cos(-330^\circ) \sin(-300^\circ)$ এর মান নির্ণয় কর।

$\sin 390^\circ \cos 420^\circ + \cos(-330^\circ)\sin(-300^\circ)$

$= \sin(360^\circ + 30^\circ)\cos(360^\circ + 60^\circ) + \cos 330^\circ(-\sin 300^\circ)$

$(\because \cos(-\theta) = \cos\theta;\ \sin(-\theta) = -\sin\theta)$

$= \sin(360^\circ + 30^\circ)\cos(360^\circ + 60^\circ) - \cos(360^\circ - 30^\circ)$
$\sin(360^\circ - 60^\circ)$

$= \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \cos(90^\circ \times 4 - 30^\circ)\sin(90^\circ \times 4 - 60^\circ)$

$= \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \cos 30^\circ(-\sin 60^\circ)$

$= \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

**উদা. 3.** $\theta$-এর মান নির্ণয় কর $(0^\circ < \theta < 360^\circ)$ যাহা $2\tan^2\theta - \sec^2\theta - 2 = 0$ কে সিদ্ধ করে।

$2\tan^2\theta - \sec^2\theta - 2 = 0$

বা, $2\tan^2\theta - (1 + \tan^2\theta) - 2 = 0\ (\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$

বা, $2\tan^2\theta - \tan^2\theta - 1 - 2 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\therefore\ \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

যদি $\tan\theta = \sqrt{3}$ হয় তাহা হইলে যেহেতু $\tan\theta$ ধনাত্মক অতএব $\theta$ কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে বা তৃতীয় পাদে অবস্থান করিবে।

$\therefore\ \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ)$

$\therefore\ \theta = 60^\circ$ বা $240^\circ$

আবার যদি $\tan\ \theta = -\sqrt{3}$ হয় তাহা হইলে যেহেতু $\tan \theta$ ঋণাত্মক, অতএব $\theta$ কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে বা চতুর্থ পাদে থাকিবে।

$\therefore\ \ \tan \theta = -\sqrt{3} = \tan\ (180^\circ - 60^\circ) = \tan\ (360^\circ - 60^\circ)$

$\therefore\ \ \theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

বা, $\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

আবার যেহেতু $0^\circ < \theta < 360^\circ$

$\therefore$ $\theta$-এর নির্ণেয় মান $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.

**উদা. 4.** প্রমাণ কর যে $\sin\left\{n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}\right\} = \frac{1}{2}$ যেখানে $n$ যে-কোন পূর্ণসংখ্যা।

(1) মনে কর, $n$ একটি জোড় পূর্ণসংখ্যা এবং $n = 2m$ ( $m$ পূর্ণসংখ্যা )

$$\therefore\ \sin\left\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\right\} = \sin\left\{2m\pi + (-1)^{2m} \frac{\pi}{6}\right\}$$

$$= \sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

(ii) মনে কর, $n$ একটি বিজোড় পূর্ণসংখ্যা এবং $n = 2m+1$ ($m$ যেখানে অখণ্ড সংখ্যা )

$$\therefore\ \sin\left\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\right\} = \sin\left\{2m+1)\pi + (-1)^{2m+1} \frac{\pi}{6}\right\}$$

$$= \sin\left\{(2m+1)\pi - \frac{\pi}{6}\right\}$$

$$= \sin\left\{2m\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right\} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

**মন্তব্য :** $2m$ জোড় বলিয়া $(-1)^{2m} = 1$

এবং $2m+1$ বিজোড় বলিয়া $(-1)^{2m+1} = -1$

## প্রশ্নমালা 2

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 390^\circ$ (ii) $\cos 765^\circ$ (iii) tan 8[illegible]0°

(iv) $\operatorname{cosec} 750^\circ$ (v) $\operatorname{cosec} (-1485^\circ)$ (vi) $\cos(-300^\circ)$

(vii) $\cot(-1485^\circ)$ (viii) $\cos(-1290^\circ)$

(ix) $\sin(-1245^\circ)$ (x) $\tan(-1020^\circ)$

2. নিম্নলিখিতগুলিকে $45^\circ$ কোণের নিম্নে ধনাত্মক কোণানুপাতে প্রকাশ কর :

(i) $\sin(-330^\circ)$ (ii) $\sin 480^\circ$ (iii) $\tan(-1385^\circ)$

(iv) $\cos(390^\circ\theta)$

3. প্রমাণ কর :

(i) $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n$ যে-কোন পূর্ণসংখ্যা।

(ii) $\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $n$ যে-কোন পূর্ণসংখ্যা।

(iii) $\tan\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}=1$, $n$ যে-কোন পূর্ণসংখ্যা।

প্রমাণ কর :

4. $\frac{\sin 250^\circ+\tan 290^\circ}{\cot 200^\circ+\cos 340^\circ}=-1$

5. $2\sin\pi+3\cos\frac{3\pi}{2}+4\tan 2\pi=0$

6. $\cos 306^\circ+\cos 234^\circ+\cos 162^\circ+\cos 18^\circ=0$

7. $\cot\theta+\tan(\pi+\theta)+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan(2\pi-\theta)=0$

8. $\sin^2 60^\circ+\cos^2 150^\circ+\tan^2 120^\circ+\cos 180^\circ-\tan 135^\circ=\frac{9}{2}$

9. $\sin 330^\circ+\tan 45^\circ-4\sin^2 120^\circ+2\cos^2 135^\circ+\sec^2 180^\circ$
$=-\frac{1}{2}$

10. $\frac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}+(\sec^2 45^\circ-\cot^2 45^\circ)$
$-(\cos^2 60^\circ+\sin^2 120^\circ)=1$

11. $\frac{\sin(90^\circ-\theta)\sin(135^\circ-\theta)\cot(90^\circ+\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=1$

মান নির্ণয় কর :

12. $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

13. $\tan\frac{3\pi}{20}\tan\frac{4\pi}{20}\tan\frac{5\pi}{20}\tan\frac{6\pi}{20}\tan\frac{7\pi}{20}$

14. $\tan 25^\circ \tan 35^\circ \tan 45^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ$

15. $\cos\theta+\cos(270^\circ+\theta)-\sin(270^\circ-\theta)+\cos(180^\circ+\theta)$

16. $\theta$-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $\tan\theta=-\sqrt{3},\quad 270^\circ<\theta<360^\circ$

(ii) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2,\quad 0^\circ<\theta<360^\circ$

(iii) $2\cos^2\theta+\sin\theta=2,\quad 0^\circ<\theta<360^\circ$

(iv) $2\tan^2\theta+\sec^2\theta=2,\quad 0^\circ<\theta<360^\circ$

(v) $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$

(vi) $\sin\theta=\cos\theta$

(vii) $\sqrt{3}\sec\theta=2$

17. প্রমাণ কর $\cos\theta=-\cos(\theta-180^\circ)$

18. প্রমাণ কর $\tan(n\pi-\theta)=\tan\theta$, $n$ যে কোণ পূর্ণসংখ্যা।

19. যদি $\sec\theta=-2$ হয়, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

20. যদি $\cot\theta=-\frac{8}{15}$, হয় $\sin\theta$ এর মান কত ?

21. যদি A, B, C একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে,

(i) $$\frac{\tan(B+C)+\tan(C+A)+\tan(A+B)}{\tan(180^\circ-A)+\tan(360^\circ-B)+\tan(540^\circ-C)}=1$$

(ii) $\sin(A+B)-\cos C=\cos(A+B)+\sin C$

22. যদি ABCD একটি চতুর্ভুজ হয় প্রমাণ কর,

$$\tan\frac{(A+B)}{2}+\tan\frac{(C+D)}{2}=0.$$

## 2.4. অভেদাবলী :

মনে কর, A, B, C তিনটি কোণ।

1. যদি $A+B+C=\pi=180^\circ$ হয় তাহা হইলে কোণ তিনটির যে-কোন দুইটির যোগফল তৃতীয়টির সম্পূরক ( Supplementary ) হয়।

$\therefore\ B+C=180^\circ-A,\ C+A=180^\circ-B,\ A+B=180^\circ-C$

$\therefore$ (i) $\sin(B+C)=\sin(180^\circ-A)=\sin A$

$\sin(C+A)=\sin B$

$\sin(A+B)=\sin C$

(ii) $\cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

$\cos(C+A)=-\cos B$

$\cos(A+B)=-\cos C$

(iii) $\tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A$

$\tan(C+A)=-\tan B$

$\tan(A+B)=-\tan C$

2. যদি $A+B+C=\pi=180^\circ$ হয় তাহা হইলে,

$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}=90^\circ$ হইবে।

$\frac{A}{2},\ \frac{B}{2},\ \frac{C}{2}$ এই কোণ তিনটির যে-কোন দুইটির যোগফল তৃতীয়টির পূরক ( Complementary ) হয়।

$\therefore\ \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2},\ \frac{C}{2}+\frac{A}{2}=90^\circ-\frac{B}{2},\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$

(i) $\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

$\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$

$\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$

$\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{B}{2}$

$\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\left(90^{\circ}-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}$

$$\tan\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A}{9}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$$

পূরক ও সম্পূরক কোণগুলির সম্বন্ধে যে সকল সিদ্ধান্ত পূর্বে প্রতিষ্ঠিত হইয়াছে তাহাদের সাহায্যে তিনটি কোণের সমষ্টি 180° হওয়ার ফলে ঐ কোণগুলির কোণানুপাত সংক্রান্ত অনেক প্রয়োজনীয় অভেদ পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. যদি $A+B+C=\pi=180$ হয় প্রমাণ কর,

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

যেহেতু $A+B+C=180^{\circ}$

$\therefore\ 2A+2B+2C=360^{\circ}$

$\therefore\ 2C=360^{\circ}-(2A+2B)$

$\sin 2C=\sin\{360^{\circ}-(2A+2B)\}=-\sin(2A+2B)$

$\therefore\ \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=(\sin 2A+\sin 2B)-\sin(2A+2B)$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$=2\sin(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin(180^{\circ}-C)\times 2\sin A\sin B$

$=2\sin C\times 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C$

উদা. 2. যদি $A+B+C=180^{\circ}$ প্রমাণ কর,

$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$

আমরা জানি $\tan(2A+2B)=\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A\tan 2B}$

এখন, $\tan(2A+2B)=\tan(360^{\circ}-2C)=-\tan 2C$

$\therefore\ -\tan 2C=\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A\tan 2B}$

বা, $-\tan 2C+\tan 2C\tan 2A\tan 2B=\tan 2A+\tan 2B$

$\therefore\ \tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

**উদা. 3.** যদি $A+B+C=180^\circ$ হয় প্রমাণ কর,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$\therefore\ A+B+C=\pi$

$\therefore\ \cos C=\cos\{\pi-(A+B)\}=-\cos(A+B)$

$$\therefore\ \cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)$$

$$=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1$$

$$\left(\because\ \cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}+1$$

$$=2\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right).2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}+1$$

$$\left(\because\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$$

**উদা 4.** যদি $A+B+C=\pi$ হয় প্রমাণ কর :—

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

এখন, $(\sin A+\sin B)+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\sin\left(90-\frac{C}{2}\right).\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left\{90^\circ-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\,2\,.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

## প্রশ্নমালা 3

যদি $A+B+C=\pi$ হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর :

1. $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\cos C$
2. $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$
3. $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$
4. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
5. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$
6. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$
7. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
8. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$
9. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$
10. $\sin(A+B-C)+\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)$
    $=4\sin A\sin B\sin C$
11. $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\sin C$
12. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$
13. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$
    $=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

14. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

15. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হয় দেখাও যে—
$\tan A=\tan B+\tan C$

16. যদি $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হয় দেখাও যে $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$

17. যদি $A+B=C$ হয় দেখাও যে
$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1+2\cos A\cos B\cos C$

যদি $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হয় দেখাও যে—

18. $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1-2\sin A\sin B\sin C$

19, $\cot+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$

20. যদি $A+B+C=2\pi$ হয় দেখাও যে—
$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1+2\cos A\cos B\cos C$

21. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$
দেখাও যে $\tan A=\tan B+\tan C$.
যদি $A+B+C=0$ হয় দেখাও যে—

22. $\tan(A+B-C)+\tan(B+C-A)+\tan(C+A-B)$
$=\tan(A+B-C)\tan(B+C-A)\tan(C+A-B)$

23. $\cos A+\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$

24. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$
প্রমাণ কর $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$.

25. যদি $A=B+C$ হয় দেখাও যে
$\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)$
$=4\sin A\sin B\sin C$.

# তৃতীয় অধ্যায়

## মিশ্র কোণ ( Compound Angles )

### ( Addition and Subtraction Formulae )

**3.1. মিশ্র কোণঃ** দুই বা তাহার অধিক কোণের যোগফল বা বিয়োগফলকে মিশ্র কোণ বলে।

যেমন $A+B$, $A-B$, $A+B+C$ ইত্যাদি হইল মিশ্র কোণ।

### উপপাদ্য 1

প্রমাণ কর যে

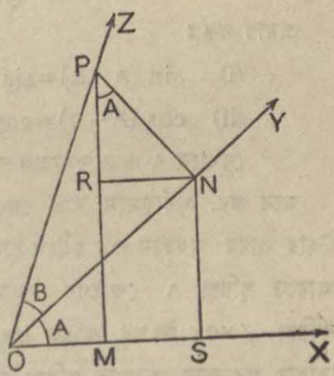
(i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

যেখানে A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ও $A+B<90^\circ$.

(i) মনে কর, ঘূর্ণায়মান OX সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া A কোণের সমান $\angle XOY$ উৎপন্ন করিল।

পরে একই দিকে ঘুরিয়া B কোণের সমান $\angle YOZ$ উৎপন্ন করিল। ইহার ফলে $\angle XOZ=A+B$ হইল।



চিত্র 16

এখানে OZ হইল ঘূর্ণায়মান রেখার শেষ অবস্থান। OZ-এর উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং P হইতে OX ও OY-এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান। N বিন্দু হইতে OX ও PM-এর উপর যথাক্রমে NS ও NR লম্ব টান।

**প্রমাণঃ** POM সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\sin(A+B)=\sin POM=\frac{PM}{OP}=\frac{RM+PR}{OP}=\frac{NS+PR}{OP}$$

$$=\frac{NS}{OP}+\frac{PR}{OP}=\frac{NS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos NPR\sin B$$

এখন $\angle NPR=90^\circ-\angle PNR=\angle RNO$ $[\because \angle PNO=90^\circ]$

$$=\angle NOS=A$$

$\therefore$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

(ii) পুনরায় $\cos(A+B)=\cos POM=\frac{OM}{OP}=\frac{OS-MS}{OP}$

$$=\frac{OS-RN}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{RN}{OP}=\frac{OS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $[\because \angle NPR=A]$

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ**

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

### উপপাদ্য 2

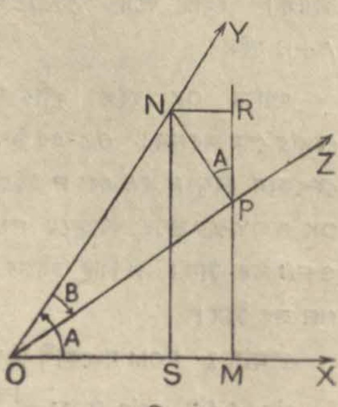
প্রমাণ কর :

(i) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

যেখানে A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$.

মনে কর, ঘূর্ণায়মান OX রেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া A কোণের সমান করিয়া $\angle XOY$ উৎপন্ন করিল এবং তাহার পর ডান আবর্তে ঘুরিয়া B কোণের সমান করিয়া $\angle YOZ$ উৎপন্ন করিল। ইহার ফলে $\angle XOZ = A-B$ হইল।



চিত্র 17

ঘূর্ণায়মান রেখার অবস্থান হইল OZ এবং OZ রেখার উপর যে-কোন

বিন্দু P লও। P বিন্দু হইতে OX ও OY-এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টানা হইল এবং N হইতে OX-এর উপর NS লম্ব এবং MP-এর বর্ধিতাংশের উপর NR লম্ব টানা হইল।

এখন POM সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\sin(A-B)=\sin POM=\frac{PM}{OP}=\frac{RM-RP}{OP}=\frac{NS-RP}{OP}$$

$$=\frac{NS}{OP}-\frac{RP}{OP}=\frac{NS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RP}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos RPN\sin B$$

এখন $\angle RPN=90^\circ-\angle PNR$

$=\angle YNR$ $\quad [\because \angle PNY=90^\circ]$

$=$অনুরূপ $\angle XOY=A$

$\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

(ii) $$\cos(A-B)=\cos POM=\frac{OM}{OP}=\frac{OS+SM}{OP}$$

$$=\frac{OS+NR}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{NR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{NR}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin RPN\sin B$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

**অনুসিদ্ধান্ত :**

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

**মন্তব্য :** উপরের প্রমাণগুলিতে A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, (A+B) এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট এবং (A−B) ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। A ও B যে-কোন পরিমাণের কোণ হইলেও ঠিকমত চিত্র অঙ্কন করিয়া সংশ্লিষ্ট রেখাগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নগুলিকে যথাযথভাবে লইয়া উপরের প্রণালীতে উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করা যায়।

**কতিপয় অনুসিদ্ধান্ত ঃ**

**উদা. 1.** প্রমাণ কর ঃ

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A.$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A.$

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$

$=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)$

$=\cos^2 B-\cos^2 A.$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\times(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\sin^2 B=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)$

$=\cos^2 B-\sin^2 A.$

**উদা. 2.** প্রমাণ কর ঃ

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

$$=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$ [ হর এবং লবকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া ]

$=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

$$=\frac{\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\frac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}-\frac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$ [ হর ও লবকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া ]

$$=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

উদা. 3. (i) $\sin(A+B+C)$ (ii) $\cos(A+B+C)$

(iii) $\tan(A+B+C)$

(i), (ii) ও (iii এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(i) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C+(\cos A\cos B$

$-\sin A\sin B)\sin C$

$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$

$+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$

অথবা, $\sin\ A+B+C)$

$$=\cos A\cos B\cos C\left\{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}-\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\right\}$$

$=\cos A\cos B\cos C\{\tan A+\tan B+\tan C$

$-\tan A\tan B\tan C\}$

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$

$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C$

$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$

$-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$

অথবা, $\cos(A+B+C)$

$=\cos A\cos B\cos C\{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A$

$-\tan A\tan B\}.$

(iii) $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\times\tan C}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}$$

অথবা, $\tan(A+B+C)=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C\{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C\}}{\cos A\cos B\cos C\{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C\}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}.$$

**মন্তব্য ঃ** তিন-এর বেশী সংখ্যক কোণের যোগফলের ত্রিকোণমিতিক বিস্তৃতিসমূহ অনুরূপ পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া নির্ণয় করা যায়।

**উদা 4.** মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos 15^\circ$ (iii) $\tan 15^\circ$

(i) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}.$$

(ii) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}.$$

(iii) $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt3}}{1+\dfrac{1}{\sqrt3}}=\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}=\frac{(\sqrt3-1)(\sqrt3-1)}{(\sqrt3+1)(\sqrt3-1)}$$

$$=\frac{4-2\sqrt3}{2}=2-\sqrt3.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর : $\tan(45^\circ - A) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$.

$$\tan(45^\circ - A) = \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1+\tan 45^\circ \tan A} = \frac{1-\tan A}{1+\tan A}.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর :

$$\tan(A+B)\tan(A-B) = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}. \quad \text{(উদা. 1)}$$

উদা. 7. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয়, প্রমাণ কর $\tan B + \tan C = \tan A$.

$$\tan B + \tan C = \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C}$$

$$= \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin(B+C)}{\cos A} = \frac{\sin(\pi - A)}{\cos A}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A.$$

## 3.2. গুণফল, যোগফল এবং বিয়োগফলের পরিবর্তন ( Transformation of Products, Sums and Differences ) :

Sine এবং Cosine-এর গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলের আকারে এবং যোগফল বা বিয়োগফলকে গুণফলের আকারে রূপান্তরিত করার পদ্ধতি নিম্নে দেখান হইল।

প্রমাণ কর :

1. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
2. $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
3. $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
4. $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
5. $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$
6. $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$

7. $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

8. $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

আমরা জানি $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ··· (i)

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ ··· (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই,

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ ··· (1)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ ··· (2)

আবার আমরা জানি,

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ··· (iii)

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ ··· (iv)

(iii) ও (iv) যোগ করিয়া পাই,

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ ··· (3)

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ ··· (4)

(1) এবং (2)-এর সাহায্যে একটি sine এবং একটি cosine-এর গুণফলকে দুইটি sine-এর যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা হইল।

(3)-এর সাহায্যে দুইটি cosine-এর গুণফলকে দুইটি cosine-এর যোগফলরূপে এবং (4)-এর সাহায্যে দুইটি sine-এর গুণফলকে দুইটি cosine-এর বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা হইল।

এখন মনে কর, $A+B=C$, $A-B=D$

$\therefore\quad A=\frac{C+D}{2},\ B=\frac{C-D}{2}$

$\therefore$ (1) হইতে পাই,

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ ··· (5)

(2) হইতে পাই,

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ··· (6)

(3) হইতে পাই,

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \cdots \quad (7)$$

(4) হইতে পাই,

$$\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

বা, $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad \cdots \quad (8)$

**মন্তব্য :** $\cos(A-B)-\cos(A+B)$

$=-\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$

$=-\{\cos A\cos B-\sin A\sin B-\cos A\cos B-\sin A\sin B\}$

$=2\sin A\sin B$

$\therefore\ \cos(A+B)-\cos(A-B)=2\sin A\sin B$

$=2\sin A\times\sin(-B)$

$\therefore\ \cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$

নিম্নলিখিত সূত্রগুলি মনে রাখা খুবই প্রয়োজন।

(1) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).$

(2) $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B).$

(3) $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B).$

(4) $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).$

(5) $\sin C+\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$

(6) $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

(7) $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$

(8) $\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$

উপরের সূত্রগুলিকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় :—

$2\sin A\cos B=\sin(\text{ Sum })-\sin(\text{ Diff. })$

$2\cos A\sin B=\sin(\text{ Sum })-\sin(\text{ Diff. })$

$2 \cos A \cos B = \cos(\text{Sum}) + \cos(\text{Diff.})$

$2 \sin A \sin B = \cos(\text{Diff.}) - \cos(\text{Sum.})$

$= -\{\cos(\text{Sum}) - \cos(\text{Diff.})\}$

**Sum of the two sines** $= 2 \sin(\frac{1}{2}\text{Sum}) \cos(\frac{1}{2}\text{Diff.})$

**Diff. of the two sines** $= 2 \cos(\frac{1}{2}\text{Sum}) \sin(\frac{1}{2}\text{diff.})$

**Sum of the two cosines** $= 2 \cos(\frac{1}{2}\text{Sum}) \cos(\frac{1}{2}\text{Diff.})$

**Diff. of the two cosines** $= 2 \sin(\frac{1}{2}\text{Sum}) \sin(\frac{1}{2}\text{Diff.})$

**উদাহরণ 1.** $2 \sin 13\theta \cos 7\theta$

$= \sin(13\theta + 7\theta) + \text{Sin}(13\theta - 7\theta)$

$= \sin 20\theta + \sin 6\theta.$

**উদা. 2.** $2 \cos 3\theta \sin 10\theta$

$= \sin(3\theta - 10\theta) - \sin(3\theta - 10\theta)$

$= \sin 13\theta - \sin(-7\theta)$

$= \sin 13\theta - \sin 7\theta.$ $[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

**উদা. 3.** $\cos 9\theta - \cos 11\theta = 2 \sin \frac{9\theta + 11\theta}{2} \sin \frac{11\theta - 9\theta}{2}$

$= 2 \sin 10\theta \sin \theta.$

**উদা. 4.** দেখাও যে $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

বাম পক্ষ $= \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{2} \cos 20^\circ \frac{1}{2} . 2 \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4} \cos 20^\circ (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)$

$= \frac{1}{4} \cos 20^\circ (-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ)$

$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8} . 2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) = \frac{1}{8} \cos 60^\circ$

$= \frac{1}{8} . \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$

**উদা. 5.** দেখাও যে $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ = 0$

বামপক্ষ $= (\cos 80^\circ + \cos 40^\circ) - \cos 20^\circ$

$= 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 2 \times \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \cos 20^\circ$

$= 0.$

**উদা 6.** যদি $\sin A = m \sin B$ হয়, প্রমাণ কর :

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{m-1}{m+1} \tan \frac{A+B}{2}$$

যেহেতু $\sin A = m \sin B \quad \therefore \quad \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{m}{1}$

বা, $\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{m-1}{m+1}$ (By Comp. & Div.)

বা, $$\frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{m-1}{m+1}$$

বা, $\cot \frac{A+B}{2} \tan \frac{A-B}{2} = \frac{m-1}{m+1}$

বা, $\tan \frac{A-B}{2} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{\cot \frac{A+B}{2}}$

বা, $\tan \frac{A-B}{2} = \frac{m-1}{m+1} \tan \frac{A+B}{2}$.

## প্রশ্নমালা 3 (A)

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(-15°)$ (ii) $\cot 75°$.

2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\cos(A-B)$ যদি $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$ হয়।

(ii) $\tan(A-B)$ যদি $A = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{4}{5}$ হয়।

(iii) $\sec(A-B)$, যদি $\sec A = \frac{17}{8}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{5}{4}$ হয়।

(iv) $\cot(A-B)$ যদি $\cot A = \frac{11}{2}$, $\cot B = \frac{24}{7}$ হয়।

দেখাও যে—

3. $\sin(30° - A)\cos(60° - B) + \cos(30° - A)\sin(60° - B)$
$= \cos(A+B)$.

4. $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$.

5. $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A) = 0.$

6. $\sin(B+C)\sin(B-C) + \sin(C+A)\sin(C-A)$
$+\sin(A+B)\sin(A-B) = 0.$

7. $\tan(45^\circ + A) = \dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}.$

8. $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A.$

9. $\tan 2A \cot A - 1 = \sec 2A.$

10. $\cos^2 A + \cos^2(120^\circ - A) + \cos^2(120^\circ + A) = \frac{3}{2}.$

11. $\cos 38^\circ 15' \sin 68^\circ 15' - \cos 51^\circ 45' \sin 21^\circ 45' = \frac{1}{2}.$

12. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$
$= \sin(\theta + \alpha).$

13. $\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta \sin\theta = \sin 4\theta \cos\theta - \cos 4\theta \sin\theta.$

14. $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = 0.$

15. $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos^2 A \cos^2 B}.$

16. $\dfrac{\tan(2\alpha - \beta) + \tan\beta}{1 - \tan(2\alpha - \beta)\tan\beta} = \tan 2\alpha.$

17. $\sin(45^\circ + \theta)\sin(45^\circ - \theta) = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2}.$

18. $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) = \sin A + \cos A.$

19. $\sin(m+1)\theta \sin(m-1)\theta + \cos(m+1)\theta \cos(m-1)\theta$
$= \cos 2\theta.$

20. $\tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$

21. $\cos^2(A-B) + \cos^2 B - 2\cos(A-B)\cos A \cos B$
$= \sin^2 A.$

22. $\sin^2(A-B) + \sin^2 B + 2\sin(A-B) \times \cos A \sin B$
$= \sin^2 A.$

23. $\dfrac{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ} = \tan 53^\circ.$

24. যদি $\sin(\alpha+\beta)=n\sin(\alpha-\beta)$ এবং যদি $n\neq -1$ হয়, দেখাও যে—

$$\cot\alpha=\frac{n-1}{n+1}\cot\beta.$$

25. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হয়, দেখাও যে $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$.

26. যদি $a\cos(x+A)=b\cos(x-A)$ হয়, দেখাও যে,

$$(a+b)\tan x=(a-b)\cot A.$$

27. যদি $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0$ হয়, দেখাও যে $1+\cot\alpha\tan\beta=0$.

28. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, দেখাও যে $\sin^2 C=\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C$.

29. দেখাও যে $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{1-\sin^2 A-\sin^2 B}$

30. দেখাও যে $\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}$.

31. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, দেখাও যে $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

32. যদি $A+B+C=\pi$, $\cos A=\cos B\cos C$ হয়, দেখাও যে $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$.

দেখাও যে—

33. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}+\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=0.$

34. $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{\cos^2 A-\sin^2 B}$.

35. $\tan(\alpha-\beta-\gamma)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta-\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta}$

## প্রশ্নমালা 3 (B)

নিম্নলিখিতগুলিকে যোগফল বা বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর :

1. $2\sin 5\theta\cos 3\theta$.
2. $2\cos 9\theta\sin 5\theta$.
3. $2\cos 11\theta\cos 3\theta$.
4. $\sin 15\theta\sin 3\theta$.

5. $2 \sin 25^\circ \cos 5^\circ$. 6. $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$.

7. $\frac{1}{2} \sin (A+B) \sin (A-B)$

নিম্নলিখিতগুলিকে গুণফল আকারে প্রকাশ কর :

8. $\sin 30^\circ + \sin 50^\circ$. 9. $\sin 40^\circ - \sin 30^\circ$.

10. $\cos (A+B) - \cos (A-B)$. 11. $\cos 50^\circ + \cos 60^\circ$.

মান নির্ণয় কর :

12. $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ - \cos 20^\circ$.

13. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

14. $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$.

15. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$.

প্রমাণ কর :

16. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}$.

17. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \dfrac{A+B}{2}$.

18. $\dfrac{\sin 2A + \sin 3A}{\cos 2A - \cos 3A} = \cot \dfrac{A}{2}$.

19. $\cos 3A \cos A - \cos 4A \cos 2A = \sin 5A \sin A$.

20. $(\sin 3A + \sin A) \sin A + (\cos 3A - \cos A) \cos A = 0$.

21. $\cos \theta \cos (60^\circ - \theta) \cos (60^\circ + \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta$.

22. $\cos \left(\dfrac{\pi}{6} - \theta\right) + \cos \left(\dfrac{\pi}{6} + \theta\right) = \sqrt{3} \cos \theta$.

23. $\cos 40^\circ - \sin 80^\circ + \sin 20^\circ = 0$.

24. $\dfrac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \tan 35^\circ$.

25. $\dfrac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 75^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$.

26. $\cos A + \cos 3A + \cos 7A + \cos 9A$

$= 4 \cos A \cos 3A \cos 5A$.

27. $\dfrac{\cot 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} = \cot 25^\circ$.

28. $\dfrac{\sin 3A - \sin A}{\cos 3A + \cos A} = \tan A.$

29. $\cos\theta + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \theta\right) \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) = 0.$

30. $\dfrac{\sin 2A + \sin 5A - \sin A}{\cos 2A + \cos 5A + \cos A} = \tan 2A.$

31. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 2(A+B+C)$
$= 4 \sin(B+C) \sin(C+A) \sin(A+B).$

32. $4 \cos A \cos(120^\circ + A) \cos(120^\circ - A) = \cos 3A.$

33. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A+B+C)$

$$= 4 \cos\frac{B+C}{2} \cos\frac{C+A}{2} \cos\frac{A+B}{2}.$$

34. $\dfrac{\sin 11A \sin A + \sin 7A \sin 3A}{\cos 11A \sin A + \cos 7A \sin 3A} = \tan 8A.$

35. $\sin A + \sin 2A + \sin 3A + \sin 4A$

$$= 4 \cos A \cos\frac{A}{2} \sin\frac{5A}{2}.$$

36. $\dfrac{\sin(A+B) - 2\sin A + \sin(A-B)}{\cos(A+B) - 2\cos A + \cos(A-B)} = \tan A.$

37. $\dfrac{\sin 7A - \sin 3A - \sin 5A + \sin A}{\cos 7A + \cos 3A - \cos 5A - \cos A} = \tan 2A.$

38. যদি $A+B+C = \dfrac{\pi}{2}$ প্রমাণ কর,

$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B \cos C.$

39. যদি $A+B+C = \pi$ হয়, প্রমাণ কর,

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C.$

40. যদি $\cos A + \cos B = \frac{1}{3}$ এবং $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$ হয়,

প্রমাণ কর $\tan\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{3}{4}.$

41. যদি $\sin A + \sin B = a$, $\cos A + \cos B = b$ হয়,

দেখাও যে $\tan\dfrac{A-B}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}.$

# চতুর্থ অধ্যায়

## গুণিতক কোণ এবং অংশকোণ

## ( Multiple Angles and Submultiple Angles )

**4.1. গুণিতক কোণ :** A কোণের দ্বিগুণ কোণ 2A কোণ। অতএব 2A কোণ হইল একটি গুণিতক কোণ। অনুরূপে 3A, 4A, 5A ইত্যাদি কোণগুলি হইল গুণিতক কোণ।

**উদা. 1.** $\sin 2A = \sin (A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$

$= 2 \sin A \cos A \qquad [\because \sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B]$

$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A. \qquad \cdots \quad \text{(i)}$

**উদা. 2.** $\cos 2A = \cos (A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$

$= \cos^2 A - \sin^2 A$

$= (1-\sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$

বা, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

$= 2 \cos^2 A - 1$

$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$

$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$

$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1. \qquad \cdots \quad \text{(iv)}$

**উদা 3.** $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ [ (i হইতে পাওয়া যায় ]

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \qquad [\because 1 = \cos^2 A + \sin^2 A]$$

$$= \frac{\dfrac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\therefore \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A} \qquad \cdots \quad \text{(v)}$$

উদা. 4. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ [ (ii) হইতে পাওয়া যায় ]

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\therefore \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}. \qquad \cdots \quad \text{(vi)}$$

উদা. 5. $\tan 2A = \dfrac{\sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ ··· (vii)

অন্য প্রণালী : $\tan 2A = \tan (A + A)$

$$= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

উদা. 6. $\cot 2A = \dfrac{\cos 2A}{\sin 2A} = \dfrac{1 - \tan^2 A}{2 \tan A} = \dfrac{\dfrac{1}{\tan^2 A} - 1}{\dfrac{2 \tan A}{\tan^2 A}}$

$$= \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$$

$$\therefore \cot 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{2 \tan A} = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \qquad \cdots \quad \text{(viii)}$$

উদা. 7. $\sin 3A = \sin (2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$

$= 2 \sin A \cos A \cos A + (1 - 2\sin^2 A) \sin A$

$= 2 \sin A \cos^2 A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$

$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$

$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A$ ··· (ix)

উদা. 8. $\cos 3A = \cos (2A + A)$

$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$

$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin A \cos A \sin A$

$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \cos A \sin^2 A$

$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \cos A (1 - \cos^2 A)$

$= 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ ··· (x)

উদা. 9. $\tan 3A = \tan(2A + A) = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \cdot \tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \quad \ldots \quad \text{(xi)}$$

## 4.2. অংশকোণ :

কোন কোণের $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ প্রভৃতি অংশগুলিকে ঐ কোণের অংশকোণ বলে। $\frac{A}{2}$, $\frac{A}{3}$, $\frac{A}{4}$ ইত্যাদি A কোণের অংশকোণ।

আমরা জানি,

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ ... (i)

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$ (ii)

$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ ... (iii)

$\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ... (iv)

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ ... (v)

$\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$ ... (vi)

$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$ ... (vii)

$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$ ... (viii)

$1 + \sin 2A = (\sin A + \cos A)^2$ ... (ix)

$1 - \sin 2A = (\cos A - \sin A)^2$ ... (x)

$\tan^2 A = \dfrac{1-\cos^2 A}{1+\cos^2 A}$ ... (xi)

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ... (xii)

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ ... (xiii)

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$ ... (xiv)

(i) হইতে (xi) পর্যন্ত সূত্রগুলিতে A-এর স্থলে $\frac{A}{2}$ ($2A$ এর স্থলে $2.\frac{A}{2}$ বা A বসাইয়া) বসাইয়া এবং (xii) হইতে (xiv) পর্যন্ত সূত্রগুলিতে A-এর স্থলে $\frac{A}{3}$ বসাইয়া আমরা যথাক্রমে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি পাই।

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \quad \dots \quad \text{(I)}$$

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \quad \dots \quad \text{(II)}$$

$$\sin A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \quad \dots \quad \text{(III)}$$

$$\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \quad \dots \quad \text{(IV)}$$

$$\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} \quad \dots \quad \text{(V)}$$

$$\cot A = \frac{\cot^2 \frac{A}{2} - 1}{2 \cot \frac{A}{2}} \quad \dots \quad \text{(VI)}$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} \quad \dots \quad \text{(VII)}$$

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} \quad \dots \quad \text{(VIII)}$$

$$1 + \sin A = \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}\right)^2 \quad \dots \quad \text{(IX)}$$

$$1 - \sin A = \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}\right)^2 = \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}\right)^2 \quad \text{(X)}$$

$$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \quad \cdots \quad \text{(XI)}$$

$$\sin A=3\sin\frac{A}{3}-4\sin^3\frac{A}{3} \quad \cdots \quad \text{(XII)}$$

$$\cos A=4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3} \quad \cdots \quad \text{(XIII)}$$

$$\tan A=\frac{3\tan\frac{A}{3}-\tan^3\frac{A}{3}}{1-3\tan^2\frac{A}{3}} \quad \cdots \quad \text{(XIV)}$$

এখন যেহেতু $1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}$

$\therefore \quad \cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

বা, $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos A)} \quad \cdots \quad (1)$$

আবার যেহেতু $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$

$\therefore \quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos A)} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\text{এবং } \tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \quad \cdots \quad (3)$$

**চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা** ( *Ambiguity of Signs* ) :

$\frac{A}{2}$ কোণের পরিমাণ না দেওয়ার জন্য কোণটির সীমারেখা যে-কোন পাদে হইতে পারে। সীমারেখাটির অবস্থান নির্ণয় করিয়া $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক হইবে না ঋণাত্মক হইবে তাহা নির্ণয় করা হয়।

$\frac{A}{2}$ কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে "All, sin, tan,

cos এই নিয়ম অনুসারে sin $\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক হয়। $\frac{A}{2}$ এর মান প্রথম ও চতুর্থ পাদে থাকিলে cos $\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক হয়। $\frac{A}{2}$ এর মান প্রথম ও তৃতীয় পাদে থাকিলে tan $\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক হয়। অন্যান্য পাদে উহাদের মান ঋণাত্মক হয়।

অতএব $\frac{A}{2}$ কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকিলে চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

### 4.3. sin A দ্বারা sin $\frac{A}{2}$ ও cos $\frac{A}{2}$ এর মান নির্ণয় ঃ

যেহেতু $\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1 \quad \cdots \quad (1)$

এবং $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A \quad \cdots \quad (2)$

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই,

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)=1+\sin A$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A} \quad \cdots \quad (3)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A} \quad \cdots \quad (4)$$

(3) ও (4) যোগ করিয়া পাই,

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A} \quad \cdots \quad (5)$$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A} \quad \cdots \quad (6)$$

**চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা** ( *Ambiguity of signs*) **:**

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{A}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{A}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

কোন কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে উহার sine ধনাত্মক হয়।

$\therefore$ $\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ বা $\sqrt{1+\sin A}$ ধনাত্মক হইবে।

আবার $\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ বা $\sqrt{1-\sin A}$ ধনাত্মক হইবে। আর অন্যান্য পাদে মানগুলি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব $\frac{A}{2}$ এর মান জানা থাকিলে $\sqrt{1+\sin A}$ এবং $\sqrt{1-\sin A}$ এর চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

**4.4. tan A দ্বারা tan $\frac{A}{2}$ এর মান নির্ণয় :**

আমরা জানি, $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

$\therefore\ \tan A\ \tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}-\tan A=0$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহাকে সমাধান করিলে আমরা পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\tan A\times(-\tan A)}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2 A}}{2\tan A}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+\tan^2 A}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

**মন্তব্য ঃ** $\frac{A}{2}$ কোণের সীমারেখা প্রথম ও তৃতীয় পাদে থাকিলে $\tan\frac{A}{2}$ ধনাত্মক হয় এবং অন্য পাদে থাকিলে ঋণাত্মক হয়। অতএব $\frac{A}{2}$ এর পরিমাণ দেওয়া থাকিলে চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

### 4.5. 18°, 36°, 54°, 72° কোণের কোণানুপাত নির্ণয় ঃ

মনে কর, $A=18^\circ$

$\therefore\ 5A=90^\circ$

বা, $2A+3A=90^\circ$ বা, $2A=90^\circ-3A$

$\therefore\ \sin 2A=\sin(90^\circ-3A)=\cos 3A$

বা, $\sin 2A=4\cos^3 A-3\cos A$

[$\because\ \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$]

বা, $2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$

[$\because\ \sin 2A=2\sin A\cos A$]

বা, $2\sin A\cos A=\cos A(4\cos^2 A-3)$

বা, $2\sin A=4\cos^2 A-3$

[ A-এর মান 18° হওয়ার জন্য $\cos A\neq 0$ ]

বা, $2\sin A=4(1-\sin^2 A)-3=1-4\sin^2 A$

বা, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$$\therefore\ \sin A=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4.4.(-1)}}{2\times4}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

যেহেতু $A=18^\circ$, অতএব $\sin A$ ধনাত্মক।

$\therefore$ উপরের sin A দুইটি মানের ধনাত্মক মানটি লইতে হইবে।

$\therefore \quad \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

আবার $\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ = 1-2\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\}^2 = 1-\frac{1}{8}(6-2\sqrt{5})$

$= \frac{2}{8}(\sqrt{5}+1) = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ-36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

$\cos 54^\circ = \cos(90^\circ-36^\circ) = \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ-18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\cos 72^\circ = \cos(90^\circ-18^\circ) = \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

**উদা.** sin 15° ও cos 15°-এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু $(\frac{30^\circ}{2}+45^\circ)$ বা 60° কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে অবস্থিত, অতএব $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = +\sqrt{1+\sin 30^\circ} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ... (i)

আবার যেহেতু $(\frac{1}{2}\times 30^\circ - 45^\circ)$ বা $-30^\circ$ কোণের সীমারেখা চতুর্থ পাদে অবস্থিত, অতএব $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = +\sqrt{1-\sin 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}$ ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই,

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

**4.6. 3° কোণের এবং ইহার গুণিতক কোণগুলির কোণানুপাত নির্ণয়:**

$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ-15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} \times (\sqrt{3}-1)$

$$\cos 3^\circ = \cos(18^\circ - 15^\circ) = \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

এখন পর্যন্ত $3^\circ$, $15^\circ$, $18^\circ$, $30^\circ$, $36^\circ$, $45^\circ$-এর কোণানুপাতগুলি পাওয়া গেল। উহাদের সাহায্যে $3^\circ$-এর যে-কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলি পাওয়া যাইবে। কারণ $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$, $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$, $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, $21^\circ = 36^\circ - 15^\circ$, $24^\circ = 30^\circ - 6^\circ$ ইত্যাদি।

$3^\circ$-এর কোন গুণিতক কোণ $45^\circ$ অপেক্ষা বড় হইলে উহার পূরককোণ $45^\circ$ অপেক্ষা ছোট হইবে। অতএব এই পূরককোণের কোণানুপাত হইতে $45^\circ$ অপেক্ষা বড় $3^\circ$-এর গুণিতক কোণগুলির কোণানুপাত নির্ণয় করা যাইবে। যেমন, $\sin 57^\circ = \sin 33^\circ = \sin(36^\circ - 3^\circ)$ ইত্যাদি।

**উদা. 1.** $\sin 2A$-এর মান নির্ণয় কর যখন (i) $\sin A = \frac{3}{5}$ (ii) $\cos A = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan A = \frac{2}{5}$.

(i) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \sin A \sqrt{1-\sin^2 A}$

$$= 2 \times \tfrac{3}{5}\sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{6}{5} \times \tfrac{4}{5} = \tfrac{24}{25}.$$

(ii) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \cos A \sqrt{1-\cos^2 A}$

$$= 2.\ \tfrac{4}{5}\sqrt{1-\tfrac{16}{25}} = \tfrac{24}{25}.$$

(iii) $\sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{2 \times \frac{2}{5}}{1+\frac{4}{25}} = \dfrac{20}{29}.$

**উদা. 2.** $\sin 3A$-এর মান নির্ণয় কর যখন $\cos A = \frac{3}{5}$.

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A = 3.\ \frac{4}{5} - 4.(\frac{4}{5})^3$

$$= \tfrac{12}{5} - \tfrac{256}{125} = \tfrac{44}{125}.$$

**উদা. 3.** যদি $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos^2\beta}.$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha \tan\beta} = \frac{\frac{3}{2}\tan\beta - \tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan\beta.\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{\tan\beta}{2}}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{3}{2}\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta}.\ 4\cos^2\beta}{4\cos^2\beta+\frac{3}{2}\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}.\ 4\cos^2\beta}=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{4\cos^2\beta+6\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin 2\beta}{4(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+2\sin^2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{4+(1-\cos 2\beta)}$$

$$=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$

**উদা. 4.** প্রমাণ কর :

$$\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$$

বামপক্ষ $=\tan(2A+A)-\tan 2A-\tan A$

$$=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}-\tan 2A-\tan A$$

$$=\frac{\tan 2A+\tan A-\tan 2A-\tan A+(\tan A+\tan 2A)(\tan 2A\tan A)}{1-\tan 2A\tan A}$$

$$=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}.\ \tan A\tan 2A$$

$$=\tan(2A+A).\ \tan A\tan 2A=\tan 3A.\ \tan 2A.\ \tan A.$$

**উদা. 5.** A ও B যদি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং

$\cos 2A=\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$ হয়, প্রমাণ কর $\tan A=\sqrt{2}\tan\beta$.

$$\cos 2A=\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$$

বা, $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\frac{(3-\cos 2\beta)-(3\cos 2\beta-1)}{(3-\cos 2\beta)+(3\cos 2\beta-1)}$

[ যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া ]

$$=\frac{4-4\cos 2\beta}{2+2\cos 2\beta}=2.\ \frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}$$

$$\therefore \quad \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A}=2\,\frac{2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta} \quad \text{বা,} \quad \tan^2 A=2\tan^2\beta$$

$$\therefore \quad \tan A=\pm\sqrt{2}\tan\beta.$$

যেহেতু A-ও ধনাত্মক কোণ, $\therefore$ $\tan A$, $\tan\beta$ প্রত্যেকেই ধনাত্মক।

$$\therefore \quad \tan A=\sqrt{2}\tan\beta.$$

উদা. 6. যদি $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{B}{2}$ হয়, প্রমাণ কর যে

$$\cos B=\frac{\cos A-e}{1-e\cos A}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{B}{2} \quad \text{বা,} \quad \tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{B}{2}$$

$$\text{বা,} \quad \tan^2\frac{B}{2}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad \cos B=\frac{1-\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}} \qquad \left[\because \cos A=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}\right]$$

$$=\frac{1-\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{A}{2}}{1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{1-\frac{1+e}{1-e}\,\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{1+\frac{1+e}{1-e}\,\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$=\frac{(1-e)\cos^2\frac{A}{2}-(1+e)\sin^2\frac{A}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{A}{2}+(1+e)\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)-e\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)-e\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos A-e}{1-e\cos A} \qquad \left[\because \quad \cos A=\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}\right]$$

## প্রশ্নমালা 4

মান নির্ণয় কর :

1. $\sin 2A$, যখন $\sin A=\frac{12}{13}$.
2. $\cos 2A$, যখন $\cos A=\frac{5}{3}$.
3. $\sin 3A$, যখন $\sin A=\frac{2}{3}$.
4. $\cos 3A$, যখন $\cos A=\frac{2}{5}$.
5. $\tan A$, যখন $\sin 2A=\frac{12}{13}$.

প্রমাণ কর :

6. $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos^2 A}=\cot A$.

7. $\dfrac{1-\cos 2A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\sin 2A}=\tan A$.

8. $\cot A-\tan A=2\cot 2A$.

9. $\dfrac{\dfrac{1}{\cos 8A}-1}{\dfrac{1}{\cos 4A}-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$.

10. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\dfrac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$.

11. $\dfrac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A$.

12. $\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec} 2A$.

13. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$.

14. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}=\sec 2A$

15. $\dfrac{\tan 2A}{\tan A} = 1 + \sec 2A.$

16. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A.$

17. $\cos^6 A + \sin^6 A = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2A).$

18. $\cos^8 A - \sin^8 A = \cos 2A - \frac{1}{4}\sin 2A \sin 4A.$

19. $\dfrac{1 - \cos A + \sin A}{1 + \cos A + \sin A} = \tan \dfrac{A}{2}.$

20. $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \tan 2A.$

21. $\dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan (A + B).$

22. $\dfrac{1 + \sin 2A + \cos 2A}{1 + \sin 2A - \cos 2A} = \cot A.$

23. $\cot A + \cot (60^\circ + A) + \cot (120^\circ + A) = 3 \cot 3A.$

24. $\sin^3 A + \sin^3(120^\circ + A) + \sin^3(240^\circ + A) = -\frac{3}{4}\sin 3A.$

25. $\sqrt{3} \operatorname{cosec} 20^\circ - \sec 20^\circ = 4.$

26. $\tan (45^\circ + A) - \tan (45^\circ - A) = 2 \tan 2A.$

27. (*a*) $\sin 8A = 8 \sin A \cos A \cos 2A \cos 4A.$

(*b*) (i) $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A.$

(ii) $\dfrac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A} = \tan A.$

(iii) $\dfrac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta.$

28. $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}.$

29. $4 \sin^3 A \cos 3A + 4 \cos^3 A \sin 3A = 3 \sin 4A.$

30. $\cos^2 (45^\circ - A) - \sin^2 (45^\circ - A) = \sin 2A.$

31. $\tan 4A = \dfrac{4 \tan A - 4 \tan^3 A}{1 - 6 \tan^2 A + \tan^4 A}.$

32. যদি $\cos\theta = 1$ হয়, দেখাও যে $\cos 2\theta = 1.$

33. যদি $\tan A = \cos 2B$ হয়, দেখাও যে $\sin 2A = \dfrac{1 - \tan^4 B}{1 + \tan^4 B}$.

34. যদি $\tan \theta = \dfrac{b}{a}$ হয়, দেখাও যে $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta = a$.

35. যদি $A + B = \dfrac{\pi}{2}$ হয়, দেখাও যে $\dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A}$

$= \tan A - \tan B$.

36. যদি $\sin A + \sin B = a$, $\cos A + \cos B = b$ হয়, দেখাও যে

$$\tan \frac{A - B}{2} = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}.$$

37. যদি $\cos A + \cos B = \frac{1}{8}$ এবং $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$ হয়,

প্রমাণ কর $\tan \dfrac{A + B}{2} = \frac{3}{4}$.

প্রমাণ কর :—

38. $\cos A + \cos^2 \left(A + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2 \left(A - \dfrac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

39. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

40. $\cos (120^\circ - A + \cos A + \cos (120^\circ + A) = 0$.

41. $\tan (45^\circ + A) + \tan (45^\circ - A) = 2 \sec 2A$.

42. $\cos A \cos \left(\dfrac{\pi}{3} - A\right) \cos \left(\dfrac{\pi}{3} + A\right) = \frac{1}{4} \cos 3A$.

43. $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$.

44. $\cot 6^\circ \cot 42^\circ \cot 66^\circ \cos 78^\circ = 1$.

পঞ্চম অধ্যায়

# ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান
## ( General Solutions of Trigonometrical Equations )

**5.1.** পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে যে, এইরূপ অনেক কোণ হইতে পারে যাহাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান একই। উদাহরণস্বরূপ বলা যাইতে পারে যে, যদি $\sin\theta=\frac{1}{2}$ হয়, তাহা হইলে $\theta$-এর ক্ষুদ্রতম মান $30°$। কারণ $\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin 30°$, $\therefore\ \theta=30°$। এখন যেহেতু সম্পূরক কোণগুলির sine সমান হয়, অতএব $\sin 150°$-এর মান $\frac{1}{2}$ হইবে। অর্থাৎ $\sin 150°=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

এইভাবে দেখা যায় যে সমস্ত কোণের $30°$ অথবা $150°$ হইতে পার্থক্য $360°$-এর সম্পূর্ণ গুণিতক (Complete multiples of 360°) সেই সকল কোণেরও sine ( বস্তুতঃ কোণানুপাতগুলিও ) সমান হইবে। এইসব ক্ষেত্রে $30°, 150°, 390°, 510, -330°, -210°$ প্রভৃতি কোণগুলির sine সমান হয় অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ হয়।

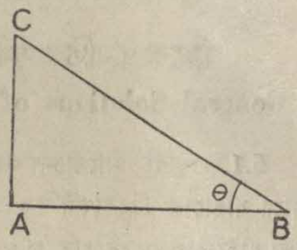
অনুরূপভাবে যদি $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ হয়, তাহা হইলে $\theta$-এর মান $45°, 315°, 405°, -45°, -315°$ প্রভৃতি মানগুলির যে-কোন মান হইতে পারে। আবার যদি $\tan\theta=\sqrt{3}$ হয়, তাহা হইলে $\theta$-এর মান $60°, 240°, 420°, -300°$ প্রভৃতি মানগুলির যে-কোন মান হইতে পারে। অতএব ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধানের জন্য যেসব কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান সমান সেই সকল কোণগুলিকে প্রকাশ করিবার জন্য সংক্ষিপ্ত সাধারণ রূপ প্রয়োজন।

**5.2. কোণানুপাত শূন্য হইলে সাধারণ কোণ নির্ণয় :**

(i) যদি কোন কোণের sine শূন্য হয়, তাহা হইলে ঐ কোণের কোন বাহুস্থিত একটি বিন্দু হইতে অপর বাহুটির উপর যে লম্ব উৎপন্ন হয় তাহা শূন্য হয়। পরপৃষ্ঠার চিত্রে

$$\sin\theta=\frac{\text{লম্ব AC}}{\text{অতিভুজ BC}}।$$

sin $\theta$ শূন্য হইবে যদি লম্ব AC শূন্য হয়। কিন্তু ইহা সম্ভব হইতে পারে যদি ঐ কোণের বাহু দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়। অতএব এই সকল কোণ নিশ্চয়ই $\pi$ বা 180°-এর জোড় (even) বা বিজোড় (odd) গুণিতক হইবে।



চিত্র—18

$\therefore$ sin $\theta=0$ হইলে $\theta=n\pi$ হইবে,

যেখানে $n$-এর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(ii) কোন কোণের cosine শূন্য হইলে ভূমির পরিমাণ শূন্য হয়।

উপরের চিত্রে $\cos\theta=\dfrac{\text{ভূমি AB}}{\text{অতিভুজ BC}}$ ।

cos $\theta$ শূন্য হইবে যদি ভূমি AB শূন্য হয়। কিন্তু ইহা সম্ভব হইবে যদি ঐ কোণের বাহু দুইটি পরস্পর লম্ব হয়।

$\therefore$ ঐ কোণের পরিমাণ নিশ্চয়ই $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{\pi}{2}$-এর বিজোড় গুণিতক হয় (অর্থাৎ $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ বা $\frac{5\pi}{2}$ বা $\frac{7\pi}{2}$ ইত্যাদি)।

$\therefore$ যদি $\cos\theta=0$ হয়, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে, যেখানে $n$-এর মান শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোণ পূর্ণসংখ্যা।

(iii) যদি $\tan\theta=0$ অর্থাৎ যদি $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$ হয়, তাহা হইলে $\sin\theta=0$ হইবে।

$\therefore$ $\tan\theta=0$ হইলে $\theta=n\pi$ হইবে।

অনুরূপে $\cot\theta=0$ হইলে $\cos\theta=0$ হইবে।

$\therefore$ $\cot\theta=0$ হইলে $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে।

**মন্তব্য :** sec $\theta$ ও cosec $\theta$-এর মান শূন্য হইতে পারে না, কারণ উহাদের সাংখ্যমান কোন সময়েই 1 অপেক্ষা ছোট হয় না।

**5.3. যে কোণগুলির sine সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয়ঃ**

মনে কর, sine দেওয়া আছে। আবার মনে কর, $\alpha$ হইল ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার sine প্রদত্ত sine-এর সমান এবং $\theta$ অপর যে-কোন একটি কোণ যাহার sine প্রদত্ত sine-এর সমান।

$\therefore \quad \sin\theta = \sin\alpha$।

এই সমীকরণ হইতে $\theta$-এর এমন সাধারণ মান বাহির করিতে হইবে যাহা দ্বারা এই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$$\therefore \quad \sin\theta = \sin\alpha$$

$$\therefore \quad \sin\theta - \sin\alpha = 0$$

বা, $$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0.$$

$$\therefore \quad \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0 \quad \text{বা,} \quad \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$$

যদি $\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$ হয়, তাহা হইলে $\frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$ হইবে।

অর্থাৎ $\theta = \alpha + 2m\pi$ হইবে।

যদি $\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$ হয়, তাহাহইলে $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে।

অর্থাৎ $\theta = -\alpha + (2m+1)\pi$ হইবে। $m$ যেখানে শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, সেইহেতু দেখা যাইতেছে যে $\alpha$-এর সহিত $\pi$-এর জোড় গুণিতক এবং $-\alpha$-এর সহিত বিজোড় গুণিতক সংযোজিত হইয়াছে।

একত্রে বলা যায় যে, নির্ণেয় কোণের সাধারণ রূপ $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, যেখানে $n$ শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

আবার যদি $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ হয়, তবে $\sin\theta = \sin\alpha$ হইবে।

$\therefore$ যে কোণগুলির cosecant সমান তাহাদের পূর্বের মত নির্ণেয় কোণের সাধারণ রূপ হইবে $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$ ; $n$ যেখানে শূন্য বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

**5.4. যে কোণগুলির cosine সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয়ঃ**

মনে কর, cosine দেওয়া আছে এবং $\alpha$ ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ এবং $\theta$ অপর যে-কোন একটি কোণ যাহাদের cosine প্রদত্ত cosine-এর সমান।

$\therefore \quad \cos\theta = \cos\alpha$

বা, $\cos\theta - \cos\alpha = 0$

বা, $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\therefore \quad \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ বা, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

যদি $\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$ হয়, $\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$

বা, $\theta = 2n\pi - \alpha$.

আবার যদি $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ হয়, $\theta = \alpha + 2n\pi$

এখানে দেখা যাইতেছে যে $\alpha$ ও $-\alpha$ উভয়ের সহিত $\pi$-এর জোড় গুণিতক সংযোজিত হইয়াছে।

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের সাধারণ রূপ $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, $n$-এর মান শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

**মন্তব্য :** $\sec\theta = \sec\alpha$ হইলে $\cos\theta = \cos\alpha$ হয়। যে সকল কোণের secant সমান, পূর্বের মত নির্ণেয় কোণের সাধারণ রূপ হইবে $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.

**5.5. যে কোণগুলির tangent সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় :**

মনে কর, tangent দেওয়া আছে এবং ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ $\alpha$ এবং $\theta$ অপর যে-কোন একটি কোণ যাহাদের tangent প্রদত্ত tangent-এর সমান।

$\therefore \quad \tan\theta = \tan\alpha$ বা, $\tan\theta - \tan\alpha = 0$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

বা, $\frac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

বা, $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

$\therefore \quad \sin(\theta-\alpha) = 0$ বা, $\frac{1}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

কিন্তু $\frac{1}{\cos\theta\cos\alpha}=0$ হইতে পারে না। কারণ কোণের cosine-এর মান $\infty$ হইতে পারে না।

$\therefore\ \sin(\theta-\alpha)=0 \qquad \therefore\ \theta-\alpha=n\pi$

বা, $\theta=\alpha+n\pi$.

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের সাধারণ রূপ $\theta=\alpha+n\pi$, $n=0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

**মন্তব্য ঃ** $\cot\theta=\cot\alpha$ হইলে $\tan\theta=\tan\alpha$ হয়। পূর্বের মত নির্ণেয় কোণের সাধারণ রূপ $\theta=n\pi+\alpha$.

**নিম্নের সূত্রগুলি মনে রাখা খুবই প্রয়োজন।**

$n=0$ বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(i) $\sin\theta=0$ হইলে $\theta=n\pi$

$\sin\theta=\sin\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$

$\sin\theta=1=\sin\frac{\pi}{2}$ হইলে, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\sin\theta=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ হইলে, $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\cos\theta=\cos\alpha$ হইলে, $\theta=2n\pi\pm\alpha$

$\cos\theta=1$ হইলে, $\theta=2n\pi$

$\cos\theta=-1$ হইলে, $\theta=2n\pi+\pi$

(iii) $\tan\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$

$\tan\theta=\tan\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$

(iv) $\cot\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\cot\theta=\cot\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$

উপরের সূত্রগুলি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধানের জন্য প্রয়োজন হয়। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে সমাধানের পদ্ধতি ও সূত্রগুলির ব্যবহার প্রণালী দেখানো হইল।

**উদা. 1.** যদি $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হয়, তাহা হইলে $\theta$-এর সাধারণ রূপ নির্ণয় কর।

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$$

$\therefore\quad \theta=n\pi+(-)^n\frac{\pi}{3}$। ইহাই হইল নির্ণেয় সাধারণ রূপ।

**উদা. 2.** সমাধান কর :

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2} \quad \cdots \quad (1)$$

এখানে $(1)^2+(\sqrt{3})^2=4$, উভয় পক্ষকে $\sqrt{4}$ বা 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tfrac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots \quad (2)$$

বা, $\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \theta+\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}.$

**উদা. 3.** সমাধান কর : $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan\theta\tan 2\theta=1$

$$\tan\theta+\tan 2\theta=1-\tan\theta\tan 2\theta$$

বা, $\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}=1$ বা, $\tan(2\theta+\theta)=1$

বা, $\tan 3\theta=1=\tan\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\quad 3\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}.$

**উদা. 4.** সমাধান কর :

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2,\ -2\pi<\theta<2\pi$$

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$ বা 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tfrac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=1$$

বা, $\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{3}\sin\theta=1$

বা, $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1=\cos 0^\circ \quad \therefore\ \theta-\frac{\pi}{3}=2n\pi$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$$

$n=0$ হইলে, $\theta=\frac{\pi}{3}$, $n=-1$ হইলে, $\theta=-\frac{5\pi}{3}$

এখানে দেখা যাইতেছে যে, $\theta$-এর মান $\frac{\pi}{3}$ ও $-\frac{5\pi}{3}$ উভয়েই $-2\pi$ ও $2\pi$ এর মধ্যবর্তী।

**উদা. 5.** সমাধান কর : $\sin m\theta+\sin n\theta=0$

$\sin m\theta+\sin n\theta=0$

বা, $\sin m\theta=-\sin n\theta=\sin(-n\theta)$

$\therefore\ m\theta=k\pi+(-1)^k(-n\theta)$

বা, $\{m+(-1)^k n\}\theta=k\pi$

$$\therefore\quad \theta=\frac{k\pi}{\{m+(-1)^k n\}}.$$

**উদা. 6.** সমাধান কর : $a\cos\theta+b\sin\theta+c=0$

এইরূপ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান করিতে হইলে, সমীকরণটিকে $\sqrt{a^2+b}$ দ্বারা [ অর্থাৎ $\sqrt{(\cos\theta \text{ এর সহগ })^2+(\sin\theta \text{ এর সহগ })^2}$ ] ভাগ করিতে হইবে এবং তারপর অগ্রসর হইবে।

$$\therefore\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\text{or,}\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

মনে কর $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$ এবং $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\beta.$

$$\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2}=r, \ \tan\alpha=\frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha, \ \frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$$

এখন প্রদত্ত সমীকরণটি হইবে

$\cos\theta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\theta=\cos\beta$, [$\alpha$, $\beta$ কোণদ্বয় জ্ঞাত আছে ]

$\therefore \quad \cos(\theta-\alpha)=\cos\beta.$

$\therefore \quad \theta-\alpha=2n\pi\pm\beta, n=0, 1, 2, 3\cdots$

$\therefore \quad \theta=\alpha+2n\pi\pm\beta$, নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

## প্রশ্নমালা 5

সমাধান কর :

1. (i) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1$ (ii) $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2$

4. $2\cos^2\theta+4\sin^2\theta=3$ 5. $\sec^2\theta-3\operatorname{cosec}^2\theta=0$

6. $\cos 2\theta-\sin\theta\cos\theta=0$

7. (i) $\cot\theta-\tan\theta=2$ (ii) $\tan\theta+\cot\theta=4$

8. $\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=0$ 9. $\sin 5\theta+\sin\theta=\sin 3\theta$

10. (i) $\tan\theta-\cot\theta=0$ (ii) $\tan\theta+\cot 2\theta=2$

11. $2\sin\theta\sin 3\theta=1$ 12. $\sin 4\theta+\sin\theta=0$

13. $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta=0$

14. $2\cos^2\theta+4\sin^2\theta=3$ 15. $\cos\theta+\sin\theta=-\sqrt{2}$

16. $\cos\theta+\tan\theta=\sec\theta.$

17. $\sin 5\theta\cos 3\theta=\sin 9\theta\cos 7\theta$

18. $\cot\theta-\cot 2\theta=2$ 19. $\cos 3\theta-\sin\theta=\cos 5\theta$

20. $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta=\tan\theta\tan 2\theta\tan 3\theta$

21. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=4$

22. $\tan\theta+\tan 2\theta=\tan 3\theta.$

23. $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2$

24. $\cos m\theta+\cos n\theta=0$

25. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}, \ -\pi<\theta<\pi$

26. (i) $\sqrt{3}\sin\theta+\sin\theta=1,\ -2\pi<\theta<2\pi$

(ii) $2\sin^2\theta+\sin\theta=3,\ 0^\circ<\theta<1000^\circ$

27. $\sin\theta+2\cos\theta-1=0$

28. $\tan^2\theta-(1+\sqrt{3})\tan\theta+\sqrt{3}=0$

29. $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta=0$

30. $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$

31. $\sin 2\theta\ \ \tan\theta+1=\sin 2\theta+\tan\theta.$

32. $\cos\theta+\sin\theta=\cos 2\theta+\sin 2\theta$

33. $4\sin 4\theta+1=0$

34. $\cos\theta-\sin\theta=\cos\alpha+\sin\alpha$

35. $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2$

36. $\cos 6\theta+\cos 4\theta=\sin 3\theta+\sin\theta$

37. $\cos 9\theta\cos 7\theta=\cos 5\theta\cos 3\theta,\ -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$

38. $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\pi<\theta<\pi$

39. $4\sin\theta\cos\theta+2\cos\theta=1-2\sin\theta,\ 0<\theta<\pi$

40. $\cot\theta-\tan\theta=2,\ 0<\theta<2\pi$

41. $2\sin^2\theta+\sin 2\theta-2=0,\ -\pi<\theta<\pi$

42. $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2},\ 0<\theta<2\pi$

43. $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2,\ 3\pi<\theta<5\pi$

44. $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1,\ 0<\theta<2\pi$

45. $\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4},\ 0<\theta<2\pi$

46. $\cot\theta+\tan\theta=2\operatorname{cosec}\theta,\ 0<\theta<2\pi$

47. $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0,\ 0<\theta<2\pi$

48. $3\sec^2\theta+3\tan^2\theta=5,\ 0<\theta<2\pi$

49. $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta,\ 0<\theta<2\pi$

50. $\sin 4\theta-\cos 3\theta=\sin 2\theta,\ 0<\theta<2\pi.$

# ষষ্ঠ অধ্যায়

# বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক

## ( Inverse Circular Function )

**6.1.** সমীকরণ $\sin \theta = x$ বলিতে বুঝায় যে, $\theta$ এমন একটি কোণ যাহার sine হইল $x$ ( $x$ একটি জ্ঞাত রাশি )। $\theta$-কে বিপরীতক্রমে ( inversely ) সংক্ষেপে লেখা হয় $\theta = \sin^{-1} x$।

$\sin^{-1} x$ বলিতে এমন একটি কোণ বুঝায় যাহার sine হইল $x$। প্রতীক চিহ্ন $\sin^{-1} x$-কে বলা হয় sine inverse $x$। অনুরূপভাবে যদি $\cos \theta = x$ হয়, তাহা হইলে $\theta = \cos^{-1} x$ হইবে। $\cos^{-1} x$ দ্বারা এমন একটি কোণ বুঝায় যাহার cosine $x$। এইভাবে যে-কোন কোণানুপাতকে প্রকাশ করা যায়।

Expressions $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ইত্যাদিকে বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক বলে।

**মন্তব্য ঃ** মনে রাখা দরকার যে $\sin^{-1} x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এই দুইটি জিনিস এক নয়।

কারণ $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ হয়।

**6.2.** মনে কর, $\sin \theta = x \quad \therefore \quad \theta = \sin^{-1} x$।

এখানে লক্ষ্য করার বিষয় এই যে, $\sin^{-1} x$ হইল একটি কোণ এবং $\sin \theta$ হইল একটি সংখ্যা। $\sin \theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1} x$ এই দুইটি জিনিস একই। ইহাদের মধ্যে একটি জানা থাকিলে অপরটি জানা যায়। আমরা জানি, কোন কোণের sine 1 অপেক্ষা বড় হইতে পারে না। অতএব $\sin^{-1} x$ অর্থহীন হইয়া পড়িবে যদি না $-1 \leqslant x \leqslant 1$ হয়।

$\therefore$ $\sin^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে $-1 \leqslant x \leqslant 1$ হইবে ;

$\cos^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে $-1 \leqslant x \leqslant 1$ হইবে ;

$\text{cosec}^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে $-1 \leqslant x$ হইবে ;

$\sec^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে $x \geqslant 1$ হইবে ;

$\tan^{-1} x$ এবং $\cot^{-1} x$ এর ক্ষেত্রে $x$-এর যে-কোন মান হইবে।

আমরা জানি, $\theta$ যদি এমন একটি যে-কোন কোণ হয় যাহার sine $x$-এর সমান তাহা হইলে $n\pi+(-1)^n\theta$ এর অন্তর্ভূ‍ত সমস্ত কোণের sine $x$ হইবে।

$\therefore$ $\sin^{-1}x$ এর অসংখ্য মান হইতে পারে এবং $\sin^{-1}x$ হইল একটি Multiple-valued function। অতএব $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান হইল $n\pi+(-1)^n \sin^{-1}x$। অর্থাৎ $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান হইল

$$n\pi+(-1)^n \sin^{-1}x.$$

অনুরূপে $\cos^{-1}x$ এর সাধারণ মান $2n\pi \pm \cos^{-1}x$ এবং $\tan^{-1}x$ এর সাধারণ মান $n\pi \pm \tan^{-1}x$.

**মন্তব্য :** এখানে $\theta$ হইল যে-কোন একটি নির্দিষ্ট কোণ। কোন কিছু যদি উল্লেখ না থাকে তাহা হইলে এই নির্দিষ্ট কোণ সাধারণতঃ $\sin^{-1}x$, $\operatorname{cosec}^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ এবং $\cot^{-1}x$ এর সময় $-90^\circ$ ও $90^\circ$-এর মধ্যে লওয়া হয়। আর $\cos^{-1}x$ ও $\sec^{-1}x$ এর সময় নির্দিষ্ট কোণকে $0^\circ$ ও $180^\circ$-এর মধ্যে লওয়া হয়।

**6·3. মুখ্যমান** (*Principal Value*)**:**

$\theta$-এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম মানকে $\sin^{-1}x$-এর মুখ্যমান বলা হয়। এইরূপে $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান হইল $30^\circ$।

আবার যদি একই মানবিশিষ্ট দুইটি এমন কোণ থাকে যাহাদের সাংখ্যমান সমান কিন্তু দুইটির মধ্যে একটি ধনাত্মক অপরটি ঋণাত্মক, তাহা হইলে ধনাত্মক কোণটিকেই সাধারণতঃ মুখ্যমান বলা হয়। যেমন $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $60^\circ$ কিন্তু $-60^\circ$ হয় না যদিও $\cos(-60^\circ)=\frac{1}{2}$।

**6.4.** $\sin\theta=x$ হইলে $\theta=\sin^{-1}x$ হইবে ;

$\therefore$ $\theta=\sin^{-1}\sin\theta$.

অনুরূপে, $\theta=\cos^{-1}\cos\theta$, $\theta=\tan^{-1}\tan\theta$ ইত্যাদি।

আবার $\theta=\sin^{-1}x$ হইলে $\sin\theta=x$ হইবে ;

$\therefore$ $\sin\sin^{-1}x=x$, $\cos\cos^{-1}x=x$, $\tan\tan^{-1}x=x$ ইত্যাদি।

**প্রমাণ কর :** (i) $\operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$ ;

(ii) $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ ;

(iii) $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$.

(i) মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1} x=\theta$ $\therefore$ $\operatorname{cosec} \theta=x$

$\therefore$ $\sin \theta=\dfrac{1}{\operatorname{cosec} \theta}=\dfrac{1}{x}$ $\therefore$ $\theta=\sin^{-1} \dfrac{1}{x}$.

$\therefore$ $\operatorname{cosec}^{-1} x=\sin^{-1} \dfrac{1}{x}$.

(ii) মনে কর, $\cot^{-1} x=\theta$ $\therefore$ $\cot \theta=x$

$\tan \theta=\dfrac{1}{\cot \theta}=\dfrac{1}{x}$ $\therefore$ $\theta=\tan^{-1} \dfrac{1}{x}$

$\therefore$ $\cot^{-1} x=\tan^{-1} \dfrac{1}{x}$.

(iii) মনে কর, $\sec^{-1} x=\theta$ $\therefore$ $\sec \theta=x$.

$\cos \theta=\dfrac{1}{\sec \theta}=\dfrac{1}{x}$ $\therefore$ $\theta=\cos^{-1} \dfrac{1}{x}$.

$\therefore$ $\sec^{-1} x=\cos^{-1} \dfrac{1}{x}$.

**6.5.** যদি $\sin^{-1} x=\theta$ হয়, তাহা হইলে

$\sin \theta=x$, $\cos \theta=\sqrt{1-\sin^2 \theta}=\sqrt{1-x^2}$ ; এবং

$$\tan \theta=\frac{\sin \theta}{\cos \theta}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot \theta=\frac{1}{\tan \theta}=\frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sec \theta=\frac{1}{\cos \theta}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta=\frac{1}{\sin \theta}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \theta=\sin^{-1} x=\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$$

$$=\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$=\sec^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}.$$

**মন্তব্য ঃ** এইভাবে যে-কোন একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাত দেওয়া থাকিলে বাকি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যাইবে।

**1. প্রমাণ কর ঃ** (i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$;

(ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$;

(iii) $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$ $\quad\therefore\ \sin\theta=x$

এখন $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\quad\therefore\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$

$(\because\ \sin\theta=x)$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}-\theta=\cos^{-1}x$ অর্থাৎ $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta.$

$\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$ $\quad\therefore\ \tan\theta=x$

এখন $\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\quad\therefore\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta=x$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}-\theta=\cot^{-1}x$ অর্থাৎ $\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta.$

$\therefore\ \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}.$

(iii) মনে কর, $\sec^{-1}x=\theta$ $\quad\therefore\ x=\sec\theta$

অর্থাৎ $\sec\theta=x$

এখন $\sec\theta=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$ $\quad\therefore\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}-\theta=\operatorname{cosec}^{-1}x$

$\therefore\ \sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}.$

2. প্রমাণ কর :

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ ;

(ii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$ ;

(i) আমরা জানি, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots\quad(A)$$

মনে কর, $\tan\alpha=x$, $\tan\beta=y$ $\therefore$ $\alpha=\tan^{-1}x$, $\beta=\tan^{-1}y$
(A) হইতে পাই,

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

(ii) $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$\therefore\ \alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots\quad(B)$$

মনে কর, $\tan\alpha=x$, $\tan\beta=y$ $\therefore$ $\alpha=\tan^{-1}x$, $\beta=\tan^{-1}y$
(B) হইতে পাই,

$$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

**মন্তব্য :** অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় :

(i) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy-1}{y+x}$ ;

(ii) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy+1}{y-x}$ ;

(iii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$

সূত্রে যদি $y=x$ বসানো হয়, তাহা হইলে $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ হয়।

3. প্রমাণ কর : $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

আমরা জানি, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma$

$$=\tan^{-1}\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta} \quad \cdots \quad (C)$$

মনে কর, $\tan\alpha=x$, $\tan\beta=y$, $\tan\gamma=z$

$\therefore\ \alpha=\tan^{-1}x,\ \beta=\tan^{-1}y,\ \gamma=\tan^{-1}z$

$\therefore$ (C) হইতে পাই,

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

4. **নিম্নলিখিত সূত্রগুলি মনে রাখা দরকার ঃ**

(i) $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

(ii) $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

(iii) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

(iv) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$

(v) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

5. **প্রমাণ কর ঃ**

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x+4x^3)$

(ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

(iii) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$ $\quad\therefore\ \sin\alpha=x$

এখন $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3x-4x^3$

$\therefore\ 3\alpha=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

$\therefore\ 3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

অনুরূপভাবে $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ ধরিয়া (ii) নং সূত্র এবং $\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ ধরিয়া (iii) নং সূত্র প্রমাণ করা যায়।

উদা 1. প্রমাণ কর : $\tan^{-1}\frac{3}{4}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3}$

মনে কর, $\tan^{-1}\frac{3}{4}=\theta$ $\therefore$ $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\cot =\frac{4}{3}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta=\frac{5}{3}$ $\therefore$ $\theta=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3}$

$\therefore$ $\tan^{-1}\frac{3}{4}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3}$.

উদা. 2. দেখাও যে $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\theta$ $\therefore$ $\frac{1}{2}=\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

$\therefore$ $90^\circ-\theta=\cos^{-1}\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\theta+90^\circ-\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$.

উদা 3. দেখাও যে $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$.

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\theta$, $\sin^{-1}\frac{8}{17}=\alpha$

$\therefore$ $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{8}{17}$

$\therefore$ $\cos =\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}$

$\therefore$ $\cos\theta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ $\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$

$=\frac{3}{6}\cdot\frac{15}{17}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{9}{17}+\frac{32}{85}=\frac{77}{85}$

$\therefore\ \theta+\alpha=\sin^{-1}\frac{77}{85}$

$\therefore\ \sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}.$

**উদা. 4.** দেখাও যে $\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$

বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{1+\frac{1}{2}}{1-1.\frac{1}{2}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$=\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{3+\frac{1}{3}}{1-3.\frac{1}{3}}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{10}{3}}{0}=\tan^{-1}\infty=\frac{\pi}{2}.$

**উদা. 5.** দেখাও যে $\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}+\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz}$

$+\tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx}=0$

বামপক্ষ $=\tan^{-1}x-\tan^{-1}y+\tan^{-1}y-\tan^{-1}z+\tan^{-1}z-\tan^{-1}x$

$=0$

**উদা. 6.** দেখাও যে $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}A=A$

মনে কর, $\sin^{-1}A=\theta\quad\therefore\ \sin\theta=A$

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-A^2}$

$\cot\sin^{-1}A=\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{\frac{1-A^2}{A}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore\ \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore\ \cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}A=\cos\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=A.$

**উদা. 7.** সমাধান কর : $\cot^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{4}$

মনে কর, $\cot^{-1}x=\theta$, $\cot\theta=x$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1}{x} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{x}$

$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \alpha \qquad \therefore \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \cot^{-1}x + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{1}{x} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{1}{x} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2x}} = \frac{\pi}{4}$ বা, $\tan^{-1}\frac{2+x}{2x-1} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\frac{2+x}{2x-1} = \tan^{-1}\frac{\pi}{4} = 1$

বা, $2+x = 2x-1 \quad \therefore \quad x = 3.$

## প্রশ্নমালা 6

মান নির্ণয় কর :

1. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 3. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

প্রমাণ কর :

4. $\tan^{-1}\frac{4}{7} + \tan^{-1}\frac{3}{11} = \frac{\pi}{4}$

5. $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

6. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

7. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

10. (i) $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$

(ii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$

11. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$

12. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$

13. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\cot^{-1}3$

15. $4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)=\pi$

16. (i) $\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}+\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}=0$

(ii) $\tan^{-1}a-\tan^{-1}c=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}$

17. $\tan^{-1}(1-\sqrt{2})+\tan^{-1}(1+\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$

18. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$

19. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(x^2+x+1)$

20. (i) $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$

(ii) $\cot^{-1}(\tan 2x)+\cot^{-1}(-\tan 3x)=x$

21. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\cot^{-1}\frac{24}{7}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

22. (i) $\sin (2 \sin^{-1} x)=2x\sqrt{1-x^2}$

(ii) $4(\cot^{-1} 3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$

23. $\tan^{-1}(x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

24. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

25. $\cos^{-1} x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

26. $\tan^{-1}\frac{1}{a+b}+\tan^{-1}\frac{b}{a^2+ab+1}=\tan^{-1}\frac{1}{a}$

27. $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$

28. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)=1$

29. $\cot^{-1}\frac{xy+1}{x-y}+\cot\frac{yz+1}{y-z}+\cot\frac{zx+1}{z-x}=0$

30. $\tan(\tan^{-1} x+\tan^{-1} y+\tan^{-1} z)$
$=\cot(\cot^{-1} x+\cot^{-1} y+\cot^{-1} z)$

31. যদি $\tan^{-1} x+\tan^{-1} y+\tan^{-1} z=\pi$ হয়,
প্রমাণ কর $x+y+z=xyz$

32. যদি $\cos^{-1} x+\cos^{-1} y+\cos^{-1} z=\pi$ হয়,
দেখাও যে $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

33. (i) যদি $\tan^{-1} x+\tan^{-1} y+\tan^{-1} z=\frac{\pi}{2}$ হয়,

প্রমাণ কর $xy+yz+zx=1$

(ii) যদি $\tan^{-1} A+\tan^{-1} B+\tan^{-1} C=\frac{\pi}{2}$ হয়,

প্রমাণ কর $AB+BC+CA=1$

সমাধান কর :

34. $\tan^{-1} 2x+\tan^{-1} 3x=\frac{\pi}{4}$

35. $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1} x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1} 3x$

36. $\tan^{-1} \frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2} \tan^{-1} x$

37. $\tan(\cos^{-1} x)=\sin(\tan^{-1} 2)$

38. $\sin^{-1} x+\sin^{-1} 2x=\frac{\pi}{3}$

39. $\sin^{-1} \frac{5}{x}+\sin^{-1} \frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$

40. $\tan^{-1} 2x+\tan^{-1} 3x=\frac{\pi}{4}$

41. $\tan^{-1} x+\tan^{-1} 2x+\tan^{-1} 3x=\pi$

42. যদি $\sin^{-1} A+\sin^{-1} B+\sin^{-1} C=\pi$ হয়,
দেখাও যে $A\sqrt{1-A^2}+B\sqrt{1-B^2}+C\sqrt{1-C^2}=2ABC$.

# সপ্তম অধ্যায়

## ত্রিভুজের গুণাবলী

## ( Properties of Triangles )

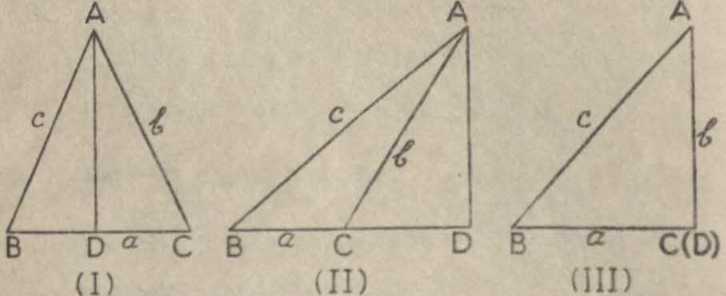
আমরা জানি, প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অংশ থাকে, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ। এই ত্রিভুজের A, B, C দ্বারা তিনটি কোণকে প্রকাশ করা হয় এবং A কোণের বিপরীত বাহুকে $a$ দ্বারা, B কোণের বিপরীত বাহুকে $b$ দ্বারা, C কোণের বিপরীত বাহুকে $c$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই ছয়টি অংশ পরস্পর পরস্পরের উপর নির্ভর করে। এই অধ্যায়ে ত্রিভুজের বাহুগুলি, কোণগুলি, ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ, অন্তর্ব্যাসার্ধ, বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ বা S দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা ( semi-perimeter ) যদি $s$ দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ হইবে।

**7·1. প্রমাণ কর ABC যে-কোন ত্রিভুজে**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\text{।} \quad (\text{ Sine Rule })$$

মনে কর, ABC যে-কোন একটি ত্রিভুজ।




চিত্র—19

(I) নং চিত্রে ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ এবং C সূক্ষ্মকোণ।

(II) নং চিত্রে ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ এবং C স্থূলকোণ।

(III) নং চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং C সমকোণ।

A হইতে BC-র উপর [ চিত্র (I) ] বা BC-এর বর্ধিত অংশের উপর [ চিত্র (II) ] AD লম্ব টানা হইল। (III) নং চিত্রে লম্ব AD, AC-এর উপর সমাপতিত।

এখন ABD ত্রিভুজ হইতে পাই, $AD = AB \sin B = c \sin B$

এবং ACD ত্রিভুজ হইতে পাই, $AD = AC \sin C = b \sin C$, [ চিত্র (I) ]

(II) চিত্র হইতে পাই, $AD = AC \sin (\pi - c) = b \sin C$.

$\therefore \; b \sin C = c \sin B$ অর্থাৎ $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

অনুরূপভাবে B হইতে CA-এর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায়

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$\therefore \; \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$। ইহা sine সূত্র বলিয়া পরিচিত।

আবার (iii) নং চিত্রে C সমকোণ বলিয়া

$$\sin A = \frac{a}{c}, \; \sin B = \frac{b}{c}, \; \sin C = \sin 90^\circ = 1 = \frac{c}{c}$$

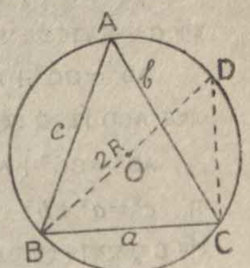
$$\therefore \; c = \frac{a}{\sin A}, \; c = \frac{b}{\sin B}, \; c = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \; \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$\therefore$ ABC যে-কোন ত্রিভুজে $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ হইবে।

**অন্য প্রণালী :**

মনে কর, O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র এবং R ব্যাসার্ধ। BO যোগ কর এবং উহাকে পরিধি পর্যন্ত এমন ভাবে বর্ধিত কর যেন উহা পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। DC যোগ কর। ∠BCD হইল এক-সমকোণ। BCD ত্রিভুজ হইতে পাই, $\sin BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$।



চিত্র—20

কিন্তু ∠BDC = ∠A ( একই বৃত্তাংশস্থ কোণ )

$$\therefore \; \frac{a}{2R} = \sin A \text{ অর্থাৎ } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

অনুরূপভাবে AO যোগ করিয়া পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল এবং উহা পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। CE ও BE যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায়

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\ \frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** যেহেতু $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore$ (i) $a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$

(ii) $\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}.$

(iii) $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},\ \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},\ \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}.$

**7.2. প্রমাণ কর ABC যে-কোন ত্রিভুজে,**

(i) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ বা, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(ii) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ বা, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

(iii) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ বা, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$

7.1 অনুচ্ছেদের (I) নং, (II) নং ও (III) নং চিত্রগুলি লও।

যদি C সূক্ষ্মকোণ হয় তবে (I) নং চিত্র হইতে পাই,

$$AB^2=BC^2+AC^2-2BC.CD$$

এখন ACD ত্রিভুজ হইতে পাই, $CD=AC\cos C=b\cos C$

$\therefore\ AB^2=BC^2+AC^2-2BC.AC\cos C$

বা, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

যদি C স্থূলকোণ হয় তবে (II) নং চিত্র হইতে পাই,

$$AB^2=BC^2+CA^2+2BC.CD$$

ACD ত্রিভুজ হইতে পাই, $CD=AC\cos ACD=b\cos(\pi-C)$

$$=-b\cos C$$

$\therefore\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

যদি C সমকোণ হয় তবে (III) নং চিত্র হইতে পাই,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

বা, $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times 0 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$( \therefore \cos C = \cos 90^\circ = 0 )$$

$\therefore$ C কোণের সকল মানের জন্য

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়,

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ এবং}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

ইহা cosine সূত্র বলিয়া পরিচিত।

**7·3. প্রমাণ কর ABC যে-কোন ত্রিভুজে**

(i) $a = b \cos C + c \cos B$

(ii) $b = c \cos A + a \cos C$

(iii) $c = a \cos B + b \cos A$.

7·1 অনুচ্ছেদের (I) নং, (II) নং ও (III) নং চিত্রগুলি লও।

যদি C সূক্ষ্মকোণ হয় তাহা হইলে (i) নং চিত্র হইতে পাই,

$$BC = BD + CD = AB \cos B + AC \cos C$$

$\therefore a = c \cos B + b \cos C$

যদি C স্থূলকোণ হয় তাহা হইলে (II) নং চিত্র হইতে পাই,

$$BC = BD - CD = AB \cos B - AC \cos ACD$$

$$= c \cos B - b \cos (180^\circ - C) = c \cos B + b \cos C$$

যদি C সমকোণ হয় তাহা হইলে (III) নং চিত্র হইতে পাই,

$$BC = AB \cos B$$

$\therefore a = c \cos B + 0$

$$= c \cos B + b \cos C \qquad ( \because \cos C = \cos 90^\circ = 0 )$$

$\therefore$ সব ক্ষেত্রেই, $a = b \cos C + c \cos B$ হয়।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $b=c\cos A+a\cos C$ এবং

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

**7·4. প্রমাণ কর :** (i) $\tan A=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$;

(ii) $\tan B=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{c^2+a^2-b^2}$;

(iii) $\tan C=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$.

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore\quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\tan B=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{c^2+a^2-b^2}$

এবং $\tan C=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$.

**7·5. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির sine, cosine এবং taugent-এর প্রকাশ।**

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

মনে কর, ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা $s$। $\therefore\quad s=\frac{a+b+c}{2}$.

এখন $a-b+c=a+b+c-2b=2(s-b)$

$a+b-c=a+b+c-2c=2(s-c)$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2.(s-b)2.(s-c)}{2bc}=2\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

অর্থাৎ $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

এখানে বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক ধরা হইল। কারণ A কোণটি 180° অপেক্ষা ছোট, অর্থাৎ $A < 180°$, সুতরাং $\frac{A}{2} < 90°$।

$\therefore \quad \sin \frac{A}{2}$ ধনাত্মক হইবেই।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

আবার $2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{4s(s-a)}{2bc}$$

বা, $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc} \quad \therefore \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$

বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক ধরা হইল কারণ $\frac{A}{2} < 90°$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

আবার $\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

## 7.6. ত্রিভুজের বাহু ও কোণের sine-এর সম্বন্ধ।

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

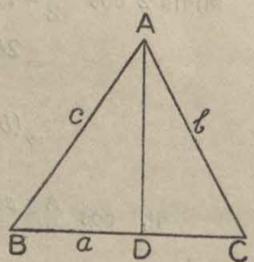
অনুরূপে প্রমাণ করা যায়,

$$\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

## 7.7. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ। A হইতে BC-এর উপর AD লম্ব টানা হইল। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা সূচিত করা হইল। এখানে AD হইল ABC ত্রিভুজের উচ্চতা।




চিত্র—21

$$\therefore \quad \triangle = \tfrac{1}{2}BC.\,AD$$

$$= \tfrac{1}{2}BC\,.\,AC\sin C$$

$$= \tfrac{1}{2}ab\sin C \quad \cdots \quad (i)$$

অনুরূপে B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিলে প্রমাণ করা যায়,

$$\triangle = \tfrac{1}{2}bc\sin A = \tfrac{1}{2}ca\sin B$$

$$\therefore \quad \triangle = \tfrac{1}{2}bc\sin A = \tfrac{1}{2}ca\sin B = \tfrac{1}{2}ab\sin C \quad \cdots \quad (ii)$$

পুনরায় $\triangle = \frac{1}{2}\,bc\sin A = \frac{1}{2}\,bc\,.\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$= bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\,.\,\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)} \quad \cdots \quad (iii)$$

আবার যেহেতু $s = \frac{a+b+c}{2}$

$\therefore\; a+b-c = 2(s-c),\; b+c-a = 2(s-a),\; c+a-b = 2(s-b)$

$\therefore \quad \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

আবার যেহেতু $\triangle=\frac{1}{2} bc \sin A=\frac{1}{2} bc.\ \frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$

$$\therefore \quad R=\frac{abc}{4\triangle} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

আবার যেহেতু $\triangle=\frac{1}{2} bc \sin A \ \therefore \sin A=\frac{2\triangle}{bc}$

অনুরূপে $\sin B=\frac{2\triangle}{ca}$, $\sin C=\frac{2\triangle}{ab}$ $\quad \cdots \quad$ (v)

আবার যেহেতু $\triangle=\frac{1}{2} bc \sin A$ এবং $b=\frac{a \sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a \sin C}{\sin A}$

$$\therefore \quad \triangle=\frac{1}{2} \frac{a \sin B}{\sin A}.\ \frac{a \sin C}{\sin A}.\ \sin A=\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\triangle=\frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B}$

$$\triangle=\frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

**মন্তব্য ঃ** আমরা জানি, $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\therefore \quad \sin A=\frac{2\triangle}{bc}\ ;\ \sin B=\frac{2\triangle}{ca}\ ;\ \sin C=\frac{2\triangle}{ab}.$$

**7.8. প্রমাণ কর ABC যে-কোন ত্রিভুজে**

(i) $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(ii) $\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

(iii) $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$

(i) আমরা জানি, যে-কোন ত্রিভুজে

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \therefore \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$\therefore \quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}\left[\because \quad \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ\right]$$

$$\therefore \quad \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়,

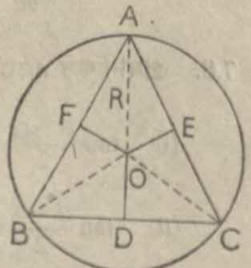
$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

ইহা **tangent rule** বলিয়া পরিচিত।

## 7.9. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের (Circum circle) ব্যাসার্ধ নির্ণয়।

**ত্রিভুজের পরিবৃত্ত** (*Circum circle* বা *Circumscribed circle*) : ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কন করা হয় তাহাকে ত্রিভুজের পরিবৃত্ত বলে। ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র বলে। ঐ বিন্দু হইতে যে-কোন কৌণিক বিন্দু পর্যন্ত দূরত্বকে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়। ঐ কেন্দ্রকে পরিকেন্দ্র (circum centre) এবং ব্যাসার্ধকে পরিব্যাসার্ধ (circum radius) বলে। পরিব্যাসার্ধ $R$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র—22

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহু দুইটির লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দু হইল ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। OA, OB, OC যোগ করা হইল।

$\therefore$ OA = OB = OC = R ( R হইল পরিব্যাসার্ধ )।

R-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $\angle BOC = 2\angle BAC = 2A$ $\therefore$ $\angle BOD = \angle DOC = A$

এখন BOD ত্রিভুজের $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $\angle BOD = A$, $\angle BDO = 90°$

$$\therefore \sin A = \sin BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \quad \therefore \quad R = \frac{a}{2\sin A}$$

অনুরূপে $R = \frac{b}{2\sin B}$, $R = \frac{c}{2\sin C}$

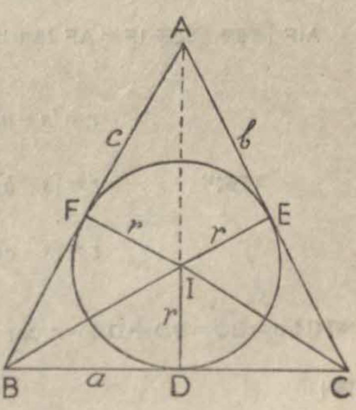
$$\therefore R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \quad \cdots \quad (i)$$

আবার $\Delta = \frac{1}{2}\, bc \sin A = \frac{1}{2}\, bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$

$$\therefore \quad R = \frac{abc}{4\Delta} \quad \cdots \quad (ii)$$

## 7.10. ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ( *In-circle* )

যদি কোন বৃত্ত ত্রিভুজের ভিতরে উহার তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে, তাহা হইলে ঐ বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ( In-circle ) বা অন্তর্লিখিত বৃত্ত ( Inscribed circle ) বলে।




চিত্র—23

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং B কোণ ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে ছেদ করিল। I বিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহু তিনটির উপর যথাক্রমে ID, IE, IF লম্ব টানা হইল এবং উহারা পরস্পর সমান।

$\therefore$ ID = IE = IF।

I-কে কেন্দ্র করিয়া ID $(=r)$ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত টানিলে ওই বৃত্তে ABC

ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু তিনটিকে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তটি হইল ঐ ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্ত। এখন আমাদের অন্তর্লিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ ($r$) নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $ID = IE = IF = r$

$$\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$

$$= \frac{1}{2} BC \,.\, ID + \frac{1}{2} CA.IE + \frac{1}{2} AB\ IF$$

$$= \frac{1}{2}\ (ar + br + cr) = \frac{1}{2} r.\ 2s = rs$$

বা, $\triangle = rs \quad \therefore \quad r = \frac{s}{\triangle} \qquad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

আবার $BD = BF$, $CD = CE$, $AF = AE$

$\therefore \quad AF + BD + CD =$ অর্ধ পরিসীমা $= s$

$\therefore \quad AF + BC = s$ বা, $AF + a = s$ বা, $AF = s - a$

অনুরূপে, $BF = s - b$, $CE = s - c$

AIF ত্রিভুজ হইতে $IF = AF \tan IAF$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad r &= (s-a)\tan\frac{A}{2} \\ \text{অনুরূপে} \quad r &= (s-b)\tan\frac{B}{2} \\ r &= (s-c)\tan\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \cdots \quad \text{(ii)}$$

আবার $a = BC = BD + DC = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$ হইতে $r$-এর মান পাওয়া যায়।

$$\therefore\ r = \frac{a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

অনুরূপে $r=\dfrac{b\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$ এবং

$r=\dfrac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ পাওয়া যায়। ... (iii)

$$\therefore\ r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\,R\sin A\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\therefore\ r=4R\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

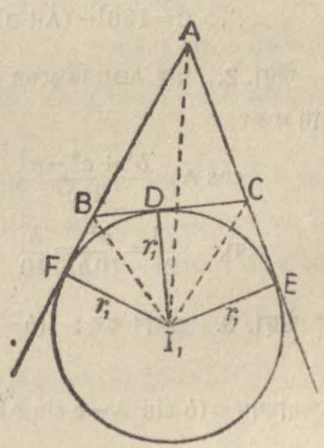
$$=4\,R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad \cdots \text{(iv)}$$

(যেহেতু $a=2\,R\sin A=4\,R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$)

## 7.11. বহির্লিখিত বৃত্ত বা বহির্বৃত্ত (Escribed circle)

যদি কোন বৃত্ত ত্রিভুজের কোন একটি বাহুকে এবং অপর দুইটি বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে, তাহা হইলে ওই বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত বলে।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ। এবং A কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও B কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক $I_1$ বিন্দুতে ছেদ করিল। আবার C কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ঐ $I_1$ বিন্দুতেই ছেদ করিবে। $I_1$ হইল ত্রিভুজটির বহির্বৃত্তের কেন্দ্র। $I_1$ হইতে BC এবং AB ও AC-এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে $I_1D$, $I_1F$, $I_1E$ লম্ব টানা হইল। এই লম্বগুলি পরস্পর সমান এবং বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ।



চিত্র 24

$\therefore \quad I_1D = I_1E = I_1F = r_1.$

$I_1$-কে কেন্দ্র করিয়া $I_1D$ ($r_1$) ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা D, E ও F বিন্দু দিয়া যাইবে। ইহাই হইল একটি বহির্লিখিত বৃত্ত।

অনুরূপভাবে $r_2$ ও $r_3$ যথাক্রমে B ও C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তে দুইটি ব্যাসার্ধ হইবে।

এই ব্যাসার্ধগুলির মান হইবে

$$r_1 = \frac{\Delta}{s-a} \;;\quad r_2 = \frac{\Delta}{s-b} \;;\quad r_3 = \frac{\Delta}{s\ \ c}.$$

$$\text{এবং } r_1 = s \tan\frac{A}{2} \;;\quad r_2 = s \tan\frac{B}{2} \;;\quad r_3 = s \tan\frac{C}{2}.$$

উদা. 1. যদি $A = 30^\circ$, $a = 3$, $b = 6$ হয়, B ও C-এর মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$\therefore \quad \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{6}{3}\sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 = \sin 90^\circ$$

$$\therefore \quad B = 90^\circ.$$

আবার যেহেতু $A + B + C = 180^\circ$

$$\therefore \quad C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ.$$

উদা. 2. যদি ABC ত্রিভুজের $a = 5$, $c = 5$, $A = 30^\circ$ হয় তবে $b$-এর মান কত?

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \therefore \quad \cos 30^\circ = \frac{b^2 + 25 - 25}{2b \times 5}$$

$$\text{বা, } \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2}{10b} = \frac{b}{10} \quad \therefore \quad b = 5\sqrt{3}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $(b-c)\sin A + (c-a)\sin B + (a-b)\sin C = 0$

বামপক্ষ $= (b \sin A - c \sin A) + (c \sin B - a \sin B) + (a \sin C - b \sin C)$

$$= b.\frac{a}{2R} - c.\frac{a}{2R} + c.\frac{b}{2R} - a.\frac{b}{2R} + a.\frac{c}{2R} - b.\frac{c}{2R}$$

যেহেতু $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$$=\frac{1}{2R}(ab-ca+cb-ab+ac-bc)=\frac{0}{2R}=0.$$

**উদা. 4.** প্রমাণ কর : $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}$

$$=(s-c)\tan\frac{C}{2}$$

এখন $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-a)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}=\frac{\Delta}{s}$$

অনুরূপে, $(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}=\frac{\Delta}{s}$

$\therefore\ (s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$

**উদা. 5.** দেখাও যে $a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=4R\sin A\sin B\sin C$$

বামপক্ষ$=2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C$

($\because\ a=2R\sin A$ ইত্যাদি)

$=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=R.\ 4\sin A\sin B\sin C$

( যেহেতু আমরা জানি $A+B+C=\pi$ হইলে $\sin 2A+\sin 2B$

$+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$)

$=4R\sin A\sin B\sin C.$

**উদা 6.** প্রমাণ কর : $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

$\because\ A+B+C=\pi$

$\therefore\ \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

যেহেতু $r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ $\therefore$ $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\therefore$ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

## প্রশ্নমালা 7

1. যদি ABC ত্রিভুজের $a=7$, $b=3$, $c=5$ হয়, তাহা হইলে বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

2. ABC ত্রিভুজের যদি $a=29$, $b=20$, $c=21$ হয়, তাহা হইলে A-এর মান নির্ণয় কর।

3. ABC ত্রিভুজের যদি $a=65$, $b=56$, $c=33$ হয়, তবে A-এর মান কত ?

4. ABC যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ কর :

(i) $a\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

(ii) $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$

5. $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

6. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B - \sin C} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$

7. $(b-c)\cos\frac{A}{2} = a\sin\frac{B-C}{2}$

8. $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A)$
$+ c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$

9. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 0$

10. $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0.$

11. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 4\triangle$

12. (i) $\frac{b^2-c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A + \cos B} = 0.$

(ii) $\frac{a}{\tan A} + \frac{b}{\tan B} + \frac{c}{\tan C} = 2(R+r).$

13. যদি $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$ হয়, দেখাও যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু না হয় সমকোণী হইবে।

14. যদি $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$ হয়, দেখাও যে $B=C$.

15. যদি $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ হয়, দেখাও যে, $a^2$, $b^2$, $c^2$ A. P তে থাকে।

16. দেখাও যে, $\frac{a^2-b^2}{2}.\ \frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=\triangle$

17. যদি $C=2a$, $B=3A$ হয়, দেখাও যে, $C=60^\circ$

প্রমাণ কর :

18. (i) $r_1+r_2+r_3-r=4R$

(ii) $r_1+r_2=c\cot\frac{C}{2}$

19. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{S}{R}$

20. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$

21. $\cos B+\cos C-\cos A=-1+\frac{r_1}{R}$

22. $\frac{b-c}{r_1}+\frac{c-a}{r_2}+\frac{a-b}{r_3}=0$

23. $\frac{r_1r}{r_2r_3}=\tan^2\frac{A}{2}$

24. (i) $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=S^2$

(ii) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$

25. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4r^2R$

26. $\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}=r^2\ \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

# অষ্টম অধ্যায়

## ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের লৈখিক সমাধান

**( Graphical Solutions of Trigonometrical Solutions )**

**8.1.** ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের লৈখিক সমাধান করার আগে বীজগণিতীয় লেখ অঙ্কনের প্রণালীতে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির ( যেমন $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ প্রভৃতি ) লেখ অঙ্কন করিব। $XOX'$ ও $YOY'$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব এবং উহাদের ছেদবিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধরিব। $XOX'$-কে $x$-অক্ষ এবং $YOY'$-কে $y$-অক্ষ ধরিব।

কোণটির মানগুলিকে $x$-অক্ষ বরাবর এবং কোণানুপাতের মানগুলিকে $y$-অক্ষ বরাবর বসাইয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করিব। এখানেও অক্ষ দুইটির ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিক্ বীজগণিতের মতই থাকিবে। যে বিন্দুগুলি **Graph paper**-এর উপর স্থাপন করা হইবে সেই বিন্দুগুলিকে পেনসিল দ্বারা যোগ করিলেই যে লেখ পাওয়া যাইবে তাহাই হইবে অপেক্ষকের লেখ। **Graph paper**-এ বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার সময় $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ বরাবর সুবিধামত একক ধরিয়া লইতে হয়।

**8.2. Sin $x$ এর লেখ অঙ্কন :**

মনে কর, $y=\sin x$। $x$-এর প্রতিটি মানের জন্য Natural Sine-এর তালিকা হইতে $\sin x$ বা $y$-এর মান পাওয়া যাইবে। Sine তালিকাতে শুধুমাত্র $0^\circ$ হইতে $90^\circ$ পর্যন্ত আছে। $\sin(180^\circ-x)=\sin x$ এই সূত্রের সাহায্যে $90^\circ$ হইতে $180^\circ$ পর্যন্ত মান পাওয়া যাইবে। $\sin(180^\circ+x)=\sin x$ এই সূত্রের সাহায্যে $180^\circ$ হইতে $270^\circ$ পর্যন্ত, $\sin(360^\circ-x)=-\sin x$ সূত্রের সাহায্যে $270^\circ$ হইতে $360^\circ$ পর্যন্ত মান পাওয়া যাইবে।

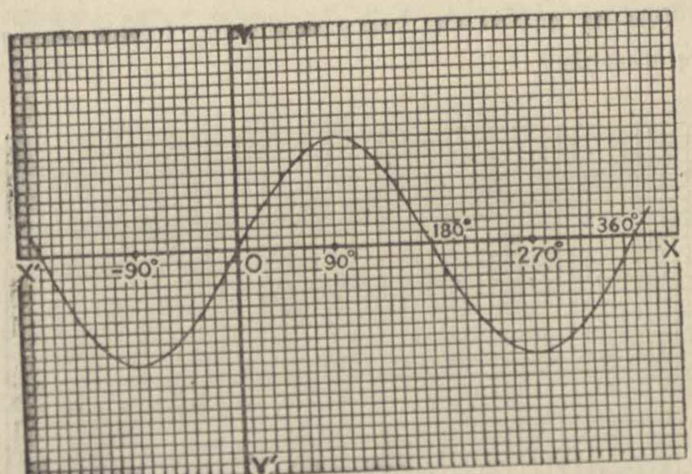
আবার যেহেতু $\sin(-x)=-\sin x$, অতএব $0^\circ$ হইতে $360^\circ$ এবং $0^\circ$ হইতে $-360^\circ$ পর্যন্ত সকল মানই নির্ণয় করা সম্ভব হইবে। আবার যেহেতু $+360^\circ$ এর পর আগেকার কোণগুলি এবং $-360^\circ$ এর পর আগেকার কোণগুলির পুনরাবৃত্তি হইবে, সেইহেতু তালিকা হইতে যে-কোন মান নির্ণয় করা যাইবে।

এখানে $x$-এর মানের $10^\circ$ ব্যবধানে $\sin x$ এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত তালিকাবদ্ধ করা হইল।

| $x$ | $-90^\circ$ | $-80^\circ$ | $-70^\circ$ | $-60^\circ$ | $-50^\circ$ | $-40^\circ$ | $-30^\circ$ | $-20^\circ$ | $-10^\circ$ | $0^\circ$ | $10^\circ$ | $20^\circ$ | $30^\circ$ | $40^\circ$ | $50^\circ$ | $60^\circ$ | $70^\circ$ | $80^\circ$ | $90^\circ$ | $100^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ বা $\sin x$ | $-1$ | $-·98$ | $-·94$ | $-·87$ | $-·77$ | $-·64$ | $-·50$ | $-·34$ | $-·17$ | $0$ | $·17$ | $·34$ | $·50$ | $·64$ | $·77$ | $·87$ | $·94$ | $·98$ | $1$ | $·98$ |

| $x$ | $110^\circ$ | $120^\circ$ | $130^\circ$ | $140^\circ$ | $150^\circ$ | $160^\circ$ | $170^\circ$ | $180^\circ$ | etc. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ বা $\sin x$ | $·94$ | $·87$ | $·77$ | $·64$ | $·50$ | $·34$ | $·17$ | $0$ | etc | |

এখানে graph paper-এ $x$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা $10^\circ$ কোণ এবং $y$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 10টি বাহু$=1$ ধরা হইল। এই গণনা-পদ্ধতিতে তালিকার মান অনুযায়ী বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ইহার পর পেনসিল দ্বারা ঐ সকল বিন্দুগুলিকে যোগ করিয়া $\sin x$-এর লেখ পাওয়া গেল।




$\sin x$-এর লেখ।

### 8.3. Cos x এর লেখ অঙ্কন :

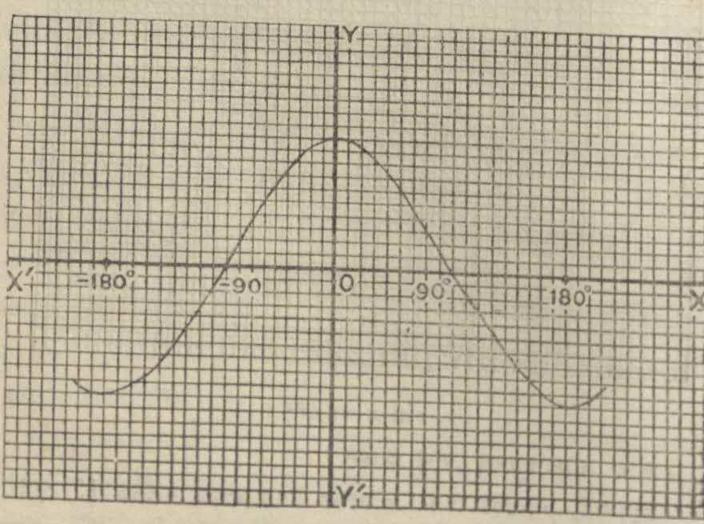
মনে কর, $y=\cos x$। $x$-অক্ষের উপর $x$-এর মানের $15^\circ$ ব্যবধানে Natural cosine table হইতে $\cos x$ বা $y$-এর অনুরূপ মানগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

| $x$ | $-180°$ | $-165°$ | $-150°$ | $-135°$ | $-120°$ | $-105°$ | $-90°$ | $-75°$ | $-60°$ | $-45°$ | $-30°$ | $-15°$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ বা $\cos x$ | $-1$ | $-·97$ | $-·87$ | $-·7$ | $-·5$ | $-·26$ | $0$ | $·26$ | $·5$ | $·7$ | $·87$ | $·97$ | | |
| $x$ | $0°$ | $15°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $75°$ | $90°$ | $105°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $165°$ | $180°$ | etc. |
| $y$ বা $\cos x$ | $1$ | $·97$ | $·87$ | $·7$ | $·5$ | $·26$ | $0$ | $-·26$ | $-·5$ | $-·7$ | $-·87$ | $-·97$ | $-1$ | etc. |

$\cos (180° + x) = -\cos x$ সূত্র হইতে 180° হইতে 270° পর্যন্ত, $\cos (360° - x) = \cos x$ সূত্র হইতে 270° হইতে 360° পর্যন্ত মান পাওয়া যাইবে। $\cos (-x) = \cos x$ সূত্রের সাহায্যে ঋণাত্মক কোণের মান পাওয়া যাইবে। অতএব 0° হইতে 360° অথবা 0° হইতে −360° পর্যন্ত সব মানই পাওয়া যাইবে।

এখন $x$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10° এবং $y$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 10টি বাহু = 1 ধরা হইল। তালিকার মান অনুযায়ী বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল।

ইহার পর পেনসিল দ্বারা ঐ সকল বিন্দুগুলিকে যোগ করিয়া $\cos x$-এর লেখ পাওয়া গেল।




cos $x$-এর লেখ

**Sine লেখ ও Cosine লেখ-এর কয়েকটি বিশেষ গুণাবলী :**

(1) Sine লেখ হইতে দেখা যায় কোটি কোন সময়ই $+1$ এর বেশী ও $-1$ এর কম দেখা হয় না। অতএব $\sin x$-এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান $-1$। $x$-এর মান $90^\circ$-এর বিজোড় গুণিতক হইলেই এই মানগুলি দেখা যায়। আবার মূলবিন্দুতেও $x$-এর মান $90^\circ$-এর জোড় গুণিতক হইলেই সেই সকল বিন্দুতে $\sin x$-এর মান শূন্য হইবে। আবার যেহেতু $\sin(2n\pi + x) = \sin x$, যেখানে $n$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, অতএব প্রতি $360^\circ$-এর পর লেখাংশের পুনরাবৃত্তি হইবে।

ডানদিকে ও বামদিকে নির্দিষ্ট পর্যায়ের পর পুনরাবৃত্তি ঘটে বলিয়া $\sin x$ functionটিকে Periodic function বলে।

(2) cosine লেখ হইতে দেখা যায় যে $-90^\circ$ হইতে $90^\circ$ পর্যন্ত এই লেখ $y$-অক্ষের উভয়দিকে অবিকল একই রকম থাকে। ইহার কারণ হইল $\cos(-x) = \cos x$. আবার যেহেতু $\cos(2n\pi + x) = \cos x$, যেখানে $n$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, সুতরাং প্রতি $360^\circ$-এর পর লেখাংশটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

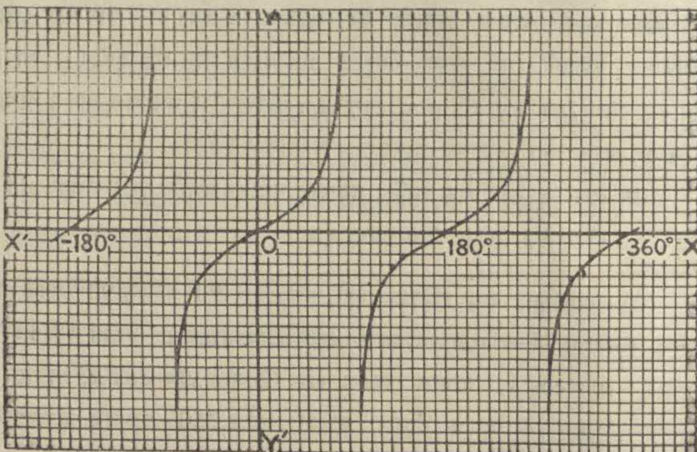
**8.4. tan x-এর লেখ অঙ্কন :**

মনে কর, $y = \tan x$। $x$-অক্ষ বরাবর $x$-এর মানের $10^\circ$ ব্যবধানে Natural tangent table হইতে $\tan x$ বা $y$-এর অনুরূপ মানগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-180^\circ$ | $-170^\circ$ | $-160^\circ$ | $-150^\circ$ | $-140^\circ$ | $-130^\circ$ | $-120^\circ$ | $-110^\circ$ | $-100^\circ$ | $-90^\circ$ | $-80^\circ$ | $-70^\circ$ | $-60^\circ$ |
| $y$ বা $\tan x$ | 0 | ·18 | ·36 | ·58 | ·84 | 1·19 | 1·73 | 2·75 | 5·67 | +α, −α | −5·67 | −2·75 | −1·73 |
| $x$ | $-50^\circ$ | $-40^\circ$ | $-30^\circ$ | $-20^\circ$ | $-10^\circ$ | $0^\circ$ | $10^\circ$ | $20^\circ$ | $30^\circ$ | $40^\circ$ | $50^\circ$ | $60^\circ$ | $70^\circ$ |
| $y$ বা $\tan x$ | −1·19 | −·84 | −·58 | −·36 | −·18 | 0 | ·18 | ·36 | ·58 | ·84 | 1·19 | 1·73 | 2·75 |
| $x$ | $80^\circ$ | $90^\circ$ | $100^\circ$ | $110^\circ$ | $120^\circ$ | $130^\circ$ | $140^\circ$ | $150^\circ$ | $160^\circ$ | $170^\circ$ | $180^\circ$ | etc. | |
| $y$ বা $\tan x$ | 5·67 | −α, −α' | −5·67 | −2·75 | −1·73 | −1·19 | −·84 | −·58 | −·36 | −·18 | 0 | etc. | |

এখন $x$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $= 10^\circ$ এবং $y$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহুর যোগফলকে এক একক ( অর্থাৎ 3টি বাহু

=1 ) ধরা হইল। এই গণনা পদ্ধতিতে তালিকার মান অনুযায়ী বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া tan $x$-এর লেখ পাওয়া গেল।




tan $x$-এর লেখ

**Tangent লেখর কয়েকটি গুণাবলী :**

এই লেখচিত্র হইতে দেখা যায় এই লেখ sin $x$ বা cos $x$ লেখর মত অবিচ্ছিন্ন নয়। ইহার কতকগুলি বিভিন্ন শাখা আছে। যে সকল বিন্দুতে $x$-এর মান 90°-এর বিজোড় গুণিতক, সেই সকল বিন্দুতে লেখটি ছিন্ন হইয়া যায়। এই বিন্দুগুলি হইতে $x$ যখন বামদিক হইতে ডানদিকে যায়, tan $x$-এর মান হঠাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$তে পরিবর্তিত হয়। যে সকল বিন্দুতে $x$-এর মান 90°-এর বিজোড় গুণিতক সেইসব বিন্দুতে $y$-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে দেখা যায় যে লেখটি $x$-অক্ষের উভয়দিকে এই সরলরেখা-গুলিকে স্পর্শ করিবার চেষ্টা করিতেছে কিন্তু স্পর্শ করিতে পারিতেছে না। এই রেখাগুলিকে ঐ লেখটির asymtotes বলে।

আবার যেহেতু $\tan(n\pi + x) = \tan x$, $n$ যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা, অতএব প্রতি 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি ঘটিবে। অর্থাৎ $-90°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত যে লেখটুকু আছে সেইটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

অনুরূপভাবে cosec $x$, sec $x$ এবং cot $x$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।

cosecant, secant, cotangent তালিকাগুলি দেওয়া না থাকিলে যথাক্রমে sine তালিকা হইতে cosec $x=\frac{1}{\sin x}$ সূত্রের সাহায্যে cosec $x$-এর মান, cosine তালিকা হইতে sec $x=\frac{1}{\cos x}$ সূত্রের সাহায্যে sec $x$-এর মান, tangent তালিকা হইতে cot $x=\frac{1}{\tan x}$ সূত্রের সাহায্যে cot $x$-এর মান পাওয়া যাইবে।

## ৪.5. সমীকরণের লৈখিক সমাধান

বীজগণিতের সমীকরণের মত ত্রিকোণমিতি সমীকরণেরও লৈখিক উপায়ে (অর্থাৎ লেখ অঙ্কন করিয়া) সমাধান করা যায়। দুইরকম পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়।

(I) প্রথমে সমীকরণের সকল পদগুলিকে একদিকে লইতে হয় এবং অপরদিকে শূন্য ধরিতে হয়। ইহার পর লেখ অঙ্কন করিলে $x$-অক্ষকে লেখটি যে সমস্ত বিন্দুতে ছেদ করিবে ভুজের সেই সকল মানগুলিই সমীকরণের সমাধান হইবে।

(II) সমীকরণের দুই পক্ষকে লইয়া দুইটি লেখ অঙ্কন করিলে ঐ লেখ দুইটি যে যে বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে সেই ছেদবিন্দুগুলির ভুজের মানগুলিই হইবে সমীকরণের নির্ণেয় সমাধান।

**মন্তব্য :** 0 হইতে $2\pi$ পর্যন্ত $y=\sin x+\cos x$-এর লেখ অঙ্কন করিতে হইলে $x$-এর মানের $15^\circ$ ব্যবধানে Sine Table হইতে sin $x$-এর অনুরূপ মান এবং Cosine Table হইতে cos $x$-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করা হয়। ইহার পর উহাদের যোগ করিয়া তালিকাভুক্ত করা হয় এবং পূর্বের ন্যায় Graph Paper-এ মানগুলি স্থাপন করিয়া লেখ অঙ্কন করা হয়।

**উদাহরণ।** 0 হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে $\cot x-\tan x=2$ সমীকরণকে লৈখিক উপায়ে সমাধান কর।

এখানে $\cot x-\tan x=2$

বা, $\frac{1}{\tan x}-\tan x=2$ বা, $1-\tan^2 x=2\tan x$

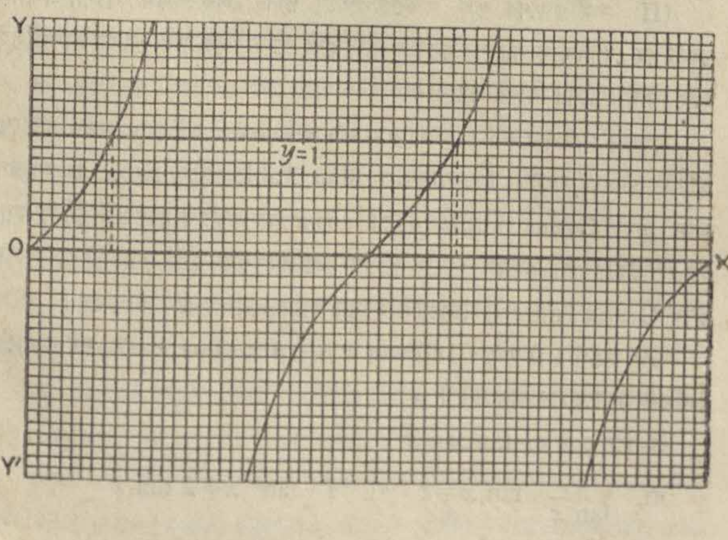
বা, $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=1$, $\therefore$ $\tan 2x=1$

এখন $y = \tan 2x$ এবং $y = 1$ এই দুইটি লেখ অঙ্কন করিতে হইবে। এই দুইটি লেখর ছেদবিন্দুগুলির ভুজ হইবে নির্ণেয় সমাধান।

| $x$ | $0°$ | $15°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $75°$ | $90°$ | $105°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $165°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | $0°$ | $30°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $150°$ | $180°$ | $210°$ | $240°$ | $270°$ | $300°$ | $330°$ |
| $y$ বা $\tan 2x$ | 0 | ·57 | 1·73 | $+\infty, -\infty$ | −·73 | −·57 | 0 | ·57 | 1·73 | $+\infty, -\infty$ | −1·73 | −·57 |
| $x$ | $180°$ | | | | | | | | | | | |
| $2x$ | $360°$ | | | | | | | | | | | |
| $y$ বা $\tan 2x$ | 0 | | | | | | | | | | | |

এখানে $x$-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি ছোট বাহু = $15°$ এবং $y$-অক্ষ বরাবর 10টি ছোট বাহু = 1 ধরা হইল। তালিকার মান অনুযায়ী Graph paper-এ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ইহার পর পেনসিল দিয়া বিন্দুগুলি যোগ করিয়া $y = \tan 2x$-এর লেখ পাওয়া গেল।

আবার $x$-অক্ষের উপর দিকে 1 একক দূরে ( 10টি বাহু = 1 ধরা হইয়াছে ) এবং $x$-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইল। ইহাই হইল $y = 1$




$\cot x - \tan x = 2$ এর লৈখিক সমাধান

সমীকরণের লেখ। এই লেখ দুইটি যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে সেই বিন্দু দুইটির ভুজ হইল $x=22\cdot5^\circ$ এবং $x=112\cdot5^\circ$।

অতএব 0 হইতে $\pi$-এর মধ্যে $\cot x-\tan x=2$ সমীকরণের নির্ণেয় সমাধান হইল $x=22\cdot5^\circ$ এবং $x=112\cdot5^\circ$।

## প্রশ্নমালা 8

নিম্নলিখিতগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর :

1. $\sin 2x$, $0^\circ$ হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে।
2. $\sin 3x$, $0^\circ$ হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে।
3. $\cos 2x$, $0^\circ$ হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে।
4. $\tan 3x$, $0^\circ$ হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে।
5. (i) $1-\cos 2x$, $-90^\circ$ হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে।

   (ii) $\cos x-\sin x$, $-180^\circ$ হইতে $180^\circ$-এর মধ্যে।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক উপায়ে সমাধান কর :

6. $\tan x=2x$, $0^\circ$ হইতে $90^\circ$-এর মধ্যে।
7. $\cos 2x=\sin x$, $0^\circ$ হইতে $90^\circ$-এর মধ্যে।
8. $\tan x=\cos x$, $0^\circ$ হইতে $90^\circ$-এর মধ্যে।
9. $\cos x-\sin 2x=\frac{1}{2}$, $-90^\circ$ হইতে $90^\circ$-এর মধ্যে।
10. $\cos x=x$, $0^\circ$ হইতে $90^\circ$-এর মধ্যে।
11. $x-\tan x=0$, $0^\circ$ হইতে $90^\circ$-এর মধ্যে।
12. $\operatorname{cosec} x-\cot x=\sqrt{3}$, $0^\circ$ হইতে $180^\circ$ এর মধ্যে
13. $x^2=\cos x$

# নবম অধ্যায়

# ত্রিভুজের সমাধান

## ( Solution of Triangles )

**9.1.** ত্রিভুজের সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করার পূর্বে লগারিদ্‌ম ও ত্রিকোণমিতিক তালিকার ব্যবহার সম্বন্ধে কিছু কিছু আলোচনা করা দরকার। সাধারণ লগারিদম্ ও অ্যান্টিলগারিদম্ সম্বন্ধে আগেই আলোচনা করা হইয়াছে।

**9.2. Natural Sine এবং Cosine Table.**

এই তালিকায় বামদিকে উপরদিক হইতে নীচের দিকে 0°, 1°, 2°, 3°, 4°, 5° · 90° পর্যন্ত লেখা আছে। এই তালিকার মাথার উপরে horizontally 0′, 10′, 20′, 30, 40′ 50′, 60′ লেখা আছে এবং প্রত্যেকটি অনুরূপ কোণের sine নীচে নীচে দেওয়া আছে। মাথার উপরে সর্বশেষে ( Mean Difference স্তম্ভে ) 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′, 9′ লেখা আছে এবং তাহাদের অনুরূপ মান নীচে দেওয়া আছে। সাধারণ সংখ্যার লগারিদম যেভাবে দেখিতে হয় ঠিক সেইভাবে এই তালিকা পড়িতে হয়। এই একই তালিকা হইতে sine এবং cosine নির্ণয় করা যায়। তালিকার উপরে লেখা আছে Natural Sines এবং নীচে লেখা আছে Natural Cosines। Sine নির্ণয়ের জন্য উপর হইতে নীচের দিকে এবং বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হয়। আবার cosine নির্ণয়ের জন্য নীচের দিক হইতে উপরের দিকে এবং ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িতে হয়।

মনে কর, sin 45°25′33″-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। 45°-এর লাইনে 20′-এর তলায় দেওয়া আছে ·71121 এবং Mean Difference স্তম্ভে 5′-এর তলায় 102 দেওয়া আছে। এই 102 মানটি আগেকার মানের শেষ তিনটি অঙ্কের তলায় লিখিয়া যোগ করিলে আমরা পাই ·71223। অতএব 45°25′-এর sine-এর মান ·71223।

এখন Mean Difference স্তম্ভ হইতে দেখা যায় 5′ হইতে 1′ বাড়িয়া 6′ হইলে, 102 হইতে 20 বাড়িয়া 122 হয়। ∴ 33″ বাড়িলে sine-এর মান

বাড়িবে $\frac{33}{60}\times 20=11$. ইহা আগেকার মানের শেষ দুইটি অঙ্কের সহিত যোগ করিলে আমরা পাই ·71234.

$\therefore$ sin 45°25′33″ = ·71234.

আবার মনে কর, cos 65°35′30″ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। Cosine নির্ণয়ের জন্ত তালিকার নীচের দিক হইতে উপরের দিকে পড়িতে হয়। sine-এর ক্ষেত্রে কোণ বাড়িলে sine-এর মান বাড়িতে থাকে এবং cosine-এর ক্ষেত্রে কোণ বাড়িলে cosine-এর মান কমিতে থাকে। sine তালিকায় যেমন যোগ করিতে হয় cosine তালিকায় বিয়োগ করিতে হয়।

এখন cos 65°35′30″-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। 65°-এর লাইনে 30′-এর তলায় লেখা আছে ·41469। Mean Difference স্তম্ভ হইতে দেখা যায় 5′-এর তলায় লেখা আছে 133। এখানে আগের মানের শেষ তিনটি অঙ্কের তলায় লিখিয়া বিয়োগ করিলে আমরা পাই ·41336 এবং এই লাইনের স্তম্ভ হইতে পাই 1′ বা 60″ কোণ বাড়িলে cosine-এর মান 26 কমিয়া যায়। 30″ কোণ বাড়িলে cosine-এর মান $\frac{26}{60}\times 30=13$ কমিয়া যায়।

ইহা পূর্বের মানের শেষ দুইটি অঙ্কের সহিত বিয়োগ করিলে আমরা পাই ·41323.

$\therefore$ cos 65°35′30″ = ·41323.

**9.3. Tangent এবং cotangent Table**

এই তালিকার বামদিকে উপরের দিক হইতে নীচের দিকে 0°, 1°…90° পর্যন্ত লেখা আছে। তালিকার উপরে Tangent Table এবং নীচে Cotangent Table দেওয়া আছে। এই তালিকার মাথার উপরে horizontally 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′, 60′ লেখা আছে। মাথার উপরে Mean Difference স্তম্ভে 1′, 2′,…9′ লেখা আছে। তাহাদের অনুরূপ মানও নীচে দেওয়া আছে। Tangent নির্ণয়ের জন্ত উপর হইতে নীচের দিকে এবং বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হয়। Cotangent নির্ণয়ের জন্ত নীচের দিক হইতে উপরের দিকে এবং ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িতে হয়। Tangent নির্ণয়ের জন্ত অতিরিক্ত মিনিটের জন্য অন্তরের অংশ যোগ করিতে হয় এবং Cotangent-এর সময় অতিরিক্ত মিনিটের জন্ত অন্তরের অংশ বিয়োগ করিতে হয়।

যেমন $\tan 35^\circ 34' = \cdot 71329 + \cdot 00176 = \cdot 71505$

$\cot 42^\circ 35' = \cdot 09131 + \cdot 00319 = \cdot 09450$

**9.4. Logarithmic Sine এবং cosine Table**

আমরা জানি, কোন কোণের sine বা cosine-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ছোট। আবার 0° হইতে 45°-এর মধ্যবর্তী কোণগুলির cotangent-এর মান 1 অপেক্ষা ছোট। সুতরাং উহাদের লগারিদম্ ধনাত্মক। ধনাত্মক মান এড়াইবার জন্য কোণানুপাতের লগারিদমের সহিত সব সময় 10 যোগ করিয়া তালিকা তৈয়ারী করা হয়। ইহাকে লগারিদ্মিক কোণানুপাত বলে। লগারিদ্মিক sine তালিকা হইতে $L \text{ sine } \theta = 10 + \log \sin \theta$-এর মান পাওয়া যায়। আবার $L \cos \theta = 10 + \log \cos \theta$, $L \tan \theta = 10 + \log \tan \theta$ লেখা হয়।

Natural sine এবং cosine নির্ণয় করার জন্য তালিকা যেভাবে পড়িতে হয় এই তালিকা সেইভাবে পড়িয়া $L \sin \theta$, $L \cos \theta$ এর মান পাওয়া যায়।

**উদাহরণ 1.** $L \sin 35^\circ 42' 40''$-এর মান নির্ণয় কর।

$L \sin 35^\circ 40' = 9 \cdot 76572$

একই লাইনে Mean Difference স্তম্ভে 2′-এর তলায় 35 দেওয়া আছে।

$\therefore \quad L \sin 35^\circ 42' = 9 \cdot 76607$

2′-এর জন্য অন্তর 35, 3′-এর জন্য অন্তর 53।

$\therefore$ 1′ বা 60″ বাড়িলে অন্তর বাড়িবে 18

$\therefore$ 40″-এর জন্য অন্তর বাড়িবে $\frac{40}{60} \times 18 = 12$

$\therefore \quad L \sin 35^\circ 42' 40'' = 9 \cdot 76619.$

**9.5. Logarithmic Tangent এবং Cotangent Table**

ইহার ঠিক আগের Table-এর অনুরূপভাবে এই তালিকাটি তৈয়ারী করা হয়। ইহার পাঠের প্রণালীও এক। $L \tan \theta$ নির্ণয় করিবার সময় Mean Difference যোগ করিতে হয় এবং $L \cot \theta$ নির্ণয় করিবার সময় বিয়োগ করিতে হয়।

**উদাহরণ** 2. L tan 75°52′30″-এর মান নির্ণয় কর।

L tan 75°50′ = 10·59788
2′ এর অন্তর = 104

∴ L tan 75°52′ = 10·59892

3′ এর অন্তর = 156

∴ 1′ বা 60″-এর অন্তর = 52

∴ 30″ এর অন্তর $= \frac{52 \times 30}{60} = 26$

∴ L tan 75°52′30″ = 10·59918.

## 9.6. ত্রিভুজের সমাধান

আমরা জানি, যে-কোন ত্রিভুজের ছয়টি অংশ, তিনটি কোণ ও তিনটি বাহু। যদি কোন ত্রিভুজের প্রতিটি অংশই জানা যায়, তাহা হইলেই ত্রিভুজটির সমাধান হইয়া যায়। যদি ত্রিভুজের তিনটি অংশ ( তাহার মধ্যে অন্ততঃ একটি বাহু থাকা দরকার ) দেওয়া থাকে, তাহা হইলেই ত্রিভুজের সমাধান করা যাইবে। এখানে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে যে তিনটি অংশ দেওয়া থাকে তাহা হইতে ত্রিভুজের সমাধান প্রণালী নির্ণয় করা হইবে। ত্রিভুজের তিনটি অংশ বিভিন্ন প্রকারে দেওয়া থাকিতে পারে : 1. তিনটি বাহু, 2. তিনটি কোণ, 3. দুইটি বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ, 4. দুইটি কোণ ও একটি বাহু, 5. দুইটি বাহু ও উহাদের বিপরীত কোণ।

যে যে অংশগুলি দেওয়া থাকে তাহাদের মান অসঙ্গত হইলে ত্রিভুজের সমাধান করা সম্ভব নয়। উপরের caseগুলি আমরা এখানে আলোচনা করিব।

## 9.7. ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু $a, b, c$ দেওয়া আছে।

এখানে তিনটি বাহু $a$, $b$, $c$ দেওয়া আছে। কোণ তিনটিকে নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা জানি, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$। এখানে যেহেতু $a$, $b$, $c$-এর মান জানা আছে, অতএব cos A-এর মান জানা যাইবে। cos A-এর মান হইতেই A-এর মান জানা যাইবে। অনুরূপভাবে B ও C-এর মান জানা যাইবে। যেহেতু কোণগুলি 0° ও 180°-এর মধ্যে অবস্থিত, অতএব এই সীমার মধ্যে কোণের cosine-এর মান 1-এর বেশী হইতে পারে না। অতএব ঐ কোণটি নির্দিষ্টভাবে জানা যাইবে।

আবার অর্ধকোণের সূত্রগুলি হইতেও কোণের মান পাওয়া যাইবে।

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s\ \ c)}{(b-c)}}=\cos\frac{A}{2}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\text{ যেখানে } 2s=a+b+c.$$

Cosine Table হইতে আসন্ন মান পাওয়া যায় কিন্তু Logarithmic Tangent Table হইতে সঠিক মানের নিকটতম মান ( nearest approximate value ) পাওয়া যায়। অতএব $\tan\frac{A}{2}$-এর সূত্র প্রয়োগ করাই সবচেয়ে বেশী উপযোগী।

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\therefore\quad L\tan\frac{A}{2}=10+\frac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}$$

এইভাবে আরও দুইটি মান নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ 3.** যদি $a=17, b=20, c=27$ হয়, Table ব্যবহার করিয়া কোণগুলি নির্ণয় কর।

এখানে $a+b+c=64 \quad \because\ 2s=a+b+c=64$

$\therefore\quad s=32$

এখন $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{12\times5}{32\times5}}=\sqrt{\frac{\bar{1}}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore L\tan\frac{A}{2}=10+\log\tan\frac{A}{2}-10-\frac{1}{2}\log 8$$
$$=10-{\cdot}451545=9{\cdot}548455$$

এখন $L\tan 19°30'=9{\cdot}549150$

$L\tan 19°\ 20'=9{\cdot}545120$

10′-এর অন্তর= ·0)4030

∴ 1′-এর অন্তর= ·000403

এখন $L\tan\frac{A}{2}$ ও $L\tan 19°20'$-এর অন্তর ·003335.

যেহেতু ·000403 অন্তর হয় 1′-এর জন্য

$\therefore$ $\cdot 003335$-এর অন্তর হয় $\frac{3335'}{403} = 8'16\cdot5''$-এর জন্য।

সুতরাং $\frac{A}{2} = 19°28'16\cdot5''$ $\quad\therefore$ $A = 38°56'33''$

আবার $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{5\times15}{32\times2}} = \frac{5}{8\sqrt{2}} = \frac{5}{2^3.2^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore$ $L\tan\frac{B}{2} = 10 + \log\tan\frac{B}{2}$

$= 10 + \log 5 - 3\log 2 - \frac{1}{2}\log 2$

$= 10 + \cdot698970 - \cdot903090 - \cdot150515 = 9\cdot645365$

এখন $L\tan 24° = 9\cdot648580$

$L\tan 23°50' = 9\cdot645170$

$\therefore$ $10'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot003410$

$\therefore$ $1'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot000341$

$\therefore$ $L\tan\frac{B}{2}$ ও $L\tan 23°50'$-এর মধ্যে অন্তর $= \cdot000195$.

যেহেতু $\cdot000341$ অন্তর হয় $1'$-এর জন্য

$\therefore$ $\cdot000195$ অন্তর হয় $\frac{195\times60''}{341}$ বা $34'$-এর জন্য

$\therefore$ $\frac{B}{2} = 23° + 53' + 34'' = 23°50'34''$

$\therefore$ $B = 47°41'8''$

$\therefore$ $C = 180° - (A+B) = 180° - (38°56'33'' + 47°41'8'')$

$= 93°22'19''$.

**9.8.** ABC **ত্রিভুজের তিনটি কোণ** A, B, C **দেওয়া আছে।**

এক্ষেত্রে ত্রিভুজের unique সমাধান সম্ভব নয়। কারণ প্রদত্ত কোণ তিনটির অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে। ঐ ত্রিভুজগুলি সদৃশকোণী বলিয়া সদৃশ হইবে। শুধুমাত্র কোণ জানা থাকিলে নিম্নের সূত্রের সাহায্যে উহাদের বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় করা যাইবে।

আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\therefore$ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$.

**উদাহরণ 4**. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি 2 : 3 : 7 এই অনুপাতে আছে। প্রমাণ কর উহাদের বাহুগুলি $\sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1)$ এই অনুপাতে আছে।

ত্রিভুজের কোণগুলি 2 : 3 : 7 অনুপাতে আছে এবং ঐ কোণগুলির যোগফল 180°। $\therefore$ কোণগুলি হইবে 30°, 45°, 105°.

$\therefore$ বাহুগুলির অনুপাত হইবে $\sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$

অর্থাৎ $a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$

$$= \sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1).$$

**99. ABC ত্রিভুজের A ও C কোণ এবং বাহু $a$ দেওয়া আছে।**

যেহেতু A ও C কোণ দেওয়া আছে, অতএব $B = 180^\circ - (A + C)$ হইতে B কোণ নির্ণয় করা যাইবে।

আবার যেহেতু বাহু $a$ দেওয়া আছে অতএব $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্র হইতে $b$ ও $c$ বাহু নির্ণয় করা যাইবে।

**উদাহরণ 5.** ABC ত্রিভুজের $A = 83^\circ 20'$, $B = 45^\circ$, $b = 64$ হইলে $c$-এর মান নির্ণয় কর যেখানে $\log 2 = \cdot 30103$.

$$L \sin 83^\circ 20' = 9\cdot 99705,$$

$$\log \cdot 089896 = \bar{2}\cdot 95374,$$

এখানে $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 83^\circ 23'$

আবার $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$ বা, $\dfrac{c}{\sin (180^\circ - 83^\circ 23')} = \dfrac{64}{\sin 45^\circ}$

বা, $\dfrac{c}{\sin 83^\circ 23'} = \dfrac{64}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\quad \therefore \; c = 64 . \sqrt{2} \sin 83^\circ 23'$

বা, $c = 2^{\frac{13}{2}} \sin 83^\circ 23'$

$$\therefore \; \log c = \frac{13}{2} \log 2 + L \sin 83^\circ 20' - 10$$

$$= \frac{13}{2} \times \cdot 30103 + 9\cdot 99705 - 10 = 1\cdot 95374$$

$$= \log 89\cdot 896$$

$$\therefore \; c = 89\cdot 896.$$

**9.10.** ABC **ত্রিভুজের** $b$ **ও** $c$ **বাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ** A **দেওয়া আছে।**

এখানে আমাদের $c$ বাহু এবং B ও C কোণ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন $B+C=180°-A \quad \therefore \quad \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$

আবার $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

$$\therefore \quad L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\left(\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right)$$
$$=\log\frac{b-c}{b+c}+L\cot\frac{A}{2}$$

যেহেতু $b$, $c$ এবং A-এর মান জানা আছে, অতএব ডানপক্ষের মান জানা যাইবে। $\therefore$ $L\tan\frac{B-C}{2}$ এর মান জানা যাইবে। $\therefore$ $\frac{B-C}{2}$ এর মান পাওয়া যাইবে।

যেহেতু $\frac{B+C}{2}$ এবং $\frac{B-C}{2}$ এর মান জানা আছে, অতএব এই দুইটি হইতে B ও C এর মান পাওয়া যাইবে।

আবার $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ হইতে $a$-এর মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore \quad a=b\frac{\sin A}{\sin B} \quad \therefore \quad \log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$

বা, $\log a=\log b+(10+\log\sin A)-(10+\log\sin B)$
$=\log b+L\sin A-L\sin B.$

**9.11.** ABC **ত্রিভুজের** $b$ **ও** $c$ **বাহু এবং বিপরীত কোণ** B **দেওয়া আছে।**

$b$ ও $c$ বাহু এবং বিপরীত কোণ B দেওয়া আছে। বাহু $a$ এবং কোণ A ও C নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা জানি, $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$ বা, $\sin C=c\,\frac{\sin B}{b}$

$L\sin C=\log c-\log b+L\sin B.$ ইহা হইতে C পাওয়া যায়।

আবার $A+B+C=180°, \quad \therefore \quad A=180°-(B+C)$

যেহেতু B ও C এর মান জানা আছে, অতএব A-এর মান পাওয়া যাইবে।

আবার $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ $\therefore$ $a=b\dfrac{\sin A}{\sin B}$ ... (i)

এবং $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore$ $a=c\dfrac{\sin A}{\sin C}$ ... (ii)

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $\log a=\log b+L\sin A-L\sin B$

(ii) হইতে পাই, $\log a=\log c+L\sin A-L\sin C$

ইহাদের যে-কোন একটি হইতে $a$ এর-মান পাওয়া যাইবে।

এইভাবে ত্রিভুজটির সমাধান করা যাইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে কয়েকপ্রকার বিভিন্ন অবস্থার সৃষ্টি হইতে পারে। এখানে তিন প্রকার অবস্থার বিষয় লইয়া আলোচনা করা হইতেছে।

1. **যদি $c\sin B>b$ হয়** তাহা হইলে $\dfrac{c}{b}\sin B>1$ হইবে। অর্থাৎ $\sin C>1$ হইবে, কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ কোন কোণের sine 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না। এক্ষেত্রে C-এর মান নির্ণয় করা যাইবে না। $\therefore$ ত্রিভুজ অঙ্কনই সম্ভব নয়। $\therefore$ ত্রিভুজের সমাধান হইতে পারে না।

2. **যদি $c\sin B=b$ হয়** তবে $\dfrac{c\sin B}{b}=1$ হইবে।

অর্থাৎ $\sin C=1=\sin 90^\circ$ হইবে

$\therefore$ $C=90^\circ$ হইবে।

এক্ষেত্রে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

$c^2=a^2+b^2$ হইবে।

$\therefore$ $a=\sqrt{c^2-b^2}$ হইতে $a$-এর মান পাওয়া যাইবে।

3. **যদি $\dfrac{c}{b}\sin B<1$ হয়** তাহা হইলে $\sin C<1$ হইবে এবং C নির্ণয় করা যাইবে।

আমরা জানি, দুইটি সম্পূরক কোণের সাইন সমান হয়। অতএব C-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে, তাহার মধ্যে একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপরটি স্থূলকোণ।

এখন যদি $b>c$ হয়, তাহা হইলে $B>C$ হইবে এবং C সূক্ষ্মকোণ হইবেই এবং একটিমাত্র ত্রিভুজের সমাধান হইবে। তাহা না হইলে B ও C একত্রে $180^\circ$ অপেক্ষা বড় হইবে। কিন্তু যদি $b<c$ হয়, তাহা হইলে $B<C$ হইবে

এবং এক্ষেত্রে C-এর দুইটি মানই হইতে পারে। B ও C-এর মান জানা থাকিলে $A=180^\circ-(B+C)$ হইতে A-এর মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং $a=c\dfrac{\sin A}{\sin C}$ হইতে $a$ পাওয়া যাইবে। C কোণের দুইটি মান সম্ভব হইলে A কোণ ও $a$ বাহুরও দুইটি করিয়া মান সম্ভব হইবে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং ত্রিভুজের দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, দুইটি বাহু ও উহাদের বিপরীত কোণ দেওয়া থাকিলে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যায়। ইহাকে দ্ব্যর্থক অবস্থা ( ambiguous case ) বলে।

উপরের সিদ্ধান্তগুলি নীচে দেওয়া হইল।

যখন ABC ত্রিভুজের $b$, $c$ এবং B দেওয়া থাকে এবং

(i) যদি $c\sin B>b$ হয়, তাহা হইলে কোন ত্রিভুজ হইবে না।

(ii) যদি $c\sin B=b$ হয়, তাহা হইলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ সমাধান-রূপে পাওয়া যাইবে।

(iii) যদি $b>c$ ( সুতরাং $b>c\sin B$) হয়, তাহা হইলে একটিমাত্র সমাধান হইবে এবং C সূক্ষ্মকোণ হইবে।

(iv) যদি $b=c$ ( সুতরাং $b>c\sin B$ ) হয়, তাহা হইলে একটিমাত্র সমাধান হইবে এবং C সূক্ষ্মকোণ হইবে।

(v) যদি $b>c\sin B$ কিন্তু $b<c$ হয়, তাহা হইলে দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে, এবং ইহাকে ambiguous case বলে।

**উদাহরণ 6.** ABC ত্রিভুজের $a=4{\cdot}5$, $c=45$ হইলে A-এর মান নির্ণয় কর যেখানে C একটি সমকোণ এবং $L\sin 5^\circ 33'=8{\cdot}98157$ এবং $1'$-এর অন্তর 5260.

এখানে $A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{4{\cdot}5\times\sin 90^\circ}{45}=\dfrac{4{\cdot}5\times 1}{45}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore\ \log\sin A=\log 1-\log 10=-1$

$\therefore\ L\sin A=-1+10=9$

এবং $L\sin 5^\circ 33'=8{\cdot}98157$

$\therefore$ অন্তর $=\ {\cdot}01843$

${\cdot}05260$ অন্তর হয় $60''$ এর জন্য

$\therefore$ ·01843 অন্তর হয় $\frac{60'' \times 1843}{5260}$ বা 21″ এর জন্য

$\therefore$ L sin A = L sin $5^\circ 33' 21''$

$\therefore$ A = $5^\circ 33' 21''$.

## প্রশ্নমালা 9

[ Mathematical Tables ব্যবহার কর ]

1. ABC ত্রিভুজের $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c\sqrt{3}+1$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

2. যদি $a=17$, $b=20$, $c=27$ হয়, ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর।

3. যদি $a=4$, $b=5$, $c=6$ হয়, B-এর মান নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে log 2 = ·3010300, L cos $27^\circ 53'$ = 9·9464040, 1′-এর জন্য অন্তর 669)।

4. যদি $a=15$, $b=19$, $c=24$ হয়, তাহা হইলে বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে log 5·7 = ·75587, L cos $88^\circ 59'$ = 8·24903, 1′ এর জন্য অন্তর 718.

5. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি হইল $105^\circ$, $60^\circ$, $15^\circ$। বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

6. যদি $a=7$, $b=8$, $c=9$ হয়, তাহা হইলে কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে log 2 = ·3010300.

L tan $24^\circ 5\ 40''$ = 9·6505069, L tan $24^\circ 5' 50''$ = 9·6505639

L tan $29^\circ 12' 20''$ = 9·7474183, L tan $29^\circ 12' 30''$ = 9·747477

7. যদি $a=9$, $b=10$, $c=11$ হয়, তাহা হইলে যে বাহুর দৈর্ঘ্য 10 তাহার বিপরীত কোণ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে L tan $29^\circ 30'$ = 9·7526420, L tan $29^\circ 29'$ = 9·7523472, log 2 = ·30103.

8. যদি $a=4$, $b=5$, $c=6$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে বৃহত্তম কোণ ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ।

9. যদি $a=74$, $b=26$, $c=60$ হয়, তাহা হইলে বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে log 9 = ·9542425, log 13 = 1·1139434, L sin $56^\circ 19'$ = 9·9201896, 1′-এর অন্তর = ·0000842.

10. দেওয়া আছে $a=21$, $b=11$, $c=34^\circ 42' 30''$ এবং $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 72^\circ 38' 45'' = 10\cdot 50515$, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

11. যদি $b=540$, $c=420$, $A=52^\circ 6'$ হয়, B ও C নির্ণয় কর।

12. দেওয়া আছে $b=1300$, $c=1400$, $A=60^\circ$ এবং $\log 3 = \cdot 4771213$, $L \tan 3^\circ 40' = 8\cdot 8067422$, $10'$-এর অন্তর $=3306$, B ও C নির্ণয় কর।

13. দেওয়া আছে $b=2\cdot 25$, $c=1\cdot 75$, $A=54^\circ$, এবং $\log 2 = \cdot 301030$, $L \tan 63^\circ = 10\cdot 292834$, $L \tan 13^\circ 47' = 9\cdot 389724$, $L \tan 13^\circ 48' = 9\cdot 390270$ ; B ও C-এর মান কত ?

14. $a=70$, $b=35$, $c=36^\circ 52' 12''$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $L \cot 18^\circ 26' 6'' = 10\cdot 4771213$ ; A ও B নির্ণয় কর।

15. ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অনুপাত $9 : 7$ এবং অন্তর্ভূত কোণ $64^\circ 12'$ অন্য কোণ দুইটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \tan 57^\circ 54' = 10\cdot 2025255$, $L \tan 11^\circ 16' = 9\cdot 2993216$, $L \tan 11^\circ 17' = 9\cdot 2999804$.

16. (i) $B=70^\circ 30'$, $C=78^\circ 55'$, $a=102$ ; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

(ii) $A=75^\circ$, $B=30^\circ$, $b=\sqrt{8}$ ; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

17. $b=243$, $c=681$, $A=50^\circ 42'$, ত্রিভুজটি সমাধান কর।

18. $b=80$, $c=100$, $A=60^\circ$ ; B ও C নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 3 = \cdot 47712$, $L \tan 10^\circ 53' 36'' = 9\cdot 28432$.

19. $B=45^\circ$, $C=10^\circ$, $a=200$, $b$-এর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \sin 55^\circ = 9\cdot 9133645$, $\log 1726\cdot 4 = 3\cdot 2371414$, $\log 1726\cdot 5 = 3\cdot 2371666$.

20. $b=15$, $c=10$, $B=60^\circ$, $a$ ও A-এর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $\sin 84^\circ 44' = \cdot 99578$.

21. $a=4\cdot 5$, $c=45$, $C=90^\circ$, A-এর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $L \sin 5^\circ 33' = 8\cdot 98157$ এবং $1'$-এর অন্তর 5260.

## দশম অধ্যায়

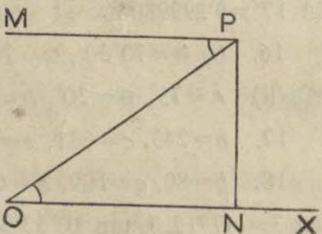
# উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্ন ও সমস্যাবলী

## ( Problems on Heights and Distances )

**10.1.** উচ্চতা ও দূরত্ব সম্বন্ধে ইতিমধ্যেই কিছু কিছু শিখিয়াছ। এই অধ্যায়ে উচ্চতা ও দূরত্ববিষয়ক জটিল প্রশ্ন ও সমস্যাবলী লইয়া আলোচনা করা হইবে। প্রথমে আমরা সংক্ষেপে উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ ( Angle of elevation and angle of depression ) সম্বন্ধে আলোচনা করিব এবং পরে জটিল প্রশ্নের সমাধান করিব।

**10.2. উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ**

মনে কর, O এবং P দুইটি বিন্দু একই উল্লম্ব সমতলে (Vertical Plane) অবস্থিত। আরও মনে কর, P বিন্দুটি O বিন্দু হইতে উচ্চস্থানে অবস্থিত। OP যোগ কর। O বিন্দু দিয়া ঐ সমতলে একটি অনুভূমিক রেখা ( horizontal line ) OX অঙ্কিত কর। P হইতে OX-এর উপর PN লম্ব টান। XO-এর সমান্তরাল করিয়া PM সরলরেখা টান। এখন O বিন্দু হইতে P বিন্দুকে দেখিলে, ∠PON-কে P বিন্দুর উন্নতি কোণ (angle of elevation ) বলা হয়। আবার P বিন্দু হইতে O বিন্দুকে দেখিলে, ∠MPO-কে O বিন্দুর অবনতি কোণ ( angle of depression ) বলা হয়।



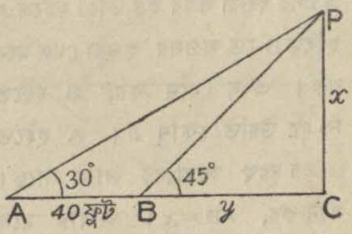
চিত্র 25

যে-কোন দুইটি বিন্দু O এবং P-এর জন্য O বিন্দু হইতে P-এর উন্নতি কোণ = P বিন্দু হইতে O-এর অবনতি কোণ।

কার্যক্ষেত্রে কোন বিন্দুর উন্নতি কোণ বা অবনতি কোণ মাপিবার জন্য সাধারণতঃ যে যন্ত্র ব্যবহার করা হয় তাহাকে থিওডোলাইট ( Theodolite ) বলা হয়। আবার কোন একটি বিন্দু হইতে অন্য দুইটি বিন্দুর কৌণিক দূরত্ব মাপিবার জন্য যে যন্ত্র ব্যবহার করা হয় তাহাকে Sextant বলা হয়।

**উদাহরণ।** অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে দেখিলে একটি মন্দিরের চূড়ার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 30°, মন্দিরের দিকে 40 ফুট অগ্রসর হইয়া দেখিলে ঐ শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। মন্দিরের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, P হইল মন্দিরের চূড়ার শীর্ষবিন্দু। C বিন্দু হইল ঐ মন্দিরের পাদবিন্দু। A হইতে দেখিলে P-এর উন্নতিকোণ 30° এবং B হইতে দেখিলে P-এর উন্নতি কোণ 45°। এখানে AB = 40 ফুট। অর্থাৎ ∠PAC = 30°, ∠PBC = 45°, AB = 40। CP-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।




চিত্র 26

মনে কর, CP = $x$ এবং BC = $y$।

এখন PAC ও PBC এই দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\frac{PC}{AC}=\tan 30^\circ \quad \text{এবং} \quad \frac{PC}{BC}=\tan 45^\circ$$

অর্থাৎ $\dfrac{x}{40+y}=\tan 30^\circ$ এবং $\dfrac{x}{y}=\tan 45^\circ$ $\left(\because \begin{array}{l} PC=x \\ BC=y \end{array}\right)$

বা, $\dfrac{x}{40+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\dfrac{x}{y}=1$

বা, $\sqrt{3}x=40+y$ ... (1) এবং $x=y$ ... (2)

বা, $\sqrt{3}x=40+x$ ( $y=x$ বসাইয়া )

বা, $x(\sqrt{3}-1)=40$

$$\therefore\ x=\frac{40}{\sqrt{3}-1}=\frac{40(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{40(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=\frac{40}{2}(1{\cdot}732+1)=20\times 2{\cdot}732=54\ 64.$$

বা, $x=54{\cdot}64$ ফুট।

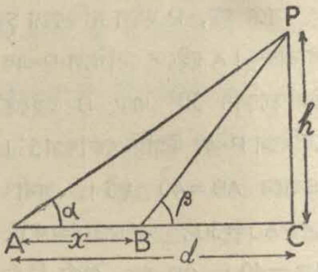
$\therefore$ মন্দিরের উচ্চতা = 54·64 ফুট (প্রায়)।

## 10.3. কোন দুর্গম জিনিসের উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ঃ

কোন দুর্গম জিনিসের কাছে যাওয়া সম্ভব নয়। সেই কারণে দূর হইতে তাহার উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় করা হয়।

মনে কর, P হইল একটি দুর্গম চূড়া। এই চূড়ার উচ্চতা PC ও A হইতে C-এর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, A হইতে P-এর উন্নতি কোণ $\alpha$। A হইতে যদি C-এর দিকে অগ্রসর হওয়া সম্ভব হয় তাহা হইলে A হইতে B-তে অগ্রসর হওয়া গেল মনে কর। এখন মনে কর, B হইতে P-এর উন্নতি কোণ $\beta$। A হইতে B-এর দূরত্ব আমাদের জানা আছে। মনে কর, AB $= x$। আবার মনে কর, PC $= h$ এবং AC $= d$।




চিত্র 27

এখন $x = \text{AB} = \text{AC} - \text{BC} = h \cot \alpha - h \cot \beta$

$$\left[\because \frac{\text{AC}}{\text{PC}} = \cot \alpha,\ \frac{\text{BC}}{\text{PC}} = \cot \beta\right.$$

বা, $\text{AC} = \text{PC} \cot \alpha = h \cot \alpha$

এবং $\left.\text{BC} = \text{PC} \cot \beta = h \cot \beta\right]$

বা, $x = h\left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right] = h\left[\frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}\right]$

$$= h\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\therefore\ h = \frac{x \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} = x \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$$

আবার $\text{AC} = h \cot \alpha = x \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha) \times \cot \alpha$

বা, $d = \frac{x \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha} . \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$

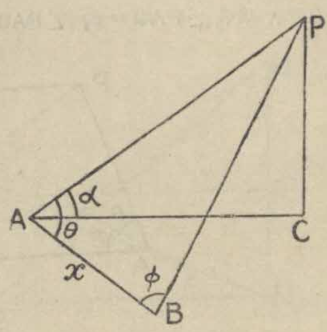
$$= x \cos \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha) \quad (\because \text{AC} = d)$$

যেহেতু $d$, $\alpha$, $\beta$ আমাদের জানা আছে, অতএব log table-এর সাহায্যে উচ্চতা $h$ ও দূরত্ব $d$-এর মান পাওয়া যাইবে।

এখন যদি A হইতে C-এর দিকে সোজা অগ্রসর হওয়া না যায়, তাহা হইলে A হইতে যে-কোন দিকে অগ্রসর হওয়া যাক্। মনে কর, A হইতে B-তে

অগ্রসর হওয়া গেল এবং $AB = x$ মনে কর ( AB-এর মান আমাদের জানা আছে )।

মনে কর, A হইতে P-এর উন্নতি কোণ $\alpha$। মনে কর, $\angle PAB = \theta$ এবং $\angle ABP = \phi$।




চিত্র 28

এখন ABP ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\frac{AB}{\sin APB} = \frac{AP}{\sin \phi}$$

বা, $$\frac{AB}{\sin \{180^\circ - (\theta + \phi)\}} = \frac{AP}{\sin \phi}$$

$$\therefore \quad AP = \frac{AB \sin \phi}{\sin (\theta + \phi)} = \frac{x \sin \phi}{\sin (\theta + \phi)}$$

$$= x \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi).$$

আবার ACP ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\frac{PC}{AP} = \sin \alpha \quad \text{এবং} \quad \frac{AC}{AP} = \cos \alpha \text{ ।}$$

$$\therefore \quad PC = AP \sin \alpha$$

$$= x \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi) \sin \alpha$$ ( AP-এর মান বসাইয়া )

$$= x \sin \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $PC = x \sin \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$

আবার $AC = AP \cos \alpha = x \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi) . \cos \alpha$

( AP-এর মান বসাইয়া পাই )

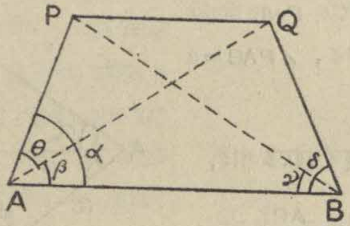
$$= x \sin \phi \cos \alpha \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $(AC) = x \sin \phi \cos \alpha \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$.

**10.4. দুইটি বস্তু দৃশ্য কিন্তু দুর্গম, এইরকম দুইটি বস্তুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় :**

মনে কর, P ও Q দুইটি দুর্গম বস্তু। ইহাদের দূরত্ব PQ নির্ণয় করিতে

হইবে। মনে কর, A ও B বিন্দু হইতে P ও Q-কে দেখা যায়। মনে কর, AB $= x$ এবং $\angle PAQ = \theta$, $\angle PAB = \alpha$, $\angle QAB = \beta$।




চিত্র 29

আবার $\angle PBA = \gamma$, $\angle QBA = \delta$ মনে কর।

এখন PAB ত্রিভুজ হইতে পাই, $\dfrac{AB}{\sin APB} = \dfrac{AP}{\sin \gamma}$

বা, $\dfrac{x}{\sin \{180^\circ - (\alpha+\gamma)} = \dfrac{AP}{\sin \gamma}$

বা, $\dfrac{x}{\sin (\alpha+\gamma)} = \dfrac{AP}{\sin \gamma}$

$\therefore$ $AP = x \sin \gamma \operatorname{cosec} (\alpha+\gamma)$.

আবার QAB ত্রিভুজ হইতে পাই, $\dfrac{AB}{\sin AQB} = \dfrac{AQ}{\sin \delta}$

বা, $\dfrac{AB}{\sin \{180^\circ (\beta+\delta)\}} = \dfrac{AQ}{\sin \delta}$

বা, $\dfrac{x}{\sin (\beta+\delta)} = \dfrac{AQ}{\sin \delta}$

$\therefore$ $AQ = x \sin \delta \operatorname{cosec} (\beta+\delta)$

$\therefore$ PAQ ত্রিভুজ হইতে পাই,

$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \,.\, AQ \cos PAQ$

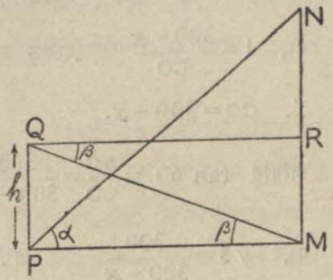
$= x^2 \sin^2\gamma \operatorname{cosec}^2(\alpha+\gamma) + x^2 \sin^2\delta \operatorname{cosec}^2 (\beta+\delta)$

$- 2x \sin \gamma \operatorname{cosec} (\alpha+\gamma).\ x \sin \delta \operatorname{cosec} (\beta+\delta).\cos \theta.$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য

$$PQ = \sqrt{\begin{aligned}&x^2 \sin^2\gamma \operatorname{cosec}^2(\alpha+\gamma) + x^2 \sin^2\delta \operatorname{cosec}^2(\beta+\delta)\\ &- 2x^2 \sin \gamma \sin \delta \operatorname{cosec} (\alpha+\gamma) \operatorname{cosec} (\beta+\delta) \cos \theta.\end{aligned}}$$

**উদা. 1.** কোন স্তম্ভের পাদদেশের একই সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু P হইতে স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ $\alpha$। ঐ বিন্দুর ঠিক $h$ ফুট উঁচু স্থান Q হইতে স্তম্ভের পাদদেশের অবনতি কোণ $\beta$। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



চিত্র 30

মনে কর, MN একটি স্তম্ভ। M যে সমতলে অবস্থিত ঠিক একই সমতলের উপর P বিন্দু অবস্থিত। P বিন্দু হইতে $h$ ফুট উপরে Q বিন্দু অবস্থিত। MN-এর উপর PM ও QR দুইটি লম্ব। এখানে $PQ=h$ ফুট, $\angle NPM=\alpha$, $\angle RQM=\beta$। এবং $\angle RQM=\angle QMP$ (একান্তর কোণ)॥

এখন PMQ ত্রিভুজ হইতে পাই, $\tan\beta=\dfrac{h}{PM}$

$$\therefore\ PM=\frac{h}{\tan\beta}=h\cot\beta\ ।$$

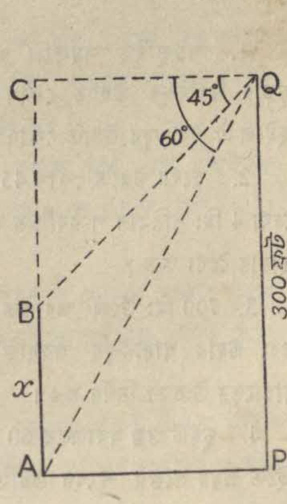
আবার PMN ত্রিভুজ হইতে পাই, $\tan\alpha=\dfrac{MN}{PM}=\dfrac{MN}{h\cot\beta}$

$\therefore\ MN=h\tan\alpha\cot\beta$

$\therefore$ স্তম্ভটির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য

$(MN)=h\tan\ \cot\beta.$

**উদা. 2.** 300 ফুট উচ্চ কোন মন্দিরের চূড়ার শীর্ষ হইতে কোন স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু এবং উহার পাদবিন্দুর অবনতি কোণ দুইটি যথাক্রমে $45^\circ$ ও $60^\circ$ হইলে স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর।



চিত্র 31

মনে কর, Q হইল চূড়ার শীর্ষবিন্দু। AB হইল স্তম্ভ। A বিন্দু হইল স্তম্ভের পাদবিন্দু এবং B বিন্দু হইল স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু। এখানে $PQ=300$ ফুট এবং $\angle BQC=45^\circ$, $\angle AQC=60^\circ$.

মনে কর, স্তম্ভের উচ্চতা $AB=x$.

এখন BCQ ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{CO} = \frac{AC - AB}{CO}$$

বা, $1 = \frac{300 - x}{CO}$ ( যেহেতু $PQ = AC = 300$ )

$\therefore \; CO = 300 - x.$

আবার $\tan 60^\circ = \frac{AC}{CO} = \frac{300}{300 - x}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{300}{300 - x}$ বা, $300 - x = \frac{300}{\sqrt{3}}$

বা, $x = 300 - \frac{300}{\sqrt{3}} = \frac{300(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}} = \frac{300 \times (1{\cdot}732 - 1)}{1{\cdot}732}$

$= \frac{300 \times {\cdot}732}{1{\cdot}732} = 126{\cdot}8$ ফুট ( প্রায় )।

$\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $= 126{\cdot}8$ ফুট ( প্রায় )।

## প্রশ্নমালা 10

1. অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে একটি মন্দিরের চূড়ার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $45^\circ$ হয়। মন্দিরের দিকে 200 মিঃ অগ্রসর হইলে ঐ শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $60^\circ$ হয়। মন্দিরের উচ্চতা নির্ণয় কর।

2. সূর্যের উন্নতি কোণ $45^\circ$ হইতে $60^\circ$ হইলে, একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 4 মিঃ পরিমাণ পরিবর্তিত হয়। সূর্যের উন্নতি কোণ $30^\circ$ হইলে স্তম্ভটির ছায়ার দৈর্ঘ্য কত ?

3. 700 মিঃ উর্ধ্বে অবস্থিত কোন ব্যোমযান হইতে এক পাহাড়ের শীর্ষবিন্দু এবং উহার পাদবিন্দুর অবনতি কোণ দুইটি যথাক্রমে $30^\circ$ ও $60^\circ$ হয়। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

4. দুইটি স্তম্ভ যথাক্রমে 60 মিঃ ও 20 মিঃ উচু। দ্বিতীয় স্তম্ভের পাদদেশ হইতে প্রথম স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ $60^\circ$ হইলে প্রথম স্তম্ভের পাদদেশ হইতে দ্বিতীয় স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

5. একটি সরল রাস্তার উপরে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে অবস্থিত কোন বিমান হইতে ঐ রাস্তার উপরে অবস্থিত পর পর দুইটি কিলোমিটার নির্দেশক স্তম্ভের অবনতি কোণ যথাক্রমে $45°$ ও $60°$ হইলে বিমানের উচ্চতা নির্ণয় কর।

6. কোন সেতু নদীর তীরবর্তী কোন বিন্দুতে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং আরও 800 মিটার দূরে কোন বিন্দুতে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। নদীর তীর সরল হইলে সেতুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

7. একটি নদীর সরল তীরে A, B, C তিনটি বস্তু এমনভাবে অবস্থিত যেন $AB=BC=4$ মাইল। একখানা স্টীমার B অভিমুখে লম্বভাবে আসিতে থাকিলে কোন এক অবস্থানে স্টীমারখানির সহিত AC, $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্টীমারখানি আরও 10 মিনিট অগ্রসর হইলে AC, $120°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্টীমারখানির গতিবেগ নির্ণয় কর।

8. কোন হ্রদের পাশে $l$ উচ্চস্থানে দাঁড়াইলে যদি কোন মেঘের উন্নতি কোণ $\theta$ এবং হ্রদের জলে মেঘের প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ $\alpha$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর হ্রদের জল হইতে মেঘের উচ্চতা$=l\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$।

9. কোন একটি স্থানে দুইটি বস্তু দর্শকের চোখে বৃহত্তম কোণ উৎপন্ন করে, সেইস্থান হইতে $d$ দূরত্ব অগ্রসর হইলে দুইটি বস্তু এক মনে হয় এবং দর্শকের পথের সহিত বস্তুর দিক (direction) $\alpha$ কোণ উৎপন্ন করে। বস্তু দুইটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. কোন মন্দিরের পাদদেশের সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে মন্দিরের শীর্ষের উন্নতি কোণ $60°$। ঐ বিন্দুর ঠিক 40 ফুট উঁচু স্থান হইতে শীর্ষের উন্নতি কোণ $45°$। মন্দিরের উচ্চতা নির্ণয় কর।

11. 50 ফুট উচ্চ কোন মন্দিরের পাদদেশ হইতে উচ্চ কোন স্তম্ভশীর্ষের উন্নতিকোণ $60°$। মন্দিরের শীর্ষ হইতে স্তম্ভের পাদদেশের উন্নতি কোণ $30°$। স্তম্ভের উচ্চতা কত?

12. কোন স্তম্ভের ঠিক পূর্বদিকে অবস্থিত P হইতে দেখিলে তাহার চূড়ার উন্নতি কোণ $\alpha$ এবং P-এর উত্তরদিকে অবস্থিত Q হইতে দেখিলে উন্নতি কোণ $\beta$ হয়। স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর।

13. কোন স্তম্ভের পাদদেশের পূর্বদিকে অবস্থিত একটি বিন্দু P হইতে স্তম্ভের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $45°$ এবং P বিন্দুর দক্ষিণে অবস্থিত Q বিন্দু

হইতে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30°। যদি PQ-এর দূরত্ব 400 মিঃ হয় তাহা হইলে স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

14. একটি স্তম্ভের চূড়ার উন্নতি কোণ উহার দক্ষিণে অবস্থিত P বিন্দুতে 30° এবং P বিন্দুর ঠিক পশ্চিমে $d$ দূরত্বে অবস্থিত Q বিন্দুতে 18° হয়। স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর।

15. একটি স্তম্ভের চূড়ার উন্নতি কোণ অনুভূমিক $2d$ দৈর্ঘ্যের ভূমিরেখার উভয় প্রান্ত হইতে $\alpha$ এবং রেখার মধ্যবিন্দু হইতে $\beta$। প্রমাণ কর স্তম্ভের

উচ্চতা $=\dfrac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin (\beta+\alpha) \sin (\beta-\alpha)}}$.

16. 300 মিঃ উঁচুতে আছে এমন একটি ব্যোমযান হইতে কোন স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু ও তাহার পাদবিন্দুর অবনতি কোণ দুইটি যথাক্রমে 45° ও 60° হইলে স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

# উত্তরমালা

## প্রশ্নমালা 1

1. $13^\circ 15' 12''$ 2. $10^\circ 25' 20''$ 3. $15^\circ 30' 45''$

4. $\frac{12}{900}\pi^c$ 5. $\frac{59}{432}\pi^c$ 6. $\frac{2013}{900}\pi^c$

7. $\frac{1163}{720}\pi^c$ 8. $30^\circ$ 9. $360^\circ$

10. $135^\circ$ 11. $210^\circ$ 12. $36^\circ 11' 42''$

13. 703 রেডিয়ান 14. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ; $\frac{\pi^c}{6}, \frac{\pi^c}{3}, \frac{\pi^c}{2}$

15. 5 : 4 16. 360 গজ 17. $132^\circ 15{\cdot}2'$

18. $34^\circ 21{\cdot}\dot{8}\dot{1}'$ 19. $5\frac{29}{36}$ সেঃ মিঃ 20. $81^\circ, 9^\circ$

21. 8,61000 মাইল ( প্রায় ) 22. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

23. $\frac{\pi^c}{5}, \frac{\pi^c}{2}, \frac{3\pi^c}{10}$ 24. $30^\circ, 15^\circ$

25. $\frac{2\pi^c}{9}, \frac{\pi^c}{4}, \frac{4\pi^c}{9}$.

## প্রশ্নমালা 2

1. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $-\sqrt{3}$ (iv) 2

(v) $\sqrt{2}$ (vi) $\frac{1}{2}$ (vii) $-1$ (viii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(ix) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (x) $\sqrt{3}$

2. (i) $\sin 30^\circ$ (ii) $\cos 30^\circ$ (iii) $\cot 35^\circ$

(iv) $\cos 30^\circ$ 12. 2 13. 1 14. 1 15. 0

16. (i) 300 (ii) $90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ (iii) $30^\circ, 150^\circ, 180^\circ$

(iv) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ (v) $30^\circ, 150^\circ$ (vi) $45^\circ, 225^\circ$

(vii) $30^\circ, 330^\circ$ 19. $\pm\sqrt{3}$ 20. $\pm\frac{15}{17}$.

## প্রশ্নমালা 3 (A)

1. (i) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2-\sqrt{3}$.

2. (i) $\frac{56}{65}$ (ii) $-\frac{16}{63}$ (iii) $\frac{85}{84}$ (iv) $-\frac{278}{29}$.

## প্রশ্নমালা 3 (B)

1. $\sin 8\theta + \sin 2\theta$. 2. $\sin 14\theta - \sin 4\theta$.

3. $\cos 14\theta + \sin 8\theta$. 4. $\frac{1}{2}(\cos 12\theta - \cos 18\theta)$

5. $(\frac{1}{2}+\sin 20^\circ)$ 6. $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$
7. $\frac{1}{4}(\cos 2B-\cos 2A)$ 8. $2\cos 40^\circ \cos 10^\circ$
9. $2\cos 35^\circ, \sin 5^\circ$. 10. $-2\sin A \sin B$.
11. $2\sin 55^\circ \sin 5^\circ$. 12. 0. 13. $\frac{3}{16}$.
14. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 15. 0.

## প্রশ্নমালা 4

1. $\frac{120}{169}$ 2. $\frac{41}{9}$ 3. $\frac{23}{27}$ 4. $-\frac{118}{125}$
5. $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

## প্রশ্নমালা 5

[ $n=0$ অথবা কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ]

1. (i) $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, (ii) $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{12}$ বা, $2n\pi-\frac{7\pi}{12}$.

2. $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ 3. $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ বা, $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

4. $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, 5. $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$,

6. $\theta=\frac{1}{2}(n\pi+\alpha)$, যেখানে $\cot\alpha=\frac{1}{2}$,

7. (i) $\theta=(4n+1)\frac{\pi}{8}$, (ii) $\theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$,

8. $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা, $\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$,

9. $\theta=\frac{n\pi}{3}$ বা, $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

10. (i) $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$,

(ii) $\theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}, \theta=n\pi+\frac{\pi}{12}$ বা, $\theta=n\pi+\frac{5\pi}{12}$.

11. $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}, \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

12. $\theta=\frac{2}{5}n\pi$, $\theta=(4n\pm 1)\frac{\pi}{3}$.

13. $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{8}$.

14. $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 15. $\theta=2n\pi+\frac{5\pi}{4}$.

16. $\theta = n\pi$ বা, $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$.

17. $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{24}$ বা, $\theta = \frac{n\pi}{4}$. 18. $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$.

19. $\theta = n\pi$ বা, $\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$. 20. $\theta = \frac{n\pi}{6}$.

21. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. 22. $\theta = n\pi$ বা, $\theta = \frac{n\pi}{2}$ বা, $\theta = \frac{n\pi}{3}$.

23. $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$. 24. $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m \pm n}$. 25. $\theta = \frac{\pi}{4}$.

26. (i) $-\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (ii) 270°, 630°, 990°.

27. $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. 28. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

29. $\theta = \frac{n\pi}{3}, \theta = n\pi \pm \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$. 30. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

31. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$. 32. $\theta = 2n\pi, \theta = (4n+1)\frac{\pi}{6}$.

33. $\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{40}$. 34. $\theta = 2n\pi - \alpha, \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2} + \alpha$.

35. $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$.

36. $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{12}, \quad \theta = \frac{4n+1}{14}\pi, \quad \theta = \frac{4n-1}{6}\pi$.

37. $0, \pm\frac{\pi}{12}, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}$. 38. $\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$.

39. $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$. 40. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$.

41. $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4}$ 42. $\frac{5\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$.

43. $\frac{7\pi}{3}, -\frac{13}{3}\pi$. 44. $0, \frac{2\pi}{3}, 2\pi$.

45. 30°, 150°. 46. 60°, 300°. 47. 150°, 210°.
48. 30°, 150°, 210°, 330°. 49. 30°, 90°, 150°, 270°.
50. 30°, 90°, 150°.

## প্রশ্নমালা 6

1. 60°. 2. 30°. 3. 60°.

34. $x = -1$ বা, $\frac{1}{8}$ 35. $x = \pm\frac{1}{2}$ 36. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

37. $x=\frac{a+b}{1-ab}$  38. $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.  39. $x=13$.

40. $x=\frac{1}{6}$ বা, $x=-1$.  41. $x=0$ বা $x=\pm 1$.

## প্রশ্নমালা 7

1. $120°$.  2. $90°$  3. $90°$

20. $C=60°$  21. $A=60°$.

## প্রশ্নমালা 8

6. $x=0$, $x=1\cdot17$ ( রেডিয়ান )  7. $x=30°$

8. $38°10'$ ( প্রায় )  9. $14°$ ( প্রায় )

10. $60°$  11. $0°$.  12. $0°, 120°$.  13. $\pm\cdot82$.

## প্রশ্নমালা 9

1. $45°, 30°, 105°$.  2. $38°56'33'', 47°41'7'', 93°22'20''$.

3. $55°46'16''\cdot14$ প্রায়।  4. $88°59'41''$ ( প্রায় ).

5. $(\sqrt{3}+1)$ ; $\sqrt{6}$ : $(\sqrt{3}-1)$.  6. $132°34'10''$.

7. $58°59'38''$.  9. $112\cdot37'2''\cdot8$.

10. $A=117°38'45''$, $B=27°38'45''$.

11. $78°17'39\cdot6''$, $49°36'20\cdot4''$.

12. $56°19'46\cdot3''$, $63°40'13\cdot7''$.  13. $76°47'2\cdot2''$, $49°12'57''\cdot8$

14. $116°33'54''$, $26°33'54''$.  15. $69°10'10''$, $46°37'50''$.

16. (i) $A=31°20'$, $b=185$, $c=192$.
  (ii) $C=75°$, $a=c=2\sqrt{3}+2$.

17. $B=19°38'3''$, $c=109°39'57''$, $a=559\cdot63$.

18. $70°53'36''$, $49°6'24''$  19. $b=172\cdot6436$ ( প্রায় )

20. $a=5\pm5\sqrt{6}$, $A=84°44'$  21. $A=5°33'21''$.

## প্রশ্নমালা 10

1. $473\cdot2$ মি.  2. $5\cdot464$ মি.  3. $466\cdot6$ মি.

4. $30°$  5. $2\cdot366$ কি.মি. $\cdot634$ কি.মি.  6. $400(\sqrt{3}+1)$ মি.

7. $27\cdot712$ মাইল/ঘণ্টা।  9. $\frac{2d\sin\theta\sin\alpha}{\cos\theta+\cos\alpha}$.

10. $94\cdot64$ ফুট।  11. $150$ ফুট।

12. $\frac{PQ\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.  13. $282\cdot8$ মি.

14. $\frac{d}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}$  16. $126\cdot8$ মি:।

# LOG TABLES

TABLE I

## LOGARITHMS OF NUMBERS

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 00000 | 00432 | 00860 | 01284 | 01703 | 02119 | 02531 | 02938 | 03342 | 03743 | 42 | 83 | 125 | 166 | 208 | 248 | 290 | 331 | 373 |
| 11 | 04139 | 04532 | 04922 | 05308 | 05690 | 06070 | 06446 | 06819 | 07188 | 07555 | 38 | 76 | 114 | 152 | 190 | 227 | 265 | 302 | 340 |
| 12 | 07918 | 08279 | 08636 | 08991 | 09342 | 09691 | 10037 | 10380 | 10721 | 11059 | 35 | 70 | 105 | 140 | 175 | 209 | 243 | 278 | 313 |
| 13 | 11394 | 11727 | 12057 | 12385 | 12710 | 13033 | 13354 | 13672 | 13988 | 14301 | 32 | 65 | 97 | 129 | 162 | 193 | 225 | 258 | 290 |
| 14 | 14613 | 14922 | 15229 | 15534 | 15836 | 16137 | 16435 | 16732 | 17026 | 17319 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 |
| 15 | 17609 | 17898 | 18184 | 18469 | 18752 | 19033 | 19312 | 19590 | 19866 | 20140 | 28 | 56 | 84 | 112 | 140 | 168 | 196 | 224 | 252 |
| 16 | 20412 | 20683 | 20952 | 21219 | 21484 | 21748 | 22011 | 22272 | 22531 | 22789 | 26 | 53 | 79 | 105 | 132 | 158 | 184 | 210 | 237 |
| 17 | 23045 | 23300 | 23553 | 23805 | 24055 | 24304 | 24551 | 24797 | 25042 | 25285 | 25 | 50 | 74 | 99 | 124 | 149 | 174 | 199 | 223 |
| 18 | 25527 | 25768 | 26007 | 26245 | 26482 | 26717 | 26951 | 27184 | 27416 | 27646 | 23 | 47 | 70 | 94 | 117 | 141 | 164 | 188 | 211 |
| 19 | 27875 | 28103 | 28330 | 28556 | 28780 | 29003 | 29226 | 29447 | 29667 | 29885 | 22 | 45 | 67 | 89 | 111 | 134 | 156 | 178 | 201 |
| 20 | 30103 | 30320 | 30535 | 30750 | 30963 | 31175 | 31387 | 31597 | 31806 | 32015 | 21 | 42 | 64 | 85 | 106 | 127 | 148 | 170 | 191 |
| 21 | 32222 | 32428 | 32634 | 32838 | 33041 | 33244 | 33445 | 33646 | 33846 | 34044 | 20 | 40 | 61 | 81 | 101 | 121 | 141 | 162 | 182 |
| 22 | 34242 | 34439 | 34635 | 34830 | 35025 | 35218 | 35411 | 35603 | 35793 | 35984 | 19 | 39 | 58 | 77 | 97 | 116 | 135 | 154 | 174 |
| 23 | 36173 | 36361 | 36549 | 36736 | 36922 | 37107 | 37291 | 37475 | 37658 | 37840 | 19 | 37 | 56 | 74 | 93 | 111 | 130 | 148 | 167 |
| 24 | 38021 | 38202 | 38382 | 38561 | 38739 | 38917 | 39094 | 39270 | 39445 | 39620 | 18 | 36 | 53 | 71 | 89 | 107 | 124 | 142 | 160 |
| 25 | 39794 | 39967 | 40140 | 40312 | 40483 | 40654 | 40824 | 40993 | 41162 | 41330 | 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 102 | 119 | 136 | 153 |
| 26 | 41497 | 41664 | 41830 | 41996 | 42160 | 42325 | 42488 | 42651 | 42813 | 42975 | 16 | 33 | 49 | 66 | 82 | 98 | 115 | 131 | 148 |
| 27 | 43136 | 43297 | 43457 | 43616 | 43775 | 43933 | 44091 | 44248 | 44404 | 44560 | 16 | 32 | 47 | 63 | 79 | 95 | 111 | 126 | 142 |
| 28 | 44716 | 44871 | 45025 | 45179 | 45332 | 45484 | 45637 | 45788 | 45939 | 46090 | 15 | 30 | 46 | 61 | 76 | 91 | 106 | 122 | 137 |
| 29 | 46240 | 46389 | 46538 | 46687 | 46835 | 46982 | 47129 | 47276 | 47422 | 47567 | 15 | 29 | 44 | 59 | 74 | 88 | 103 | 118 | 132 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 47712 | 47857 | 48001 | 48144 | 48287 | 48430 | 48572 | 48714 | 48855 | 48996 | 14 | 29 | 43 | 57 | 72 | 86 | 100 | 114 | 129 |
| 31 | 49136 | 49276 | 49415 | 49554 | 49693 | 49831 | 49969 | 50106 | 50243 | 50379 | 14 | 28 | 42 | 55 | 69 | 83 | 97 | 110 | 125 |
| 32 | 50515 | 50651 | 50786 | 50920 | 51055 | 51188 | 51322 | 51455 | 51587 | 51720 | 13 | 27 | 40 | 54 | 67 | 80 | 94 | 107 | 121 |
| 33 | 51851 | 51983 | 52114 | 52244 | 52375 | 52504 | 52634 | 52763 | 52892 | 53020 | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 | 91 | 104 | 117 |
| 34 | 53148 | 53275 | 53403 | 53529 | 53656 | 53782 | 53908 | 54033 | 54158 | 54283 | 13 | 25 | 38 | 50 | 63 | 76 | 88 | 101 | 113 |
| 35 | 54407 | 54531 | 54654 | 54777 | 54900 | 55023 | 55145 | 55267 | 55388 | 55509 | 12 | 24 | 37 | 49 | 61 | 73 | 86 | 98 | 110 |
| 36 | 55630 | 55751 | 55871 | 55991 | 56110 | 56229 | 56348 | 56467 | 56585 | 56703 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 71 | 83 | 95 | 107 |
| 37 | 56820 | 56937 | 57054 | 57171 | 57287 | 57403 | 57519 | 57634 | 57749 | 57864 | 12 | 23 | 35 | 46 | 58 | 70 | 81 | 93 | 104 |
| 38 | 57978 | 58092 | 58206 | 58320 | 58433 | 58546 | 58659 | 58771 | 58883 | 58995 | 11 | 23 | 34 | 45 | 57 | 68 | 79 | 90 | 102 |
| 39 | 59106 | 59218 | 59329 | 59439 | 59550 | 59660 | 59770 | 59879 | 59988 | 60097 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |
| 40 | 60206 | 60314 | 60423 | 60531 | 60638 | 60746 | 60853 | 60959 | 61066 | 61172 | 11 | 21 | 32 | 43 | 54 | 64 | 75 | 86 | 97 |
| 41 | 61278 | 61384 | 61490 | 61595 | 61700 | 61805 | 61909 | 62014 | 62118 | 62221 | 10 | 21 | 31 | 42 | 52 | 63 | 73 | 84 | 94 |
| 42 | 62325 | 62428 | 62531 | 62634 | 62737 | 62839 | 62941 | 63043 | 63144 | 63246 | 10 | 20 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 82 | 92 |
| 43 | 63347 | 63448 | 63548 | 63649 | 63749 | 63849 | 63949 | 64048 | 64147 | 64246 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 44 | 64345 | 64444 | 64542 | 64640 | 64738 | 64836 | 64933 | 65031 | 65128 | 65225 | 10 | 20 | 29 | 39 | 49 | 59 | 68 | 78 | 88 |
| 45 | 65321 | 65418 | 65514 | 65610 | 65706 | 65801 | 65896 | 65992 | 66087 | 66181 | 10 | 19 | 29 | 38 | 48 | 57 | 67 | 76 | 86 |
| 46 | 66276 | 66370 | 66464 | 66558 | 66652 | 66745 | 66839 | 66932 | 67025 | 67117 | 9 | 19 | 28 | 37 | 47 | 56 | 65 | 75 | 84 |
| 47 | 67210 | 67302 | 67394 | 67486 | 67578 | 67669 | 67761 | 67852 | 67943 | 68034 | 9 | 18 | 27 | 37 | 46 | 55 | 64 | 73 | 82 |
| 48 | 68124 | 68215 | 68305 | 68395 | 68485 | 68574 | 68664 | 68753 | 68842 | 68931 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 53 | 62 | 71 | 80 |
| 49 | 69020 | 69108 | 69197 | 69285 | 69373 | 69461 | 69548 | 69636 | 69723 | 69810 | 9 | 18 | 26 | 35 | 44 | 53 | 61 | 70 | 79 |
| 50 | 69897 | 69984 | 70070 | 70157 | 70243 | 70329 | 70415 | 70501 | 70586 | 70672 | 9 | 17 | 26 | 34 | 43 | 52 | 60 | 69 | 77 |
| 51 | 70757 | 70842 | 70927 | 71012 | 71096 | 71181 | 71265 | 71349 | 71433 | 71517 | 8 | 17 | 25 | 34 | 42 | 51 | 59 | 67 | 76 |
| 52 | 71600 | 71684 | 71767 | 71850 | 71933 | 72016 | 72099 | 72181 | 72263 | 72346 | 8 | 17 | 25 | 33 | 42 | 50 | 58 | 66 | 75 |
| 53 | 72428 | 72509 | 72591 | 72673 | 72754 | 72835 | 72916 | 72997 | 73078 | 73159 | 8 | 16 | 24 | 32 | 41 | 49 | 57 | 65 | 73 |
| 54 | 73239 | 73320 | 73400 | 73480 | 73560 | 73640 | 73719 | 73799 | 73878 | 73957 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |

## LOGARITHMS OF NUMBERS

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 74036 | 74115 | 74194 | 74273 | 74351 | 74429 | 74507 | 74586 | 74663 | 74741 | 8 | 16 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 62 | 70 |
| 56 | 74819 | 74896 | 74974 | 75051 | 75128 | 75205 | 75282 | 75358 | 75435 | 75511 | 8 | 15 | 23 | 31 | 39 | 46 | 54 | 62 | 69 |
| 57 | 75587 | 75664 | 75740 | 75815 | 75891 | 75967 | 76042 | 76118 | 76193 | 76268 | 8 | 15 | 23 | 30 | 38 | 45 | 53 | 60 | 68 |
| 58 | 76343 | 76418 | 76492 | 76567 | 76641 | 76716 | 76790 | 76864 | 76938 | 77012 | 7 | 15 | 22 | 30 | 37 | 45 | 52 | 59 | 67 |
| 59 | 77085 | 77159 | 77232 | 77305 | 77379 | 77452 | 77525 | 77597 | 77670 | 77743 | 7 | 15 | 22 | 29 | 37 | 44 | 51 | 58 | 66 |
| 60 | 77815 | 77887 | 77960 | 78032 | 78104 | 78176 | 78247 | 78319 | 78390 | 78462 | 7 | 14 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | 65 |
| 61 | 78533 | 78604 | 78675 | 78746 | 78817 | 78888 | 78958 | 79029 | 79099 | 79169 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 64 |
| 62 | 79239 | 79309 | 79379 | 79449 | 79518 | 79588 | 79657 | 79727 | 79796 | 79865 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 63 | 79934 | 80003 | 80072 | 80140 | 80209 | 80277 | 80346 | 80414 | 80482 | 80550 | 7 | 14 | 21 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 |
| 64 | 80618 | 80686 | 80754 | 80821 | 80889 | 80956 | 81023 | 81090 | 81158 | 81224 | 7 | 13 | 20 | 27 | 34 | 40 | 47 | 54 | 60 |
| 65 | 81291 | 81358 | 81425 | 81491 | 81558 | 81624 | 81690 | 81757 | 81823 | 81889 | 7 | 13 | 20 | 26 | 33 | 40 | 46 | 53 | 59 |
| 66 | 81954 | 82020 | 82086 | 82151 | 82217 | 82282 | 82347 | 82413 | 82478 | 82543 | 7 | 13 | 20 | 26 | 33 | 39 | 46 | 52 | 59 |
| 67 | 82607 | 82672 | 82737 | 82802 | 82866 | 82930 | 82995 | 83059 | 83123 | 83187 | 6 | 13 | 19 | 26 | 32 | 39 | 45 | 52 | 58 |
| 68 | 83251 | 83315 | 83378 | 83442 | 83506 | 83569 | 83632 | 83696 | 83759 | 83822 | 6 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 44 | 50 | 57 |
| 69 | 83885 | 83948 | 84011 | 84073 | 84136 | 84198 | 84261 | 84323 | 84386 | 84448 | 6 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 44 | 50 | 56 |
| 70 | 84510 | 84572 | 84634 | 84696 | 84757 | 84819 | 84880 | 84942 | 85003 | 85065 | 6 | 12 | 18 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 | 55 |
| 71 | 85126 | 85187 | 85248 | 85309 | 85370 | 85431 | 85491 | 85552 | 85612 | 85673 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 49 | 55 |
| 72 | 85733 | 85794 | 85854 | 85914 | 85974 | 86034 | 86094 | 86153 | 86213 | 86273 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 73 | 86332 | 86392 | 86451 | 86510 | 86570 | 86629 | 86688 | 86747 | 86806 | 86864 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 35 | 41 | 47 | 53 |
| 74 | 86923 | 86982 | 87040 | 87099 | 87157 | 87216 | 87274 | 87332 | 87390 | 87448 | 6 | 12 | 18 | 23 | 29 | 35 | 41 | 47 | 52 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 87506 | 87564 | 87622 | 87679 | 87737 | 87795 | 87852 | 87910 | 87967 | 88024 | 6 | 12 | 17 | 23 | 29 | 35 | 40 | 46 | 52 |
| 76 | 88081 | 88138 | 88195 | 88252 | 88309 | 88366 | 88423 | 88480 | 88536 | 88593 | 6 | 11 | 17 | 23 | 29 | 34 | 40 | 46 | 51 |
| 77 | 88649 | 88705 | 88762 | 88818 | 88874 | 88930 | 88986 | 89042 | 89098 | 89154 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 | 50 |
| 78 | 89209 | 89265 | 89321 | 89376 | 89432 | 89487 | 89542 | 89597 | 89653 | 89708 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 |
| 79 | 89763 | 89818 | 89873 | 89927 | 89982 | 90037 | 90091 | 90146 | 90200 | 90255 | 5 | 11 | 16 | 22 | 27 | 33 | 38 | 44 | 49 |
| 80 | 90309 | 90363 | 90417 | 90472 | 90526 | 90580 | 90634 | 90687 | 90741 | 90795 | 5 | 11 | 16 | 22 | 27 | 32 | 38 | 43 | 49 |
| 81 | 90849 | 90902 | 90956 | 91009 | 91062 | 91116 | 91169 | 91222 | 91275 | 91328 | 5 | 11 | 16 | 21 | 27 | 32 | 37 | 43 | 48 |
| 82 | 91381 | 91434 | 91487 | 91540 | 91593 | 91645 | 91698 | 91751 | 91803 | 91855 | 5 | 11 | 16 | 21 | 26 | 32 | 37 | 42 | 47 |
| 83 | 91908 | 91960 | 92012 | 92065 | 92117 | 92169 | 92221 | 92273 | 92324 | 92376 | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 42 | 47 |
| 84 | 92428 | 92480 | 92531 | 92583 | 92634 | 92686 | 92737 | 92788 | 92840 | 92891 | 5 | 10 | 15 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 |
| 85 | 92942 | 92993 | 93044 | 93095 | 93146 | 93197 | 93247 | 93298 | 93349 | 93399 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 36 | 41 | 46 |
| 86 | 93450 | 93500 | 93551 | 93601 | 93651 | 93702 | 93752 | 93802 | 93852 | 93902 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 87 | 93952 | 94002 | 94052 | 94101 | 94151 | 94201 | 94250 | 94300 | 94349 | 94399 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 88 | 94448 | 94498 | 94547 | 94596 | 94645 | 94694 | 94743 | 94792 | 94841 | 94890 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 29 | 34 | 39 | 44 |
| 89 | 94939 | 94988 | 95036 | 95085 | 95134 | 95182 | 95231 | 95279 | 95328 | 95376 | 5 | 10 | 15 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 |
| 90 | 95424 | 95472 | 95521 | 95569 | 95617 | 95665 | 95713 | 95761 | 95809 | 95856 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 38 | 43 |
| 91 | 95904 | 95952 | 95999 | 96047 | 96095 | 96142 | 96190 | 96237 | 96284 | 96332 | 5 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 | 33 | 38 | 43 |
| 92 | 96379 | 96426 | 96473 | 96520 | 96567 | 96614 | 96661 | 96708 | 96755 | 96802 | 5 | 9 | 14 | 19 | 24 | 28 | 33 | 38 | 42 |
| 93 | 96848 | 96895 | 96942 | 96988 | 97035 | 97081 | 97128 | 97174 | 97220 | 97267 | 5 | 9 | 14 | 19 | 23 | 28 | 33 | 37 | 42 |
| 94 | 97313 | 97359 | 97405 | 97451 | 97497 | 97543 | 97589 | 97635 | 97681 | 97727 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 | 28 | 32 | 37 | 41 |
| 95 | 97772 | 97818 | 97864 | 97909 | 97955 | 98000 | 98046 | 98091 | 98137 | 98182 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 | 27 | 32 | 36 | 41 |
| 96 | 98227 | 98272 | 98318 | 98363 | 98408 | 98453 | 98498 | 98543 | 98588 | 98632 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 | 27 | 32 | 36 | 41 |
| 97 | 98677 | 98722 | 98767 | 98811 | 98856 | 98900 | 98945 | 98989 | 99034 | 99078 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 40 |
| 98 | 99123 | 99167 | 99211 | 99255 | 99300 | 99344 | 99388 | 99432 | 99476 | 99520 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 26 | 31 | 35 | 40 |
| 99 | 99564 | 99607 | 99651 | 99695 | 99739 | 99782 | 99826 | 99870 | 99913 | 99957 | 4 | 9 | 13 | 17 | 22 | 26 | 30 | 35 | 39 |

# TABLE II
## ANTILOGARITHMS.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences. 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·00 | 10000 | 10023 | 10046 | 10069 | 10093 | 10116 | 10139 | 10162 | 10186 | 10209 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| ·01 | 10233 | 10257 | 10280 | 10304 | 10328 | 10351 | 10375 | 10399 | 10423 | 10447 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 |
| ·02 | 10471 | 10495 | 10520 | 10544 | 10568 | 10593 | 10617 | 10641 | 10666 | 10691 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| ·03 | 10715 | 10740 | 10765 | 10789 | 10814 | 10839 | 10864 | 10889 | 10914 | 10940 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 |
| ·04 | 10965 | 10990 | 11015 | 11041 | 11066 | 11092 | 11117 | 11143 | 11169 | 11194 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 |
| ·05 | 11220 | 11246 | 11272 | 11298 | 11324 | 11350 | 11376 | 11402 | 11429 | 11455 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| ·06 | 11482 | 11508 | 11535 | 11561 | 11588 | 11614 | 11641 | 11668 | 11695 | 11722 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 24 |
| ·07 | 11749 | 11776 | 11803 | 11830 | 11858 | 11885 | 11912 | 11940 | 11967 | 11995 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| ·08 | 12023 | 12050 | 12078 | 12106 | 12134 | 12162 | 12190 | 12218 | 12246 | 12274 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| ·09 | 12303 | 12331 | 12359 | 12388 | 12417 | 12445 | 12474 | 12503 | 12531 | 12560 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| ·10 | 12589 | 12618 | 12647 | 12677 | 12706 | 12735 | 12764 | 12794 | 12823 | 12853 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 26 |
| ·11 | 12882 | 12912 | 12942 | 12972 | 13002 | 13032 | 13062 | 13092 | 13122 | 13152 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| ·12 | 13183 | 13213 | 13243 | 13274 | 13305 | 13335 | 13366 | 13397 | 13428 | 13459 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 25 | 28 |
| ·13 | 13490 | 13521 | 13552 | 13583 | 13614 | 13646 | 13677 | 13709 | 13740 | 13772 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| ·14 | 13804 | 13836 | 13868 | 13900 | 13932 | 13964 | 13996 | 14028 | 14060 | 14093 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 29 |
| ·15 | 14125 | 14158 | 14191 | 14223 | 14256 | 14289 | 14322 | 14355 | 14388 | 14421 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 | 20 | 23 | 26 | 30 |
| ·16 | 14454 | 14488 | 14521 | 14555 | 14588 | 14622 | 14655 | 14689 | 14723 | 14757 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 24 | 27 | 30 |
| ·17 | 14791 | 14825 | 14859 | 14894 | 14928 | 14962 | 14997 | 15031 | 15066 | 15101 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| ·18 | 15136 | 15171 | 15205 | 15241 | 15276 | 15311 | 15346 | 15382 | 15417 | 15453 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 | 32 |
| ·19 | 15488 | 15524 | 15560 | 15596 | 15631 | 15668 | 15704 | 15740 | 15776 | 15812 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 22 | 25 | 29 | 32 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **·20** | 15849 | 15885 | 15922 | 15959 | 15996 | 16032 | 16069 | 16106 | 16144 | 16181 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 | 22 | 26 | 30 | 33 |
| ·21 | 16218 | 16255 | 16293 | 16331 | 16368 | 16406 | 16444 | 16482 | 16520 | 16558 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| ·22 | 16596 | 16634 | 16672 | 16711 | 16749 | 16788 | 16827 | 16866 | 16904 | 16943 | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 |
| ·23 | 16982 | 17022 | 17061 | 17100 | 17140 | 17179 | 17219 | 17258 | 17298 | 17338 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| ·24 | 17378 | 17418 | 17458 | 17498 | 17539 | 17579 | 17620 | 17660 | 17701 | 17742 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **·25** | 17783 | 17824 | 17865 | 17906 | 17947 | 17989 | 18030 | 18072 | 18113 | 18155 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| ·26 | 18197 | 18239 | 18281 | 18323 | 18365 | 18408 | 18450 | 18493 | 18535 | 18578 | 4 | 8 | 13 | 17 | 21 | 25 | 30 | 34 | 38 |
| ·27 | 18621 | 18664 | 18707 | 18750 | 18793 | 18836 | 18880 | 18923 | 18967 | 19011 | 4 | 9 | 13 | 17 | 22 | 26 | 30 | 35 | 39 |
| ·28 | 19055 | 19099 | 19143 | 19187 | 19231 | 19275 | 19320 | 19364 | 19409 | 19454 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 26 | 31 | 35 | 40 |
| ·29 | 19498 | 19543 | 19588 | 19634 | 19679 | 19724 | 19770 | 19815 | 19861 | 19907 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 | 27 | 32 | 36 | 41 |
| **·30** | 19953 | 19999 | 20045 | 20091 | 20137 | 20184 | 20230 | 20277 | 20324 | 20370 | 5 | 9 | 14 | 19 | 23 | 28 | 32 | 37 | 42 |
| ·31 | 20417 | 20464 | 20512 | 20559 | 20606 | 20654 | 20701 | 20749 | 20797 | 20845 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 33 | 38 | 43 |
| ·32 | 20893 | 20941 | 20989 | 21038 | 21086 | 21135 | 21184 | 21232 | 21281 | 21330 | 5 | 10 | 15 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 |
| ·33 | 21380 | 21429 | 21478 | 21528 | 21577 | 21627 | 21677 | 21727 | 21777 | 21827 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| ·34 | 21878 | 21928 | 21979 | 22029 | 22080 | 22131 | 22182 | 22233 | 22284 | 22336 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 31 | 36 | 41 | 46 |
| **·35** | 22387 | 22439 | 22491 | 22542 | 22594 | 22646 | 22699 | 22751 | 22803 | 22856 | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 |
| ·36 | 22909 | 22961 | 23014 | 23067 | 23121 | 23174 | 23227 | 23281 | 23336 | 23388 | 5 | 11 | 16 | 21 | 27 | 32 | 37 | 43 | 48 |
| ·37 | 23442 | 23496 | 23550 | 23605 | 23659 | 23714 | 23768 | 23823 | 23878 | 23933 | 5 | 11 | 16 | 22 | 27 | 33 | 38 | 44 | 49 |
| ·38 | 23988 | 24044 | 24099 | 24155 | 24210 | 24266 | 24322 | 24378 | 24434 | 24491 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 | 50 |
| ·39 | 24547 | 24604 | 24660 | 24717 | 24774 | 24831 | 24889 | 24946 | 25003 | 25061 | 6 | 11 | 17 | 23 | 29 | 34 | 40 | 46 | 51 |
| **·40** | 25119 | 25177 | 25236 | 25293 | 25351 | 25410 | 25468 | 25527 | 25586 | 25645 | 6 | 12 | 18 | 23 | 29 | 35 | 41 | 47 | 53 |
| ·41 | 25704 | 25763 | 25823 | 25882 | 25942 | 26002 | 26062 | 26122 | 26182 | 26242 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| ·42 | 26303 | 26363 | 26424 | 26485 | 26546 | 26607 | 26669 | 26730 | 26792 | 26853 | 6 | 12 | 18 | 24 | 31 | 37 | 43 | 49 | 55 |
| ·43 | 26915 | 26977 | 27040 | 27102 | 27164 | 27227 | 27290 | 27353 | 27416 | 27479 | 6 | 13 | 19 | 25 | 31 | 38 | 44 | 50 | 56 |
| ·44 | 27542 | 27606 | 27669 | 27733 | 27797 | 27861 | 27925 | 27990 | 28054 | 28119 | 6 | 13 | 19 | 26 | 32 | 39 | 45 | 51 | 58 |
| **·45** | 28184 | 28249 | 28314 | 28379 | 28445 | 28510 | 28576 | 28642 | 28708 | 28774 | 7 | 13 | 20 | 26 | 33 | 39 | 46 | 52 | 59 |
| ·46 | 28840 | 28907 | 28973 | 29040 | 29107 | 29174 | 29242 | 29309 | 29376 | 29444 | 7 | 13 | 20 | 27 | 34 | 40 | 47 | 54 | 60 |
| ·47 | 29512 | 29580 | 29648 | 29717 | 29785 | 29854 | 29923 | 29992 | 30061 | 30130 | 7 | 14 | 21 | 28 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 |
| ·48 | 30200 | 30269 | 30339 | 30409 | 30479 | 30549 | 30620 | 30690 | 30761 | 90832 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| ·49 | 30903 | 30974 | 31046 | 31117 | 31189 | 31261 | 31333 | 31405 | 31477 | 31550 | 7 | 14 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 58 | 65 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences. 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **·50** | 31623 | 31696 | 31769 | 31842 | 31916 | 31989 | 32063 | 32137 | 32211 | 32285 | 7 | 15 | 22 | 29 | 37 | 44 | 52 | 59 | 66 |
| ·51 | 32359 | 32434 | 32509 | 32584 | 32659 | 32735 | 32809 | 32885 | 32961 | 33037 | 8 | 15 | 23 | 30 | 38 | 45 | 53 | 60 | 68 |
| ·52 | 33113 | 33189 | 33266 | 33343 | 33420 | 33497 | 33574 | 33651 | 33729 | 33806 | 8 | 15 | 23 | 31 | 39 | 46 | 54 | 62 | 69 |
| ·53 | 33884 | 33968 | 34041 | 34119 | 34198 | 34277 | 34356 | 34435 | 34514 | 34594 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 47 | 55 | 63 | 71 |
| ·54 | 34674 | 34754 | 34834 | 34914 | 34995 | 35075 | 35156 | 35237 | 35318 | 35400 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 65 | 73 |
| **·55** | 35481 | 35563 | 35645 | 35727 | 35810 | 35892 | 35975 | 36058 | 36141 | 36224 | 8 | 16 | 25 | 33 | 41 | 50 | 58 | 66 | 74 |
| ·56 | 36308 | 36392 | 36475 | 36559 | 36644 | 36728 | 36813 | 36898 | 36983 | 37068 | 8 | 17 | 25 | 34 | 42 | 51 | 59 | 68 | 76 |
| ·57 | 37154 | 37239 | 37325 | 37411 | 37497 | 37584 | 37670 | 37757 | 37844 | 37931 | 9 | 17 | 26 | 35 | 43 | 52 | 61 | 69 | 78 |
| ·58 | 38019 | 38107 | 38194 | 38282 | 38371 | 38459 | 38548 | 38637 | 38726 | 38815 | 9 | 18 | 27 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | 80 |
| ·59 | 38905 | 38994 | 39084 | 39174 | 39264 | 39355 | 39446 | 39537 | 39628 | 39719 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 82 |
| **·60** | 39811 | 39902 | 39994 | 40087 | 40179 | 40272 | 40365 | 40458 | 40551 | 40644 | 9 | 19 | 28 | 37 | 46 | 56 | 65 | 74 | 83 |
| ·61 | 40738 | 40832 | 40926 | 41020 | 41115 | 41210 | 41305 | 41400 | 41495 | 41591 | 9 | 19 | 28 | 38 | 47 | 57 | 66 | 76 | 85 |
| ·62 | 41687 | 41783 | 41879 | 41976 | 42073 | 42170 | 42267 | 42364 | 42462 | 42560 | 10 | 19 | 29 | 39 | 49 | 58 | 68 | 78 | 87 |
| ·63 | 42658 | 42756 | 42855 | 42954 | 43053 | 43152 | 43251 | 43351 | 43451 | 43551 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 89 |
| ·64 | 43652 | 43752 | 43853 | 43954 | 44055 | 44157 | 44259 | 44361 | 44463 | 44566 | 10 | 20 | 30 | 41 | 51 | 61 | 71 | 81 | 91 |
| **·65** | 44668 | 44771 | 44875 | 44978 | 45082 | 45186 | 45290 | 45394 | 45499 | 45604 | 10 | 21 | 31 | 42 | 52 | 62 | 73 | 83 | 94 |
| ·66 | 45709 | 45814 | 45920 | 46026 | 46132 | 46238 | 46345 | 46452 | 46559 | 46666 | 11 | 21 | 32 | 43 | 53 | 64 | 75 | 85 | 96 |
| ·67 | 46774 | 46881 | 46989 | 47098 | 47206 | 47315 | 47424 | 47534 | 47643 | 47753 | 11 | 22 | 33 | 44 | 54 | 65 | 76 | 87 | 98 |
| ·68 | 47863 | 47973 | 48084 | 48195 | 48306 | 48417 | 48529 | 48641 | 48753 | 48865 | 11 | 22 | 33 | 45 | 56 | 67 | 78 | 89 | 100 |
| ·69 | 48978 | 49091 | 49204 | 49317 | 49431 | 49545 | 49659 | 49774 | 49888 | 50003 | 11 | 23 | 34 | 46 | 57 | 68 | 80 | 91 | 103 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **·70** | 50119 | 50234 | 50350 | 50466 | 50582 | 50699 | 50816 | 50933 | 51050 | 51168 | 12 | 23 | 35 | 47 | 58 | 70 | 82 | 93 | 105 |
| ·71 | 51286 | 51404 | 51523 | 51642 | 51761 | 51880 | 52000 | 52119 | 52240 | 52360 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 |
| ·72 | 52481 | 52602 | 52723 | 52845 | 52966 | 53088 | 53211 | 53333 | 53456 | 53580 | 12 | 24 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 | 98 | 110 |
| ·73 | 53703 | 53827 | 53951 | 54075 | 54200 | 54325 | 54450 | 54576 | 54702 | 54828 | 13 | 25 | 38 | 50 | 63 | 75 | 88 | 100 | 113 |
| ·74 | 54954 | 55081 | 55208 | 55336 | 55463 | 55590 | 55719 | 55847 | 55976 | 56105 | 13 | 26 | 38 | 51 | 64 | 77 | 90 | 102 | 115 |
| **·75** | 56234 | 56364 | 56494 | 56624 | 56754 | 56885 | 57016 | 57148 | 57280 | 57412 | 13 | 26 | 39 | 52 | 66 | 79 | 92 | 105 | 118 |
| ·76 | 57544 | 57677 | 57810 | 57943 | 58076 | 58210 | 58345 | 58479 | 58614 | 58749 | 13 | 27 | 40 | 54 | 67 | 80 | 94 | 107 | 121 |
| ·77 | 58884 | 59020 | 59156 | 59293 | 59429 | 59566 | 59704 | 59841 | 59979 | 60117 | 14 | 27 | 41 | 55 | 69 | 82 | 96 | 110 | 123 |
| ·78 | 60256 | 60395 | 60534 | 60674 | 60814 | 60954 | 61094 | 61235 | 61376 | 61518 | 14 | 28 | 42 | 56 | 70 | 84 | 98 | 112 | 126 |
| ·79 | 61659 | 61802 | 61944 | 62087 | 62230 | 62373 | 62517 | 62661 | 62806 | 62951 | 14 | 29 | 43 | 58 | 72 | 86 | 101 | 115 | 130 |
| **·80** | 63096 | 63241 | 63387 | 63533 | 63680 | 63826 | 63973 | 64121 | 64269 | 64417 | 15 | 29 | 44 | 59 | 74 | 88 | 103 | 118 | 132 |
| ·81 | 64565 | 64714 | 64863 | 65013 | 65163 | 65313 | 65464 | 65615 | 65766 | 65917 | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 | 135 |
| ·82 | 66069 | 66222 | 66374 | 66527 | 66681 | 66834 | 66988 | 67143 | 67298 | 67453 | 15 | 31 | 46 | 62 | 77 | 92 | 108 | 123 | 139 |
| ·83 | 67608 | 67764 | 67920 | 68077 | 68234 | 68391 | 68549 | 68707 | 68865 | 69024 | 16 | 32 | 47 | 63 | 79 | 95 | 110 | 126 | 142 |
| ·84 | 69183 | 69343 | 69503 | 69663 | 69823 | 69984 | 70146 | 70307 | 70469 | 70632 | 16 | 32 | 48 | 64 | 81 | 97 | 113 | 129 | 145 |
| **·85** | 70795 | 70958 | 71121 | 71285 | 71450 | 71614 | 71779 | 71945 | 72111 | 72277 | 17 | 33 | 50 | 66 | 83 | 99 | 116 | 132 | 149 |
| ·86 | 72444 | 72611 | 72778 | 72946 | 73114 | 73282 | 73451 | 73621 | 73790 | 73961 | 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 101 | 118 | 135 | 152 |
| ·87 | 74131 | 74302 | 74473 | 74645 | 74817 | 74989 | 75162 | 75336 | 75509 | 75683 | 17 | 35 | 52 | 69 | 87 | 104 | 121 | 138 | 156 |
| ·88 | 75858 | 76033 | 76208 | 76384 | 76560 | 76736 | 76913 | 77090 | 77268 | 77446 | 18 | 35 | 53 | 71 | 89 | 107 | 125 | 142 | 159 |
| ·89 | 77625 | 77804 | 77983 | 78163 | 78343 | 78524 | 78705 | 78886 | 79068 | 79250 | 18 | 36 | 54 | 72 | 91 | 109 | 127 | 145 | 163 |
| **·90** | 79433 | 79616 | 79799 | 79983 | 80168 | 80353 | 80538 | 80724 | 80910 | 81096 | 19 | 37 | 56 | 74 | 93 | 111 | 130 | 148 | 167 |
| ·91 | 81283 | 81470 | 81658 | 81846 | 82035 | 82224 | 82414 | 82604 | 82794 | 82985 | 19 | 38 | 57 | 76 | 95 | 113 | 132 | 151 | 170 |
| ·92 | 83176 | 83368 | 83560 | 83753 | 83946 | 84140 | 84333 | 84528 | 84723 | 84918 | 19 | 39 | 58 | 78 | 97 | 116 | 136 | 155 | 175 |
| ·93 | 85114 | 85310 | 85507 | 85704 | 85901 | 86099 | 86298 | 86497 | 86696 | 86896 | 20 | 40 | 60 | 79 | 99 | 119 | 139 | 158 | 178 |
| ·94 | 87096 | 87297 | 87498 | 87700 | 87902 | 88105 | 88308 | 88512 | 88716 | 88920 | 20 | 41 | 61 | 81 | 102 | 122 | 142 | 162 | 183 |
| **·95** | 89125 | 89331 | 89536 | 89743 | 89950 | 90157 | 90365 | 90573 | 90782 | 90991 | 21 | 42 | 62 | 83 | 104 | 125 | 146 | 166 | 187 |
| ·96 | 91201 | 91411 | 91622 | 91833 | 92045 | 92257 | 92470 | 92683 | 92897 | 93111 | 21 | 42 | 64 | 85 | 106 | 127 | 149 | 170 | 191 |
| ·97 | 93325 | 93541 | 93756 | 93972 | 94189 | 94406 | 94624 | 94842 | 95060 | 95280 | 22 | 43 | 65 | 87 | 109 | 130 | 152 | 174 | 195 |
| ·98 | 95499 | 95719 | 95940 | 96161 | 96383 | 96605 | 96828 | 97051 | 97275 | 97499 | 22 | 44 | 67 | 89 | 111 | 133 | 155 | 178 | 200 |
| ·99 | 97724 | 97949 | 98175 | 98401 | 98628 | 98855 | 99083 | 99312 | 99541 | 99770 | 23 | 46 | 68 | 91 | 114 | 137 | 160 | 182 | 205 |

TABLE III

## NATURAL SINES

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | Mean Differences 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0·00000 | 0·00291 | 0·00582 | 0·00873 | 0·01164 | 0·01454 | 0·01745 | 89° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 175 | 204 | 233 | 262 |
| 1° | ·01745 | ·02036 | ·02327 | ·02618 | ·02908 | ·03199 | ·03490 | 88° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 175 | 204 | 233 | 262 |
| 2° | ·03490 | ·03781 | ·04071 | ·04362 | ·04653 | ·04943 | ·05234 | 87° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 175 | 204 | 233 | 262 |
| 3° | ·05234 | ·05524 | ·05814 | ·06105 | ·06395 | ·06685 | ·06976 | 86° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 174 | 203 | 232 | 261 |
| 4° | ·06976 | ·07266 | ·07556 | ·07846 | ·08136 | ·08426 | ·08716 | 85° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 174 | 203 | 232 | 261 |
| 5° | 0·08716 | 0·09005 | 0·09295 | 0·09585 | 0·09874 | 0·10164 | 0·10453 | 84° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 174 | 203 | 232 | 261 |
| 6° | ·10453 | ·10742 | ·11031 | ·11320 | ·11609 | ·11898 | ·12187 | 83° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 174 | 203 | 232 | 261 |
| 7° | ·12187 | ·12476 | ·12764 | ·13053 | ·13341 | ·13629 | ·13917 | 82° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 173 | 202 | 231 | 260 |
| 8° | ·13917 | ·14205 | ·14493 | ·14781 | ·15069 | ·15356 | ·15643 | 81° | 29 | 58 | 86 | 115 | 144 | 173 | 202 | 230 | 259 |
| 9° | ·15643 | ·15931 | ·16218 | ·16505 | ·16792 | ·17078 | ·17365 | 80° | 29 | 57 | 86 | 115 | 144 | 172 | 201 | 230 | 258 |
| 10° | 0·17365 | 0·17651 | 0·17937 | 0·18224 | 0·18509 | 0·18795 | 0·19081 | 79° | 29 | 57 | 86 | 115 | 144 | 172 | 201 | 229 | 258 |
| 11° | ·19081 | ·19366 | ·19652 | ·19937 | ·20222 | ·20507 | ·20791 | 78° | 29 | 57 | 86 | 114 | 143 | 171 | 200 | 228 | 257 |
| 12° | ·20791 | ·21076 | ·21360 | ·21644 | ·21928 | ·22212 | ·22495 | 77° | 28 | 57 | 85 | 114 | 142 | 170 | 199 | 227 | 256 |
| 13° | ·22495 | ·22778 | ·23062 | ·23345 | ·23627 | ·23910 | ·24192 | 76° | 28 | 57 | 85 | 113 | 141 | 170 | 198 | 226 | 255 |
| 14° | ·24192 | ·24474 | ·24756 | ·25038 | ·25320 | ·25601 | ·25882 | 75° | 28 | 56 | 85 | 113 | 141 | 169 | 197 | 226 | 254 |
| 15° | 0·25882 | 0·26163 | 0·26443 | 0·26724 | 0·27004 | 0·27284 | 0·27564 | 74° | 28 | 56 | 84 | 112 | 140 | 168 | 196 | 224 | 252 |
| 16° | ·27564 | ·27843 | ·28123 | ·28402 | ·28680 | ·28959 | ·29237 | 73° | 28 | 56 | 84 | 112 | 140 | 167 | 195 | 223 | 251 |
| 17° | ·29237 | ·29515 | ·29793 | ·30071 | ·30348 | ·30625 | ·30902 | 72° | 28 | 56 | 83 | 111 | 139 | 166 | 194 | 222 | 250 |
| 18° | ·30902 | ·31178 | ·31454 | ·31730 | ·32006 | ·32282 | ·32557 | 71° | 28 | 55 | 83 | 110 | 138 | 166 | 193 | 221 | 248 |
| 19° | ·32557 | ·32832 | ·33106 | ·33381 | ·33655 | ·33929 | ·34202 | 70° | 27 | 55 | 82 | 110 | 137 | 164 | 192 | 219 | 247 |

[X]

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 0·34202 | 0·34475 | 0·34748 | 0·35021 | 0·35293 | 0·35565 | 0·35837 | 69° | 27 | 55 | 82 | 109 | 137 | 164 | 191 | 218 | 246 |
| 21° | ·35837 | ·36108 | ·36379 | ·36650 | ·36921 | ·37191 | ·37461 | 68° | 27 | 54 | 81 | 108 | 136 | 163 | 190 | 217 | 244 |
| 22° | ·37461 | ·37730 | ·37999 | ·38268 | ·38537 | ·38805 | ·39073 | 67° | 27 | 54 | 81 | 108 | 135 | 161 | 188 | 215 | 242 |
| 23° | ·39073 | ·39341 | ·39608 | ·39875 | ·40142 | ·40408 | ·40674 | 66° | 27 | 53 | 80 | 107 | 134 | 160 | 187 | 214 | 240 |
| 24° | ·40674 | ·40939 | ·41204 | ·41469 | ·41734 | ·41998 | ·42262 | 65° | 27 | 53 | 80 | 106 | 133 | 159 | 186 | 212 | 238 |
| 25° | 0·42262 | 0·42525 | 0·42788 | 0·43051 | 0·43313 | 0·43575 | 0·43837 | 64° | 26 | 52 | 79 | 105 | 131 | 157 | 184 | 210 | 236 |
| 26° | ·43837 | ·44098 | ·44359 | ·44620 | ·44880 | ·45140 | ·45399 | 63° | 26 | 52 | 78 | 104 | 130 | 156 | 182 | 208 | 234 |
| 27° | ·45399 | ·45658 | ·45917 | ·46175 | ·46433 | ·46690 | ·46947 | 62° | 26 | 52 | 77 | 103 | 129 | 155 | 181 | 206 | 232 |
| 28° | ·46947 | ·47204 | ·47460 | ·47716 | ·47971 | ·48226 | ·48481 | 61° | 26 | 51 | 77 | 102 | 128 | 154 | 179 | 204 | 230 |
| 29° | ·48481 | ·48735 | ·48989 | ·49242 | ·49495 | ·49748 | ·50000 | 60° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 202 | 228 |
| 30° | 0·50000 | 0·50252 | 0·50503 | 0·50754 | 0·51004 | 0·51254 | 0·51504 | 59° | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 225 |
| 31° | ·51504 | ·51753 | ·52002 | ·52250 | ·52498 | ·52745 | ·52992 | 58° | 25 | 50 | 74 | 99 | 124 | 149 | 174 | 198 | 223 |
| 32° | ·52992 | ·53238 | ·53484 | ·53730 | ·53975 | ·54220 | ·54464 | 57° | 25 | 49 | 74 | 98 | 123 | 147 | 172 | 196 | 221 |
| 33° | ·54464 | ·54708 | ·54951 | ·55194 | ·55436 | ·55678 | ·55919 | 56° | 24 | 49 | 73 | 97 | 122 | 146 | 170 | 194 | 219 |
| 34° | ·55919 | ·56160 | ·56401 | ·56641 | ·56880 | ·57119 | ·57358 | 55° | 24 | 48 | 72 | 96 | 120 | 144 | 168 | 192 | 216 |
| 35° | 0·57358 | 0·57596 | 0·57833 | 0·58070 | 0·58307 | 0·58543 | 0·58779 | 54° | 24 | 47 | 71 | 95 | 119 | 142 | 166 | 190 | 213 |
| 36° | ·58779 | ·59014 | ·59248 | ·59482 | ·59716 | ·59949 | ·60182 | 53° | 23 | 47 | 70 | 94 | 117 | 140 | 164 | 187 | 211 |
| 37° | ·60182 | ·60414 | ·60645 | ·60876 | ·61107 | ·61337 | ·61566 | 52° | 23 | 46 | 70 | 92 | 116 | 139 | 162 | 185 | 208 |
| 38° | ·61566 | ·61795 | ·62024 | ·62251 | ·62479 | ·62706 | ·62932 | 51° | 23 | 46 | 68 | 91 | 114 | 137 | 159 | 182 | 205 |
| 39° | ·62932 | ·63158 | ·63383 | ·63608 | ·63832 | ·64056 | ·64279 | 50° | 22 | 45 | 67 | 90 | 112 | 135 | 157 | 179 | 202 |
| 40° | 0·64279 | 0·64501 | 0·64723 | 0·64945 | 0·65166 | 0·65386 | 0·65606 | 49° | 22 | 44 | 66 | 88 | 111 | 133 | 155 | 177 | 199 |
| 41° | ·65606 | ·65825 | ·66044 | ·66262 | ·66480 | ·66697 | ·66913 | 48° | 22 | 44 | 65 | 87 | 109 | 131 | 153 | 174 | 196 |
| 42° | ·66913 | ·67129 | ·67344 | ·67559 | ·67773 | ·67987 | ·68200 | 47° | 21 | 43 | 64 | 86 | 107 | 129 | 150 | 172 | 193 |
| 43° | ·68200 | ·68412 | ·68624 | ·68835 | ·69046 | ·69256 | ·69466 | 46° | 21 | 42 | 63 | 84 | 106 | 127 | 148 | 169 | 190 |
| 44° | ·69466 | ·69675 | ·69883 | ·70091 | ·70298 | ·70505 | ·70711 | 45° | 21 | 42 | 62 | 83 | 104 | 124 | 145 | 166 | 187 |

NATURAL COSINES

## NATURAL SINES

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Mean Differences | | | | | | | | |
| 45° | 0·70711 | 0·70916 | 0·71121 | 0·71325 | 0·71529 | 0·71732 | 0·71934 | 44° | 20 | 41 | 61 | 82 | 102 | 122 | 143 | 163 | 184 |
| 46° | ·71934 | ·72136 | ·72337 | ·72537 | ·72737 | ·72937 | ·73135 | 43° | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 |
| 47° | ·73135 | ·73333 | ·73531 | ·73728 | ·73924 | ·74120 | ·74314 | 42° | 20 | 39 | 59 | 78 | 98 | 118 | 138 | 157 | 177 |
| 48° | ·74314 | ·74509 | ·74703 | ·74896 | ·75088 | ·75280 | ·75471 | 41° | 19 | 39 | 58 | 77 | 96 | 116 | 135 | 154 | 173 |
| 49° | ·75471 | ·75661 | ·75851 | ·76041 | ·76229 | ·76417 | ·76604 | 40° | 19 | 38 | 57 | 76 | 95 | 113 | 132 | 151 | 170 |
| 50° | 0·76604 | 0·76791 | 0·76977 | 0·77162 | 0·77347 | 0·77531 | 0·77715 | 39° | 19 | 37 | 56 | 74 | 93 | 111 | 130 | 148 | 167 |
| 51° | ·77715 | ·77897 | ·78079 | ·78261 | ·78442 | ·78622 | ·78801 | 38° | 18 | 36 | 54 | 72 | 91 | 109 | 127 | 145 | 163 |
| 52° | ·78801 | ·78980 | ·79158 | ·79335 | ·79512 | ·79688 | ·79864 | 37° | 18 | 35 | 53 | 71 | 89 | 106 | 124 | 142 | 159 |
| 53° | ·79864 | ·80038 | ·80212 | ·80386 | ·80558 | ·80730 | ·80902 | 36° | 17 | 35 | 52 | 69 | 87 | 104 | 121 | 138 | 156 |
| 54° | ·80902 | ·81072 | ·81242 | ·81412 | ·81580 | ·81748 | ·81915 | 35° | 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 101 | 118 | 135 | 152 |
| 55° | 0·81915 | 0·82082 | 0·82248 | 0·82413 | 0·82577 | 0·82741 | 0·82904 | 34° | 16 | 33 | 49 | 66 | 82 | 99 | 115 | 132 | 148 |
| 56° | ·82904 | ·83066 | ·83228 | ·83389 | ·83549 | ·83708 | ·83867 | 33° | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 | 112 | 128 | 144 |
| 57° | ·83867 | ·84025 | ·84182 | ·84339 | ·84495 | ·84650 | ·84805 | 32° | 16 | 31 | 47 | 63 | 78 | 94 | 110 | 125 | 141 |
| 58° | ·84805 | ·84959 | ·85112 | ·85264 | ·85416 | ·85567 | ·85717 | 31° | 15 | 30 | 46 | 61 | 76 | 91 | 106 | 122 | 137 |
| 59° | ·85717 | ·85866 | ·86015 | ·86163 | ·86310 | ·86457 | ·86603 | 30° | 15 | 30 | 44 | 59 | 74 | 89 | 103 | 118 | 133 |
| 60° | 0·86603 | 0·86748 | 0·86892 | 0·87036 | 0·87178 | 0·87321 | 0·87462 | 29° | 14 | 29 | 43 | 57 | 72 | 86 | 100 | 114 | 129 |
| 61° | ·87462 | ·87603 | ·87743 | ·87882 | ·88020 | ·88158 | ·88295 | 28° | 14 | 28 | 42 | 55 | 69 | 83 | 97 | 111 | 125 |
| 62° | ·88295 | ·88431 | ·88566 | ·88701 | ·88835 | ·88968 | ·89101 | 27° | 13 | 27 | 40 | 54 | 67 | 81 | 94 | 108 | 121 |
| 63° | ·89101 | ·89232 | ·89363 | ·89493 | ·89623 | ·89752 | ·89879 | 26° | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 | 91 | 104 | 117 |
| 64° | ·89879 | ·90007 | ·90133 | ·90259 | ·90383 | ·90507 | ·90631 | 25° | 13 | 25 | 38 | 50 | 63 | 75 | 88 | 100 | 113 |

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65° | 0·90631 | 0·90753 | 0·90875 | 0·90996 | 0·91116 | 0·91236 | 0·91355 | 24° | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 |
| 66° | ·91355 | ·91472 | ·91590 | ·91706 | ·91822 | ·91936 | ·92050 | 23° | 12 | 23 | 35 | 46 | 58 | 70 | 81 | 93 | 104 |
| 67° | ·92050 | ·92164 | ·92276 | ·92388 | ·92499 | ·92609 | ·92718 | 22° | 11 | 22 | 33 | 45 | 56 | 67 | 78 | 89 | 100 |
| 68° | ·92718 | ·92827 | ·92935 | ·93042 | ·93148 | ·93253 | ·93358 | 21° | 11 | 21 | 32 | 43 | 53 | 64 | 75 | 85 | 96 |
| 69° | ·93358 | ·93462 | ·93565 | ·93667 | ·93769 | ·93869 | ·93969 | 20° | 10 | 20 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 81 | 92 |
| 70° | 0·93969 | 0·94068 | 0·94167 | 0·94264 | 0·94361 | 0·94457 | 0·94552 | 19° | 10 | 19 | 29 | 39 | 49 | 58 | 68 | 78 | 87 |
| 71° | ·94552 | ·94646 | ·94740 | ·94832 | ·94924 | ·95015 | ·95106 | 18° | 9 | 18 | 28 | 37 | 46 | 55 | 64 | 74 | 83 |
| 72° | ·95106 | ·95195 | ·95284 | ·95372 | ·95459 | ·95545 | ·95630 | 17° | 9 | 18 | 26 | 35 | 44 | 52 | 61 | 70 | 79 |
| 73° | ·95630 | ·95715 | ·95799 | ·95882 | ·95964 | ·96046 | ·96126 | 16° | 8 | 17 | 25 | 33 | 41 | 50 | 58 | 66 | 74 |
| 74° | ·96126 | ·96206 | ·96285 | ·96363 | ·96440 | ·96517 | ·96593 | 15° | 8 | 16 | 23 | 31 | 39 | 47 | 54 | 62 | 70 |
| 75° | 0·96593 | 0·96667 | 0·96742 | 0·96815 | 0·96887 | 0·96959 | 0·97030 | 14° | 7 | 15 | 22 | 29 | 36 | 44 | 51 | 58 | 65 |
| 76° | ·97030 | ·97100 | ·97169 | ·97237 | ·97304 | ·97371 | ·97437 | 13° | 7 | 14 | 20 | 27 | 34 | 41 | 47 | 54 | 61 |
| 77° | ·97437 | ·97502 | ·97566 | ·97630 | ·97692 | ·97754 | ·97815 | 12° | 6 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 44 | 50 | 57 |
| 78° | ·97815 | ·97875 | ·97934 | ·97992 | ·98050 | ·98107 | ·98163 | 11° | 6 | 12 | 17 | 23 | 29 | 35 | 41 | 46 | 52 |
| 79° | ·98163 | ·98218 | ·98272 | ·98325 | ·98378 | ·98430 | ·98481 | 10° | 5 | 11 | 16 | 21 | 27 | 32 | 37 | 42 | 48 |
| 80° | 0·98481 | 0·98531 | 0·98580 | 0·98629 | 0·98676 | 0·98723 | 0·98769 | 9° | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 38 | 43 |
| 81° | ·98769 | ·98814 | ·98858 | ·98902 | ·98944 | ·98986 | ·99027 | 8° | 4 | 9 | 13 | 17 | 22 | 26 | 30 | 34 | 39 |
| 82° | ·99027 | ·99067 | ·99106 | ·99144 | ·99182 | ·99219 | ·99255 | 7° | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 30 | 34 |
| 83° | ·99255 | ·99290 | ·99324 | ·99357 | ·99390 | ·99421 | ·99452 | 6° | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 23 | 26 | 30 |
| 84° | ·99452 | ·99482 | ·99511 | ·99540 | ·99567 | ·99594 | ·99619 | 5° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 85° | 0·99619 | 0·99644 | 0·99668 | 0·99692 | 0·99714 | 0·99736 | 0·99756 | 4° | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 18 | 21 |
| 86° | ·99756 | ·99776 | ·99795 | ·99813 | ·99831 | ·99847 | ·99863 | 3° | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| 87° | ·99863 | ·99878 | ·99892 | ·99905 | ·99917 | ·99929 | ·99939 | 2° | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 88° | ·99939 | ·99949 | ·99958 | ·99966 | ·99973 | ·99979 | ·99985 | 1° | | | | | | | | | |
| 89° | ·99985 | ·99989 | ·99993 | ·99996 | ·99998 | 1·00000 | 1·00000 | 0° | | | | | | | | | |
| 90° | 1·00000 | | | | | | | | | | | | | | | | |

NATURAL COSINES

## TABLE IV

## NATURAL TANGENTS

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Mean Differences | | | | | | | | |
| 0° | 0·00000 | 0·00291 | 0·00582 | 0·00873 | 0·01164 | 0·01455 | 0·01746 | 89° | 29 | 58 | 87 | 116 | 146 | 175 | 204 | 233 | 262 |
| 1° | ·01746 | ·02037 | ·02328 | ·02619 | ·02910 | ·03201 | ·03492 | 88° | 29 | 58 | 87 | 116 | 146 | 175 | 204 | 233 | 262 |
| 2° | ·03492 | ·03783 | ·04075 | ·04366 | ·04658 | ·04949 | ·05241 | 87° | 29 | 58 | 87 | 116 | 146 | 175 | 204 | 233 | 262 |
| 3° | ·05241 | ·05533 | ·05824 | ·06116 | ·06408 | ·06700 | ·06993 | 86° | 29 | 58 | 88 | 117 | 146 | 175 | 204 | 234 | 263 |
| 4° | ·06993 | ·07285 | ·07578 | ·07870 | ·08163 | ·08456 | ·08749 | 85° | 29 | 58 | 88 | 117 | 146 | 175 | 204 | 234 | 263 |
| 5° | 0·08749 | 0·09042 | 0·09335 | 0·09629 | 0·09923 | 0·10216 | 0·10510 | 84° | 29 | 59 | 88 | 118 | 147 | 176 | 206 | 235 | 265 |
| 6° | ·10510 | ·10805 | ·11099 | ·11394 | ·11688 | ·11983 | ·12278 | 83° | 29 | 59 | 88 | 118 | 147 | 176 | 206 | 235 | 265 |
| 7° | ·12278 | ·12574 | ·12869 | ·13165 | ·13461 | ·13758 | ·14054 | 82° | 30 | 59 | 89 | 118 | 148 | 178 | 207 | 237 | 266 |
| 8° | ·14054 | ·14351 | ·14648 | ·14945 | ·15243 | ·15540 | ·15838 | 81° | 30 | 59 | 89 | 119 | 149 | 178 | 208 | 238 | 267 |
| 9° | ·15838 | ·16137 | ·16435 | ·16734 | ·17033 | ·17333 | ·17633 | 80° | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 179 | 209 | 239 | 269 |
| 10° | 0·17633 | 0·17933 | 0·18233 | 0·18534 | 0·18835 | 0·19136 | 0·19438 | 79° | 30 | 60 | 90 | 120 | 151 | 181 | 211 | 241 | 271 |
| 11° | ·19438 | ·19740 | ·20042 | ·20345 | ·20648 | ·20952 | ·21256 | 78° | 30 | 61 | 91 | 121 | 152 | 182 | 212 | 242 | 273 |
| 12° | ·21256 | ·21560 | ·21864 | ·22169 | ·22475 | ·22781 | ·23087 | 77° | 31 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 244 | 275 |
| 13° | ·23087 | ·23393 | ·23700 | ·24008 | ·24316 | ·24624 | ·24933 | 76° | 31 | 62 | 92 | 123 | 154 | 185 | 216 | 246 | 277 |
| 14° | ·24933 | ·25242 | ·25552 | ·25862 | ·26172 | ·26483 | ·26795 | 75° | 31 | 62 | 93 | 124 | 155 | 186 | 217 | 248 | 279 |
| 15° | 0·26795 | 0·27107 | 0·27419 | 0·27732 | 0·28046 | 0·28360 | 0·28675 | 74° | 31 | 63 | 94 | 125 | 157 | 188 | 219 | 250 | 282 |
| 16° | ·28675 | ·28990 | ·29305 | ·29621 | ·29938 | ·30255 | ·30573 | 73° | 32 | 63 | 95 | 126 | 158 | 190 | 221 | 253 | 285 |
| 17° | ·30573 | ·30891 | ·31210 | ·31530 | ·31850 | ·32171 | ·32492 | 72° | 32 | 64 | 96 | 128 | 160 | 192 | 224 | 256 | 288 |
| 18° | ·32492 | ·32814 | ·33136 | ·33460 | ·33783 | ·34108 | ·34433 | 71° | 32 | 65 | 97 | 129 | 162 | 194 | 226 | 259 | 291 |
| 19° | ·34433 | ·34758 | ·35085 | ·35412 | ·35740 | ·36068 | ·36397 | 70° | 33 | 65 | 98 | 131 | 164 | 196 | 229 | 262 | 294 |

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 0·36397 | 0·36727 | 0·37057 | 0·37388 | 0·37720 | 0·38053 | 0·38386 | 69° | 33 | 66 | 100 | 133 | 166 | 199 | 232 | 265 | 298 |
| 21° | ·38386 | ·38721 | ·39055 | ·39391 | ·39727 | ·40065 | ·40403 | 68° | 34 | 67 | 101 | 134 | 168 | 202 | 236 | 269 | 302 |
| 22° | ·40403 | ·40741 | ·41081 | ·41421 | ·41763 | ·42105 | ·42447 | 67° | 34 | 68 | 102 | 136 | 170 | 205 | 239 | 273 | 306 |
| 23° | ·42447 | ·42791 | ·43136 | ·43481 | ·43828 | ·44175 | ·44523 | 66° | 35 | 69 | 104 | 138 | 173 | 208 | 242 | 277 | 311 |
| 24° | ·44523 | ·44872 | ·45222 | ·45573 | ·45924 | ·46277 | ·46631 | 65° | 35 | 70 | 105 | 140 | 176 | 211 | 246 | 281 | 316 |
| 25° | 0·46631 | 0·46985 | 0·47341 | 0·47698 | 0·48055 | 0·48414 | 0·48773 | 64° | 36 | 71 | 107 | 143 | 179 | 214 | 250 | 286 | 321 |
| 26° | ·48773 | ·49134 | ·49495 | ·49858 | ·50222 | ·50587 | ·50953 | 63° | 36 | 73 | 109 | 145 | 182 | 218 | 254 | 291 | 327 |
| 27° | ·50953 | ·51320 | ·51688 | ·52057 | ·52427 | ·52798 | ·53171 | 62° | 37 | 74 | 111 | 148 | 185 | 222 | 259 | 296 | 333 |
| 28° | ·53171 | ·53545 | ·53920 | ·54296 | ·54673 | ·55051 | ·55431 | 61° | 38 | 75 | 113 | 151 | 189 | 226 | 264 | 302 | 339 |
| 29° | ·55431 | ·55812 | ·56194 | ·56577 | ·56962 | ·57348 | ·57735 | 60° | 38 | 77 | 115 | 154 | 192 | 230 | 269 | 307 | 346 |
| 30° | 0·57735 | 0·58124 | 0·58513 | 0·58905 | 0·59297 | 0·59691 | 0·60086 | 59° | 39 | 78 | 118 | 157 | 196 | 235 | 274 | 313 | 353 |
| 31° | ·60086 | ·60483 | ·60881 | ·61280 | ·61681 | ·62083 | ·62487 | 58° | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 | 280 | 320 | 360 |
| 32° | ·62487 | ·62892 | ·63299 | ·63707 | ·64117 | ·64528 | ·64941 | 57° | 41 | 82 | 123 | 164 | 205 | 245 | 286 | 327 | 368 |
| 33° | ·64941 | ·65355 | ·65771 | ·66189 | ·66608 | ·67028 | ·67451 | 56° | 42 | 84 | 126 | 167 | 209 | 251 | 293 | 334 | 376 |
| 34° | ·67451 | ·67875 | ·68301 | ·68728 | ·69157 | ·69588 | ·70021 | 55° | 43 | 86 | 128 | 171 | 214 | 257 | 300 | 342 | 385 |
| 35° | 0·70021 | 0·70455 | 0·70891 | 0·71329 | 0·71769 | 0·72211 | 0·72654 | 54° | 44 | 88 | 132 | 176 | 220 | 263 | 307 | 351 | 395 |
| 36° | ·72654 | ·73100 | ·73547 | ·73996 | ·74447 | ·74900 | ·75355 | 53° | 45 | 90 | 135 | 180 | 225 | 270 | 315 | 360 | 405 |
| 37° | ·75355 | ·75812 | ·76272 | ·76733 | ·77196 | ·77661 | ·78129 | 52° | 46 | 92 | 139 | 185 | 231 | 277 | 324 | 370 | 416 |
| 38° | ·78129 | ·78598 | ·79070 | ·79544 | ·80020 | ·80498 | ·80978 | 51° | 48 | 95 | 143 | 190 | 238 | 285 | 333 | 380 | 428 |
| 39° | ·80978 | ·81461 | ·81946 | ·82434 | ·82923 | ·83415 | ·83910 | 50° | 49 | 98 | 147 | 196 | 245 | 293 | 342 | 391 | 440 |
| 40° | 0·83910 | 0·84407 | 0·84906 | 0·85408 | 0·85912 | 0·86419 | 0·86929 | 49° | 50 | 101 | 151 | 201 | 252 | 302 | 352 | 402 | 453 |
| 41° | ·86929 | ·87441 | ·87955 | ·88473 | ·88992 | ·89515 | ·90040 | 48° | 52 | 104 | 156 | 208 | 260 | 311 | 363 | 415 | 467 |
| 42° | ·90040 | ·90569 | ·91099 | ·91633 | ·92170 | ·92709 | ·93252 | 47° | 54 | 107 | 161 | 214 | 268 | 321 | 375 | 429 | 482 |
| 43° | ·93252 | ·93797 | ·94345 | ·94896 | ·95451 | ·96008 | ·96569 | 46° | 55 | 111 | 166 | 221 | 277 | 332 | 387 | 442 | 498 |
| 44° | ·96569 | ·97133 | ·97700 | ·98270 | ·98843 | ·99420 | 1·00000 | 45° | 57 | 114 | 172 | 229 | 286 | 343 | 400 | 457 | 515 |

NATURAL COTANGENTS

## NATURAL TANGENTS

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Mean Differences | | | | | | | | |
| 45° | 1·00000 | 1·00583 | 1·01170 | 1·01761 | 1·02355 | 1·02952 | 1·03553 | 44° | 59 | 118 | 178 | 237 | 296 | 355 | 414 | 474 | 533 |
| 46° | ·03553 | ·04158 | ·04766 | ·05378 | ·05994 | ·06613 | ·07237 | 43° | 61 | 123 | 184 | 246 | 307 | 368 | 430 | 491 | 553 |
| 47° | ·07237 | ·07864 | ·08496 | ·09131 | ·09770 | ·10414 | ·11061 | 42° | 64 | 127 | 191 | 255 | 319 | 382 | 446 | 510 | 573 |
| 48° | ·11061 | ·11713 | ·12369 | ·13029 | ·13694 | ·14363 | ·15037 | 41° | 66 | 132 | 199 | 265 | 332 | 397 | 463 | 530 | 596 |
| 49° | ·15037 | ·15715 | ·16398 | ·17085 | ·17777 | ·18474 | ·19175 | 40° | 69 | 138 | 207 | 276 | 345 | 413 | 482 | 552 | 620 |
| 50° | 1·19175 | 1·19882 | 1·20593 | 1·21310 | 1·22031 | 1·22758 | 1·23490 | 39° | 72 | 144 | 216 | 288 | 360 | 431 | 503 | 575 | 647 |
| 51° | ·23490 | ·24227 | ·24969 | ·25717 | ·26471 | ·27230 | ·27994 | 38° | 75 | 150 | 225 | 300 | 376 | 451 | 526 | 601 | 676 |
| 52° | ·27994 | ·28764 | ·29541 | ·30323 | ·31110 | ·31904 | ·32704 | 37° | 78 | 157 | 235 | 314 | 392 | 471 | 549 | 628 | 707 |
| 53° | ·32704 | ·33511 | ·34323 | ·35142 | ·35968 | ·36800 | ·37638 | 36° | 82 | 164 | 247 | 329 | 411 | 493 | 576 | 658 | 740 |
| 54° | ·37638 | ·38484 | ·39336 | ·40195 | ·41061 | ·41934 | ·42815 | 35° | 86 | 172 | 259 | 345 | 431 | 517 | 603 | 690 | 776 |
| 55° | 1·42815 | 1·43703 | 1·44598 | 1·45501 | 1·46411 | 1·47330 | 1·48256 | 34° | 91 | 181 | 272 | 363 | 453 | 544 | 634 | 725 | 816 |
| 56° | ·48256 | ·49190 | ·50133 | ·51084 | ·52043 | ·53010 | ·53987 | 33° | 96 | 191 | 287 | 382 | 478 | 573 | 669 | 764 | 860 |
| 57° | ·53987 | ·54972 | ·55966 | ·56969 | ·57981 | ·59002 | ·60033 | 32° | 101 | 201 | 302 | 403 | 504 | 604 | 705 | 806 | 907 |
| 58° | ·60033 | ·61074 | ·62125 | ·63185 | ·64256 | ·65337 | ·66428 | 31° | 107 | 213 | 320 | 426 | 533 | 639 | 746 | 852 | 959 |
| 59° | ·66428 | ·67530 | ·68643 | ·69766 | ·70901 | ·72047 | ·73205 | 30° | 113 | 226 | 339 | 451 | 565 | 677 | 790 | 903 | 1016 |
| 60° | 1·7321 | 1·7437 | 1·7556 | 1·7675 | 1·7796 | 1·7917 | 1·8040 | 29° | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 |
| 61° | 1·8040 | 1·8165 | 1·8291 | 1·8418 | 1·8546 | 1·8676 | 1·8807 | 28° | 13 | 25 | 38 | 51 | 64 | 77 | 89 | 102 | 115 |
| 62° | 1·8807 | 1·8940 | 1·9074 | 1·9210 | 1·9347 | 1·9486 | 1·9626 | 27° | 14 | 27 | 41 | 54 | 68 | 82 | 95 | 109 | 122 |
| 63° | 1·9626 | 1·9768 | 1·9912 | 2·0057 | 2·0204 | 2·0353 | 2·0503 | 26° | 15 | 29 | 44 | 58 | 73 | 88 | 102 | 117 | 131 |
| 64° | 2·0503 | 2·0655 | 2·0809 | 2·0965 | 2·1123 | 2·1283 | 2·1445 | 25° | 16 | 31 | 47 | 63 | 79 | 94 | 110 | 126 | 141 |

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65° | 2·1445 | 2·1609 | 2·1775 | 2·1943 | 2·2113 | 2·2286 | 2·2460 | 24° | 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 101 | 118 | 135 | 152 |
| 66° | 2·2460 | 2·2637 | 2·2817 | 2·2998 | 2·3183 | 2·3369 | 2·3559 | 23° | 18 | 37 | 55 | 73 | 92 | 110 | 128 | 146 | 165 |
| 67° | 2·3559 | 2·3750 | 2·3945 | 2·4142 | 2·4342 | 2·4545 | 2·4751 | 22° | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 119 | 139 | 159 | 179 |
| 68° | 2·4751 | 2·4960 | 2·5172 | 2·5386 | 2·5605 | 2·5826 | 2·6051 | 21° | 22 | 43 | 65 | 87 | 109 | 130 | 152 | 174 | 195 |
| 69° | 2·6051 | 2·6279 | 2·6511 | 2·6746 | 2·6985 | 2·7228 | 2·7475 | 20° | 24 | 47 | 76 | 95 | 119 | 142 | 160 | 190 | 213 |
| 70° | 2·7475 | 2·7725 | 2·7980 | 2·8239 | 2·8502 | 2·8770 | 2·9042 | 19° | 26 | 52 | 78 | 104 | 131 | 157 | 183 | 209 | 235 |
| 71° | 2·9042 | 2·9319 | 2·9600 | 2·9887 | 3·0178 | 3·0475 | 3·0777 | 18° | 29 | 58 | 87 | 116 | 145 | 174 | 202 | 231 | 260 |
| 72° | 3·0777 | 3·1084 | 3·1397 | 3·1716 | 3·2041 | 3·2371 | 3·2709 | 17° | 32 | 64 | 97 | 129 | 161 | 193 | 225 | 258 | 290 |
| 73° | 3·2709 | 3·3052 | 3·3402 | 3·3759 | 3·4124 | 3·4495 | 3·4874 | 16° | 36 | 72 | 108 | 144 | 181 | 216 | 253 | 289 | 325 |
| 74° | 3·4874 | 3·5261 | 3·5656 | 3·6059 | 3·6470 | 3·6891 | 3·7321 | 15° | 41 | 81 | 122 | 163 | 204 | 244 | 285 | 326 | 366 |
| 75° | 3·7321 | 3·7760 | 3·8208 | 3·8667 | 3·9136 | 3·9617 | 4·0108 | 14° | 46 | 93 | 139 | 185 | 232 | 278 | 325 | 371 | 418 |
| 76° | 4·0108 | 4·0611 | 4·1126 | 4·1653 | 4·2193 | 4·2747 | 4·3315 | 13° | 53 | 107 | 160 | 214 | 267 | 320 | 374 | 427 | 481 |
| 77° | 4·3315 | 4·3897 | 4·4494 | 4·5107 | 4·5736 | 4·6382 | 4·7046 | 12° | 62 | 124 | 186 | 248 | 311 | 373 | 435 | 497 | 559 |
| 78° | 4·7046 | 4·7729 | 4·8430 | 4·9152 | 4·9894 | 5·0658 | 5·1446 | 11° | 73 | 146 | 220 | 293 | 366 | 439 | 512 | 586 | 659 |
| 79° | 5·1446 | 5·2257 | 5·3093 | 5·3955 | 5·4845 | 5·5764 | 5·6713 | 10° | 88 | 175 | 263 | 350 | 438 | 526 | 613 | 701 | 788 |
| 80° | 5·6713 | 5·7694 | 5·8708 | 5·9758 | 6·0844 | 6·1970 | 6·3138 | 9° | | | | | | | | | |
| 81° | 6·3138 | 6·4348 | 6·5606 | 6·6912 | 6·8269 | 6·9682 | 7·1154 | 8° | | | | | | | | | |
| 82° | 7·1154 | 7·2687 | 7·4287 | 7·5958 | 7·7704 | 7·9530 | 8·1443 | 7° | | | | | | | | | |
| 83° | 8·1443 | 8·3450 | 8·5555 | 8·7769 | 9·0098 | 9·2553 | 9·5144 | 6° | | | | | | | | | |
| 84° | 9·5144 | 9·7882 | 10·078 | 10·385 | 10·712 | 11·059 | 11·4301 | 5° | | | | | | | | | |
| 85° | 11·430 | 11·826 | 12·251 | 12·706 | 13·197 | 13·727 | 14·301 | 4° | | | | | | | | | |
| 86° | 14·301 | 14·924 | 15·605 | 16·350 | 17·169 | 18·075 | 19·081 | 3° | | | | | | | | | |
| 87° | 19·081 | 20·206 | 21·470 | 22·904 | 24·542 | 26·432 | 28·636 | 2° | | | | | | | | | |
| 88° | 28·636 | 31·242 | 34·368 | 38·188 | 42·964 | 49·104 | 57·290 | 1° | | | | | | | | | |
| 89° | 57·290 | 68·750 | 85·940 | 114·59 | 171·89 | 343·77 | $+\infty$ | 0° | | | | | | | | | |
| 90° | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.

The cotangent of a small angle of $x'$ or the tangent of $90^\circ - x'$ is very nearly equal to 3437·7 divided by $x$.

**NATURAL COTANGENTS**

TABLE V

## LOGARITHMIC SINES

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | −∞ | 7·46373 | 7·76475 | 7·94084 | 8·06578 | 8·16268 | 8·24186 | 89° | | | | | | | | | |
| 1° | 8·24186 | 8·30879 | 8·36678 | 8·41792 | 8·46366 | 8·50504 | 8·54282 | 88° | | | | | | | | | |
| 2° | 8·54282 | 8·57757 | 8·60973 | 8·63968 | 8·66769 | 8·69400 | 8·71880 | 87° | | | | | | | | | |
| 3° | 8·71880 | 8·74226 | 8·76451 | 8·78568 | 8·80585 | 8·82513 | 8·84358 | 86° | | | | | | | | | |
| 4° | 8·84358 | 8·86128 | 8·87829 | 8·89464 | 8·91040 | 8·92561 | 8·94030 | 85° | | | | | | | | | |
| 5° | 8·94030 | 8·95450 | 8·96825 | 8·98157 | 8·99450 | 9·00704 | 9·01923 | 84° | | | | | | | | | |
| 6° | 9·01923 | 9·03109 | 9·04262 | 9·05386 | 9·06481 | 9·07548 | 9·08589 | 83° | | | | | | | | | |
| 7° | 9·08589 | 9·09606 | 9·10599 | 9·11570 | 9·12519 | 9·13447 | 9·14356 | 82° | 96 | 192 | 288 | 384 | 480 | 576 | 672 | 768 | 864 |
| 8° | 9·14356 | 9·15245 | 9·16116 | 9·16970 | 9·17807 | 9·18628 | 9·19433 | 81° | 85 | 169 | 254 | 338 | 423 | 507 | 592 | 676 | 761 |
| 9° | 9·19433 | 9·20223 | 9·20999 | 9·21761 | 9·22509 | 9·23244 | 9·23967 | 80° | 76 | 151 | 227 | 302 | 378 | 453 | 529 | 604 | 680 |
| 10° | 9·23967 | 9·24677 | 9·25376 | 9·26063 | 9·26739 | 9·27405 | 9·28060 | 79° | 68 | 136 | 204 | 272 | 341 | 409 | 477 | 545 | 613 |
| 11° | ·28060 | ·28705 | ·29340 | ·29966 | ·30582 | ·31189 | ·31788 | 78° | 62 | 124 | 186 | 248 | 310 | 373 | 435 | 497 | 559 |
| 12° | ·31788 | ·32378 | ·32960 | ·33534 | ·34100 | ·34658 | ·35209 | 77° | 57 | 114 | 171 | 228 | 285 | 342 | 399 | 456 | 513 |
| 13° | ·35209 | ·35752 | ·36289 | ·36819 | ·37341 | ·37858 | ·38368 | 76° | 53 | 105 | 158 | 210 | 263 | 316 | 368 | 421 | 473 |
| 14° | ·38368 | ·38871 | ·39369 | ·39860 | ·40346 | ·40825 | ·41300 | 75° | 49 | 98 | 147 | 195 | 244 | 293 | 342 | 391 | 440 |
| 15° | 9·41300 | 9·41768 | 9·42232 | 9·42690 | 9·43143 | 9·43591 | 9·44034 | 74° | 46 | 91 | 137 | 182 | 228 | 273 | 319 | 364 | 410 |
| 16° | ·44034 | ·44472 | ·44905 | ·45334 | ·45758 | ·46178 | ·46594 | 73° | 43 | 85 | 128 | 171 | 213 | 256 | 299 | 341 | 384 |
| 17° | ·46594 | ·47005 | ·47411 | ·47814 | ·48213 | ·48607 | ·48998 | 72° | 40 | 80 | 120 | 160 | 201 | 241 | 281 | 321 | 361 |
| 18° | ·48998 | ·49385 | ·49768 | ·50148 | ·50523 | ·50896 | ·51264 | 71° | 38 | 76 | 113 | 151 | 189 | 227 | 264 | 302 | 340 |
| 19° | ·51264 | ·51269 | ·51991 | ·52350 | ·52705 | ·53056 | ·53405 | 70° | 36 | 71 | 107 | 143 | 179 | 214 | 250 | 285 | 321 |

(Mean Differences, 0°–4°:) Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of $x$ minutes log sin $x'$ or log cos $(90° - x') = \log x + \bar{4}\cdot46373$.

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 9·53405 | 9·53751 | 9·54093 | 9·54433 | 9·54769 | 9·55102 | 9·55433 | 69° | 34 | 68 | 101 | 135 | 169 | 203 | 237 | 270 | 304 |
| 21° | ·55433 | ·55761 | ·56085 | ·56408 | ·56727 | ·57044 | ·57358 | 68° | 32 | 64 | 96 | 128 | 161 | 193 | 225 | 257 | 289 |
| 22° | ·57358 | ·57669 | ·57978 | ·58284 | ·58588 | ·58889 | ·59188 | 67° | 31 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 244 | 275 |
| 23° | ·59188 | ·59484 | ·59778 | ·60070 | ·60359 | ·60646 | ·60931 | 66° | 29 | 58 | 87 | 116 | 146 | 174 | 204 | 233 | 262 |
| 24° | ·60931 | ·61214 | ·61494 | ·61773 | ·62049 | ·62323 | ·62595 | 65° | 28 | 56 | 83 | 111 | 139 | 166 | 195 | 222 | 250 |
| 25° | 9·62595 | 9·62865 | 9·63133 | 9·63398 | 9·63662 | 9·63924 | 9·64184 | 64° | 27 | 53 | 80 | 106 | 133 | 159 | 186 | 212 | 239 |
| 26° | ·64184 | ·64442 | ·64698 | ·64953 | ·65205 | ·65456 | ·65705 | 63° | 25 | 51 | 76 | 102 | 127 | 152 | 178 | 203 | 229 |
| 27° | ·65705 | ·65952 | ·66197 | ·66441 | ·66682 | ·66922 | ·67161 | 62° | 24 | 49 | 73 | 97 | 122 | 146 | 170 | 194 | 219 |
| 28° | ·67161 | ·67398 | ·67633 | ·67866 | ·68098 | ·68328 | ·68557 | 61° | 23 | 47 | 70 | 93 | 117 | 140 | 163 | 186 | 210 |
| 29° | ·68557 | ·68784 | ·69010 | ·69234 | ·69456 | ·69677 | ·69897 | 60° | 22 | 45 | 67 | 89 | 112 | 134 | 156 | 179 | 201 |
| 30° | 9·69897 | 9·70115 | 9·70332 | 9·70547 | 9·70761 | 9·70973 | 9·71184 | 59° | 22 | 43 | 65 | 86 | 107 | 129 | 150 | 172 | 193 |
| 31° | ·71184 | ·71393 | ·71602 | ·71809 | ·72014 | ·72218 | ·72421 | 58° | 21 | 41 | 62 | 82 | 103 | 124 | 144 | 165 | 185 |
| 32° | ·72421 | ·72622 | ·72823 | ·73022 | ·73219 | ·73416 | ·73611 | 57° | 20 | 40 | 59 | 79 | 99 | 119 | 139 | 159 | 178 |
| 33° | ·73611 | ·73805 | ·73997 | ·74189 | ·74379 | ·74568 | ·74756 | 56° | 19 | 38 | 57 | 76 | 96 | 115 | 134 | 153 | 172 |
| 34° | ·74756 | ·74943 | ·75128 | ·75313 | ·75496 | ·75678 | ·75859 | 55° | 18 | 37 | 55 | 74 | 92 | 110 | 129 | 147 | 165 |
| 35° | 9·75859 | 9·76039 | 9·76218 | 9·76395 | 9·76572 | 9·76747 | 9·76922 | 54° | 18 | 35 | 53 | 71 | 89 | 106 | 124 | 142 | 159 |
| 36° | ·76922 | ·77095 | ·77268 | ·77439 | ·77609 | ·77778 | ·77946 | 53° | 17 | 34 | 51 | 68 | 86 | 103 | 120 | 137 | 154 |
| 37° | ·77946 | ·78113 | ·78280 | ·78445 | ·78609 | ·78772 | ·78934 | 52° | 17 | 33 | 50 | 66 | 83 | 99 | 116 | 132 | 149 |
| 38° | ·78934 | ·79095 | ·79256 | ·79415 | ·79573 | ·79731 | ·79887 | 51° | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 95 | 112 | 127 | 143 |
| 39° | ·79887 | ·80043 | ·80197 | ·80351 | ·80504 | ·80656 | ·80807 | 50° | 15 | 31 | 46 | 62 | 77 | 92 | 108 | 123 | 138 |
| 40° | 9·80807 | 9·80957 | 9·81106 | 9·81254 | 9·81402 | 9·81549 | 9·81694 | 49° | 15 | 30 | 44 | 59 | 74 | 89 | 104 | 118 | 133 |
| 41° | ·81694 | ·81839 | ·81983 | ·82126 | ·82269 | ·82410 | ·82551 | 48° | 14 | 29 | 43 | 57 | 72 | 86 | 100 | 114 | 129 |
| 42° | ·82551 | ·82691 | ·82830 | ·82968 | ·83106 | ·83242 | ·83378 | 47° | 14 | 28 | 41 | 55 | 69 | 83 | 97 | 110 | 124 |
| 43° | ·83378 | ·83513 | ·83648 | ·83781 | ·83914 | ·84046 | ·84177 | 46° | 13 | 27 | 40 | 53 | 67 | 80 | 93 | 106 | 120 |
| 44° | ·84177 | ·84308 | ·84437 | ·84566 | ·84694 | ·84822 | ·84949 | 45° | 13 | 26 | 38 | 51 | 64 | 77 | 90 | 102 | 115 |

**LOGARITHMIC COSINES**

## LOGARITHMIC SINES

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Mean Differences | | | | | | | | |
| 45° | 9·84949 | 9·85074 | 9·85200 | 9·85324 | 9·85448 | 9·85571 | 9·85693 | 44° | 12 | 25 | 37 | 50 | 62 | 74 | 87 | 99 | 112 |
| 46° | ·85693 | ·85815 | ·85936 | ·86056 | ·86176 | ·86294 | ·86413 | 43° | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 |
| 47° | ·86413 | ·86530 | ·86647 | ·86763 | ·86879 | ·86993 | ·87107 | 42° | 12 | 23 | 35 | 46 | 58 | 70 | 81 | 93 | 104 |
| 48° | ·87107 | ·87221 | ·87334 | ·87446 | ·87557 | ·87668 | ·87778 | 41° | 11 | 22 | 34 | 45 | 56 | 67 | 78 | 89 | 100 |
| 49° | ·87778 | ·87887 | ·87996 | ·88105 | ·88212 | ·88319 | ·88425 | 40° | 11 | 22 | 32 | 43 | 54 | 65 | 76 | 86 | 97 |
| 50° | 9·88425 | 9·88531 | 9·88636 | 9·88741 | 9·88844 | 9·88948 | 9·89050 | 39° | 10 | 21 | 31 | 42 | 52 | 62 | 73 | 83 | 94 |
| 51° | ·89050 | ·89152 | ·89254 | ·89354 | ·89455 | ·89554 | ·89653 | 38° | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 52° | ·89653 | ·89752 | ·89849 | ·89947 | ·90043 | ·90139 | ·90235 | 37° | 10 | 19 | 29 | 39 | 49 | 58 | 68 | 78 | 87 |
| 53° | ·90235 | ·90330 | ·90424 | ·90518 | ·90611 | ·90704 | ·90796 | 36° | 9 | 19 | 28 | 37 | 47 | 56 | 65 | 84 | 84 |
| 54° | ·90796 | ·90887 | ·90978 | ·91069 | ·91158 | ·91241 | ·91336 | 35° | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |
| 55° | 9·91336 | 9·91425 | 9·91512 | 9·91599 | 9·91686 | 9·91772 | 9·91857 | 34° | 9 | 17 | 26 | 35 | 44 | 52 | 61 | 70 | 78 |
| 56° | ·91857 | ·91942 | ·92027 | ·92111 | ·92194 | ·92277 | ·92359 | 33° | 8 | 17 | 25 | 34 | 42 | 50 | 59 | 67 | 76 |
| 57° | ·92359 | ·92441 | ·92522 | ·92603 | ·92683 | ·92763 | ·92842 | 32° | 8 | 16 | 24 | 32 | 41 | 49 | 57 | 65 | 73 |
| 58° | ·92842 | ·92921 | ·92999 | ·93077 | ·93154 | ·93230 | ·93307 | 31° | 8 | 16 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 62 | 70 |
| 59° | ·93307 | ·93382 | ·93457 | ·93532 | ·93606 | ·93680 | ·93753 | 30° | 8 | 15 | 23 | 30 | 37 | 45 | 52 | 60 | 67 |
| 60° | 9·93753 | 9·93826 | 9·93898 | 9·93970 | 9·94041 | 9·94112 | 9·94182 | 29° | 7 | 14 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | 64 |
| 61° | ·94182 | ·94252 | ·94321 | ·94390 | ·94458 | ·94526 | ·94593 | 28° | 7 | 14 | 21 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 |
| 62° | ·94593 | ·94660 | ·94727 | ·94793 | ·94858 | ·94923 | ·94988 | 27° | 7 | 13 | 20 | 26 | 33 | 40 | 46 | 53 | 59 |
| 63° | ·94988 | ·95052 | ·95116 | ·95179 | ·95242 | ·95304 | ·95366 | 26° | 6 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 44 | 50 | 57 |
| 64° | ·95366 | ·95427 | ·95488 | ·95549 | ·95609 | ·95668 | ·95728 | 25° | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65° | 9·95728 | 9·95786 | 9·95844 | 9·95902 | 9·95960 | 9·96017 | 9·96078 | 24° | 6 | 12 | 17 | 23 | 29 | 35 | 40 | 46 | 52 |
| 66° | ·96073 | ·96129 | ·96185 | ·96240 | ·96294 | ·96349 | ·96403 | 23° | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 33 | 38 | 44 | 50 |
| 67° | ·96403 | ·96456 | ·96509 | ·96562 | ·96614 | ·96665 | ·96717 | 22° | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 42 | 47 |
| 68° | ·96717 | ·96767 | ·96818 | ·96868 | ·96917 | ·96966 | ·97015 | 21° | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 29 | 34 | 40 | 44 |
| 69° | ·97015 | ·97063 | ·97111 | ·97159 | ·97206 | ·97252 | ·97299 | 20° | 5 | 9 | 14 | 19 | 24 | 28 | 33 | 38 | 42 |
| 70° | 9·97299 | 9·97344 | 9·97390 | 9·97435 | 9·97479 | 9·97523 | 9·97567 | 19° | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 40 |
| 71° | ·97567 | ·97610 | ·97653 | ·97696 | ·97738 | ·97779 | ·97821 | 18° | 4 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 |
| 72° | ·97821 | ·97861 | ·97902 | ·97942 | ·97982 | ·98021 | ·98060 | 17° | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 73° | ·98060 | ·98098 | ·98136 | ·98174 | ·98211 | ·98248 | ·98284 | 16° | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 22 | 26 | 30 | 34 |
| 74° | ·98284 | ·98320 | ·98356 | ·98391 | ·98426 | ·98460 | ·98494 | 15° | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 21 | 25 | 28 | 32 |
| 75° | 9·98494 | 9·98528 | 9·98561 | 9·98594 | 9·98627 | 9·98659 | 9·98690 | 14° | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 23 | 26 | 30 |
| 76° | ·98690 | ·98722 | ·98753 | ·98783 | ·98813 | ·98843 | ·98872 | 13° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 77° | ·98872 | ·98901 | ·98930 | ·98958 | ·98986 | ·99013 | ·99040 | 12° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 78° | ·99040 | ·99067 | ·99093 | ·99119 | ·99145 | ·99170 | ·99195 | 11° | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 23 |
| 79° | ·99195 | ·99219 | ·99243 | ·99267 | ·99290 | ·99313 | ·99335 | 10° | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 80° | 9·99335 | 9·99357 | 9·99379 | 9·99400 | 9·99421 | 9·99442 | 9·99462 | 9° | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 81° | ·99462 | ·99482 | ·99501 | ·99520 | ·99539 | ·99557 | ·99575 | 8° | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 82° | ·99575 | ·99593 | ·99610 | ·99627 | ·99643 | ·99659 | ·99675 | 7° | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| 83° | ·99675 | ·99690 | ·99705 | ·99720 | ·99734 | ·99748 | ·99761 | 6° | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 84° | ·99761 | ·99775 | ·99787 | ·99800 | ·99812 | ·99823 | ·99834 | 5° | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 85° | 9·99834 | 9·99845 | 9·99856 | 9·99866 | 9·99876 | 9·99885 | 9·99894 | 4° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 86° | ·99894 | ·99903 | ·99911 | ·99919 | ·99926 | ·99934 | ·99940 | 3° | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 87° | ·99940 | ·99947 | ·99953 | ·99959 | ·99964 | ·99969 | ·99974 | 2° | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 88° | ·99974 | ·99978 | ·99982 | ·99985 | ·99988 | ·99991 | ·99993 | 1° | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 89° | ·99993 | ·99995 | ·99997 | ·99998 | ·99999 | 10·00000 | 10·00000 | 0° | | | | | | | | | |
| 90° | 10·00000 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |

LOGARITHMIC COSINES

TABLE VI

## LOGARITHMIC TANGENTS

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | Mean Differences 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | $-\infty$ | 7·46373 | 7·76476 | 7·94086 | 8·06581 | 8·16273 | 8·24192 | 89° | Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of $x$ minutes $\log\tan x'$ or $\log\cot(90°-x')$ $=\log x+\bar{4}·46373$. | | | | | | | | |
| 1° | 8·24192 | 8·30888 | 8·36689 | 8·41807 | 8·46385 | 8·50527 | 8·54308 | 88° | | | | | | | | | |
| 2° | 8·54308 | 8·57788 | 8·61009 | 8·64009 | 8·66816 | 8·69453 | 8·71940 | 87° | | | | | | | | | |
| 3° | 8·71940 | 8·74292 | 8·76525 | 8·78649 | 8·80674 | 8·82610 | 8·84464 | 86° | | | | | | | | | |
| 4° | 8·84464 | 8·86243 | 8·87953 | 8·89598 | 8·91185 | 8·92716 | 8·94195 | 85° | | | | | | | | | |
| 5° | 8·94195 | 8·95627 | 8·97013 | 8·98358 | 8·99662 | 9·00930 | 9·02162 | 84° | | | | | | | | | |
| 6° | 9·02162 | 9·03361 | 9·04528 | 9·05666 | 9·06775 | 9·07858 | 9·08914 | 83° | | | | | | | | | |
| 7° | 9·08914 | 9·09947 | 9·10956 | 9·11943 | 9·12909 | 9·13854 | 9·14780 | 82° | 98 | 195 | 293 | 391 | 488 | 586 | 684 | 782 | 879 |
| 8° | 9·14780 | 9·15688 | 9·16577 | 9·17450 | 9·18306 | 9·19146 | 9·19971 | 81° | 87 | 173 | 260 | 346 | 433 | 519 | 606 | 692 | 779 |
| 9° | 9·19971 | 9·20782 | 9·21578 | 9·22361 | 9·23130 | 9·23887 | 9·24632 | 80° | 78 | 155 | 233 | 310 | 388 | 466 | 543 | 621 | 698 |
| 10° | 9·24632 | 9·25365 | 9·26086 | 9·26797 | 9·27496 | 9·28186 | 9·28865 | 79° | 71 | 141 | 212 | 282 | 354 | 420 | 494 | 564 | 635 |
| 11° | ·28865 | ·29535 | ·30195 | ·30846 | ·31489 | ·32122 | ·32747 | 78° | 65 | 129 | 194 | 259 | 323 | 388 | 453 | 518 | 582 |
| 12° | ·32747 | ·33365 | ·33974 | ·34576 | ·35170 | ·35757 | ·36336 | 77° | 60 | 120 | 179 | 239 | 299 | 359 | 419 | 478 | 538 |
| 13° | ·36336 | ·36909 | ·37476 | ·38035 | ·38589 | ·39136 | ·39677 | 76° | 56 | 111 | 167 | 222 | 278 | 334 | 389 | 445 | 500 |
| 14° | ·39677 | ·40212 | ·40742 | ·41266 | ·41784 | ·42297 | ·42805 | 75° | 52 | 104 | 156 | 208 | 261 | 313 | 365 | 417 | 469 |
| 15° | 9·42805 | 9·43308 | 9·43806 | 9·44299 | 9·44787 | 9·45271 | 9·45750 | 74° | 49 | 98 | 147 | 196 | 245 | 294 | 343 | 392 | 442 |
| 16° | ·45750 | ·46224 | ·46694 | ·47160 | ·47622 | ·48080 | ·48534 | 73° | 46 | 93 | 139 | 186 | 232 | 278 | 325 | 371 | 418 |
| 17° | ·48534 | ·48984 | ·49430 | ·49872 | ·50311 | ·50746 | ·51178 | 72° | 44 | 88 | 132 | 176 | 220 | 264 | 308 | 352 | 396 |
| 18° | ·51178 | ·51606 | ·52031 | ·52452 | ·52870 | ·53285 | ·53697 | 71° | 42 | 84 | 126 | 168 | 210 | 252 | 294 | 336 | 378 |
| 19° | ·53697 | ·54106 | ·54512 | ·54915 | ·55315 | ·55712 | ·56107 | 70° | 40 | 80 | 121 | 160 | 201 | 241 | 281 | 321 | 362 |

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 9·56107 | 9·56498 | 9·56887 | 9·57274 | 9·57658 | 9·58039 | 9·58418 | 69° | 39 | 77 | 116 | 154 | 193 | 231 | 270 | 308 | 347 |
| 21° | ·58418 | ·58794 | ·59168 | ·59540 | ·59909 | ·60276 | ·60641 | 68° | 37 | 74 | 111 | 148 | 185 | 222 | 259 | 296 | 333 |
| 22° | ·60641 | ·61004 | ·61364 | ·61722 | ·62079 | ·62433 | ·62785 | 67° | 36 | 72 | 107 | 143 | 179 | 214 | 250 | 286 | 322 |
| 23° | ·62785 | ·63135 | ·63484 | ·63830 | ·64175 | ·64517 | ·64858 | 66° | 35 | 69 | 104 | 138 | 173 | 208 | 242 | 277 | 311 |
| 24° | ·64858 | ·65197 | ·65535 | ·65870 | ·66204 | ·66537 | ·66867 | 65° | 34 | 67 | 101 | 134 | 168 | 201 | 235 | 268 | 302 |
| 25° | 9·66867 | 9·67196 | 9·67524 | 9·67850 | 9·68174 | 9·68497 | 9·68818 | 64° | 33 | 65 | 98 | 130 | 163 | 195 | 228 | 260 | 293 |
| 26° | ·68818 | ·69138 | ·69457 | ·69774 | ·70089 | ·70404 | ·70717 | 63° | 32 | 63 | 95 | 126 | 158 | 190 | 221 | 253 | 284 |
| 27° | ·70717 | ·71028 | ·71339 | ·71648 | ·71955 | ·72262 | ·72567 | 62° | 31 | 62 | 92 | 123 | 154 | 185 | 216 | 246 | 277 |
| 28° | ·72567 | ·72872 | ·73175 | ·73476 | ·73777 | ·74077 | ·74375 | 61° | 30 | 60 | 90 | 120 | 151 | 181 | 211 | 241 | 271 |
| 29° | ·74375 | ·74673 | ·74969 | ·75264 | ·75558 | ·75852 | ·76144 | 60° | 29 | 59 | 88 | 118 | 147 | 177 | 206 | 236 | 265 |
| 30° | 9·76144 | 9·76435 | 9·76725 | 9·77015 | 9·77303 | 9·77591 | 9·77877 | 59° | 29 | 58 | 87 | 116 | 144 | 173 | 202 | 231 | 260 |
| 31° | ·77877 | ·78163 | ·78448 | ·78732 | ·79015 | ·79297 | ·79579 | 58° | 28 | 57 | 85 | 113 | 142 | 170 | 198 | 227 | 255 |
| 32° | ·79579 | ·79860 | ·80140 | ·80419 | ·80697 | ·80975 | ·81252 | 57° | 28 | 56 | 84 | 112 | 139 | 167 | 195 | 223 | 251 |
| 33° | ·81252 | ·81528 | ·81803 | ·82078 | ·82352 | ·82626 | ·82899 | 56° | 28 | 55 | 83 | 110 | 137 | 165 | 192 | 220 | 247 |
| 34° | ·82899 | ·83171 | ·83442 | ·83713 | ·83984 | ·84254 | ·84523 | 55° | 27 | 54 | 81 | 108 | 136 | 162 | 190 | 217 | 244 |
| 35° | 9·84523 | 9·84791 | 9·85059 | 9·85327 | 9·85594 | 9·85860 | 9·86126 | 54° | 27 | 54 | 80 | 107 | 134 | 160 | 188 | 214 | 241 |
| 36° | ·86126 | ·86392 | ·86656 | ·86921 | ·87185 | ·87448 | ·87711 | 53° | 26 | 53 | 79 | 106 | 132 | 158 | 185 | 212 | 238 |
| 37° | ·87711 | ·87974 | ·88236 | ·88498 | ·88759 | ·89020 | ·89281 | 52° | 26 | 52 | 78 | 105 | 131 | 157 | 183 | 209 | 236 |
| 38° | ·89281 | ·89541 | ·89801 | ·90061 | ·90320 | ·90578 | ·90837 | 51° | 26 | 52 | 78 | 104 | 130 | 156 | 182 | 208 | 234 |
| 39° | ·90837 | ·91095 | ·91353 | ·91610 | ·91868 | ·92125 | ·92381 | 50° | 26 | 52 | 77 | 103 | 129 | 155 | 180 | 206 | 232 |
| 40° | 9·92381 | 9·92638 | 9·92894 | 9·93150 | 9·93406 | 9·93661 | 9·93916 | 49° | 26 | 51 | 77 | 102 | 128 | 154 | 179 | 205 | 230 |
| 41° | ·93916 | ·94171 | ·94426 | ·94681 | ·94935 | ·95190 | ·95444 | 48° | 25 | 51 | 76 | 102 | 127 | 153 | 178 | 204 | 229 |
| 42° | ·95444 | ·95698 | ·95952 | ·96205 | ·96459 | ·96712 | ·96966 | 47° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 203 | 228 |
| 43° | ·96966 | ·97219 | ·97472 | ·97725 | ·97978 | ·98231 | ·98484 | 46° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 202 | 228 |
| 44° | ·98484 | ·98737 | ·98989 | ·99242 | ·99495 | ·99747 | 10·00000 | 45° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 202 | 228 |

LOGARITHMIC COTANGENTS

# LOGARITHMIC TANGENTS

| | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Mean Differences | | | | | | | | |
| 45° | 10·00000 | 10·00253 | 10·00505 | 10·00758 | 10·01011 | 10·01263 | 10·01516 | 44° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 202 | 228 |
| 46° | ·01516 | ·01769 | ·02022 | ·02275 | ·02528 | ·02781 | ·03034 | 43° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 202 | 228 |
| 47° | ·03034 | ·03288 | ·03541 | ·03795 | ·04048 | ·04302 | ·04556 | 42° | 25 | 51 | 76 | 101 | 127 | 152 | 177 | 203 | 228 |
| 48° | ·04556 | ·04810 | ·05065 | ·05319 | ·05574 | ·05829 | ·06084 | 41° | 25 | 51 | 76 | 102 | 127 | 153 | 178 | 204 | 229 |
| 49° | ·06084 | ·06339 | ·06594 | ·06850 | ·07106 | ·07362 | ·07619 | 40° | 26 | 51 | 77 | 102 | 128 | 154 | 179 | 205 | 230 |
| 50° | 10·07619 | 10·07875 | 10·08132 | 10·08390 | 10·08647 | 10·08905 | 10·09163 | 39° | 26 | 52 | 77 | 103 | 129 | 155 | 180 | 206 | 232 |
| 51° | ·09163 | ·09422 | ·09680 | ·09939 | ·10199 | ·10459 | ·10719 | 38° | 26 | 52 | 78 | 104 | 130 | 156 | 182 | 208 | 234 |
| 52° | ·10719 | ·10980 | ·11241 | ·11502 | ·11764 | ·12026 | ·12289 | 37° | 26 | 52 | 78 | 105 | 131 | 157 | 183 | 209 | 236 |
| 53° | ·12289 | ·12552 | ·12815 | ·13079 | ·13344 | ·13608 | ·13874 | 36° | 26 | 53 | 79 | 106 | 132 | 158 | 185 | 212 | 238 |
| 54° | ·13874 | ·14140 | ·14406 | ·14673 | ·14941 | ·15209 | ·15477 | 35° | 27 | 54 | 80 | 107 | 134 | 160 | 188 | 214 | 241 |
| 55° | 10·15477 | 10·15746 | 10·16016 | 10·16287 | 10·16558 | 10·16829 | 10·17101 | 34° | 27 | 54 | 81 | 108 | 136 | 162 | 190 | 217 | 244 |
| 56° | ·17101 | ·17374 | ·17648 | ·17922 | ·18197 | ·18472 | ·18748 | 33° | 28 | 55 | 83 | 110 | 137 | 165 | 192 | 220 | 247 |
| 57° | ·18748 | ·19025 | ·19303 | ·19581 | ·19860 | ·20140 | ·20421 | 32° | 28 | 56 | 84 | 112 | 139 | 167 | 195 | 223 | 251 |
| 58° | ·20421 | ·20703 | ·20985 | ·21268 | ·21552 | ·21837 | ·22123 | 31° | 28 | 57 | 85 | 113 | 142 | 170 | 198 | 227 | 255 |
| 59° | ·22123 | ·22409 | ·22697 | ·22985 | ·23275 | ·23565 | ·23856 | 30° | 29 | 58 | 87 | 116 | 144 | 173 | 202 | 231 | 260 |
| 60° | 10·23856 | 10·24148 | 10·24442 | 10·24736 | 10·25031 | 10·25327 | 10·25625 | 29° | 29 | 59 | 88 | 118 | 147 | 177 | 206 | 236 | 265 |
| 61° | ·25625 | ·25923 | ·26223 | ·26524 | ·26825 | ·27128 | ·27433 | 28° | 30 | 60 | 90 | 120 | 151 | 181 | 211 | 241 | 271 |
| 62° | ·27433 | ·27738 | ·28045 | ·28352 | ·28661 | ·28972 | ·29283 | 27° | 31 | 62 | 92 | 123 | 154 | 185 | 216 | 246 | 277 |
| 63° | ·29283 | ·29596 | ·29911 | ·30226 | ·30543 | ·30862 | ·31182 | 26° | 32 | 63 | 95 | 126 | 158 | 190 | 221 | 253 | 284 |
| 64° | ·31182 | ·31503 | ·31826 | 32150 | ·32476 | ·32804 | ·33133 | 25° | 33 | 65 | 98 | 130 | 163 | 195 | 228 | 260 | [illegible] |

| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ | 9′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65° | 10·33133 | 10·33463 | 10·33796 | 10·34130 | 10·34465 | 10·34803 | 10·35142 | 24° | 34 | 67 | 101 | 134 | 168 | 201 | 235 | 268 | 302 |
| 66° | ·35142 | ·35483 | ·35825 | ·36170 | ·36516 | ·36865 | ·37215 | 23° | 35 | 69 | 104 | 138 | 173 | 208 | 242 | 277 | 311 |
| 67° | ·37215 | ·37567 | ·37921 | ·38278 | ·38636 | ·38996 | ·39359 | 22° | 36 | 72 | 107 | 143 | 179 | 214 | 251 | 286 | 322 |
| 68° | ·39359 | ·39724 | ·40091 | ·40460 | ·40832 | ·41206 | ·41582 | 21° | 37 | 74 | 111 | 148 | 185 | 222 | 259 | 296 | 333 |
| 69° | ·41582 | ·41961 | ·42342 | ·42726 | ·43113 | ·43502 | ·43893 | 20° | 39 | 77 | 116 | 154 | 193 | 231 | 270 | 308 | 347 |
| 70° | 10·43893 | 10·44288 | 10·44685 | 10·45085 | 10·45488 | 10·45894 | 10·46303 | 19° | 40 | 80 | 121 | 160 | 201 | 241 | 281 | 321 | 362 |
| 71° | ·46303 | ·46715 | ·47130 | ·47548 | ·47969 | ·48394 | ·48822 | 18° | 42 | 84 | 126 | 168 | 210 | 252 | 294 | 336 | 378 |
| 72° | ·48822 | ·49254 | ·49689 | ·50128 | ·50570 | ·51016 | ·51466 | 17° | 44 | 88 | 132 | 176 | 220 | 264 | 308 | 352 | 396 |
| 73° | ·51466 | ·51920 | ·52378 | ·52840 | ·53306 | ·53776 | ·54250 | 16° | 46 | 93 | 139 | 186 | 232 | 278 | 325 | 371 | 418 |
| 74° | ·54250 | ·54729 | ·55213 | ·55701 | ·56194 | ·56692 | ·57195 | 15° | 49 | 98 | 147 | 196 | 245 | 294 | 343 | 392 | 442 |
| 75° | 10·57195 | 10·57703 | 10·58216 | 10·58734 | 10·59258 | 10·59788 | 10·60323 | 14° | 52 | 104 | 156 | 208 | 261 | 313 | 365 | 417 | 469 |
| 76° | ·60323 | ·60864 | ·61411 | ·61965 | ·62524 | ·63091 | ·63664 | 13° | 56 | 111 | 167 | 222 | 278 | 334 | 389 | 445 | 500 |
| 77° | ·63664 | ·64243 | ·64830 | ·65424 | ·66026 | ·66635 | ·67253 | 12° | 60 | 120 | 179 | 239 | 299 | 359 | 419 | 478 | 538 |
| 78° | ·67253 | ·67878 | ·68511 | ·69154 | ·69805 | ·70465 | ·71135 | 11° | 65 | 129 | 194 | 259 | 323 | 388 | 453 | 518 | 582 |
| 79° | ·71135 | ·71814 | ·72504 | ·73203 | ·73914 | ·74635 | ·75368 | 10° | 71 | 141 | 212 | 282 | 354 | 420 | 494 | 564 | 635 |
| 80° | 10·75368 | 10·76113 | 10·76870 | 10·77639 | 10·78422 | 10·79218 | 10·80029 | 9° | 78 | 155 | 233 | 310 | 388 | 466 | 543 | 621 | 698 |
| 81° | ·80029 | ·80854 | ·81694 | ·82550 | ·83423 | ·84312 | ·85220 | 8° | 87 | 173 | 260 | 346 | 433 | 519 | 606 | 692 | 779 |
| 82° | ·85220 | ·86146 | ·87091 | ·88057 | ·89044 | ·90053 | ·91086 | 7° | 98 | 195 | 293 | 391 | 488 | 586 | 684 | 782 | 879 |
| 83° | ·91086 | ·92142 | ·93225 | ·94334 | ·95472 | ·96639 | ·97838 | 6° | | | | | | | | | |
| 84° | ·97838 | ·99070 | 11·00338 | 11·01642 | 11·02987 | 11·04373 | 11·05805 | 5° | | | | | | | | | |
| 85° | 11·05805 | 11·07284 | 11·08815 | 11·10402 | 11·12047 | 11·13757 | 11·15536 | 4° | Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. | | | | | | | | |
| 86° | 11·15536 | 11·17390 | 11·19326 | 11·21351 | 11·23475 | 11·25708 | 11·28060 | 3° | | | | | | | | | |
| 87° | 11·28060 | 11·30547 | 11·33184 | 11·35991 | 11·38991 | 11·42212 | 11·45692 | 2° | | | | | | | | | |
| 88° | 11·45692 | 11·49473 | 11·53615 | 11·58193 | 11·63311 | 11·69112 | 11·75808 | 1° | | | | | | | | | |
| 89° | 11·75808 | 11·83727 | 11·93419 | 12·05914 | 12·23524 | 12·53627 | +∞ | 0° | | | | | | | | | |
| 90° | +∞ | | | | | | | | | | | | | | | | |

## LOGARITHMIC COTANGENTS

# স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

## প্রথম অধ্যায়

## স্থানাঙ্ক, দূরত্ব, ক্ষেত্রফল

### 1.1. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

জ্যামিতির আলোচনা গণিতের যে শাখায় বীজগণিতের সাহায্যে করা হয় তাহাকে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বলে।

পূর্বের শ্রেণীতে লেখ অঙ্কনের সময় বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) সম্পর্কে জানিয়াছ। কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে ওই বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় বা উহার অবস্থান জানা থাকিলে তাহা হইতে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয়, ইত্যাদি সম্পর্কে তোমরা আগেই শিখিয়াছ। এখানে ইহাদের পুনরালোচনা করা হইল।

### 1.2. স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)

একটি সমতলক্ষেত্রের উপর মনে কর $OX$ ও $OY$ দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এই দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। $OX$ রেখাকে $x$-অক্ষ ($x$-axis) এবং $OY$ রেখাকে $y$-অক্ষ ($y$-axis) বলা হয়। একত্রে উহাদিগকে ভুজ-কোটি অক্ষরেখা বা অক্ষদ্বয় বলা হয়। এই রেখা দুইটির ছেদবিন্দু $O$-কে মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।

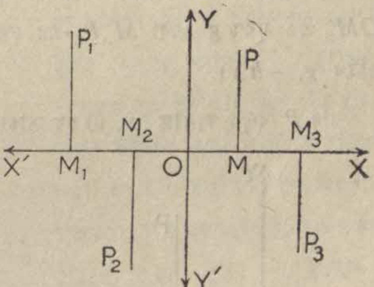


Fig. 1

একই সমতলে $P$ একটি বিন্দু লও। $OY$ রেখার সমান্তরাল করিয়া $PM$ একটি সরলরেখা টান যাহা $OX$-কে $M$ বিন্দুতে ছেদ করে। দূরত্ব $OM$-কে $P$ বিন্দুর ভুজ (abscissa) এবং দূরত্ব $PM$-কে $P$ বিন্দুর কোটি (ordinate) বলা হয়। এই দূরত্বদ্বয়কে একসঙ্গে $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়। যদি $OM = x$, $PM = y$ হয় তাহা হইলে $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এক্ষণে $XO$ রেখাকে $X'$ পর্যন্ত এবং $YO$ রেখাকে $Y'$ পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। মূলবিন্দু হইতে $OX$-এর দিকে এবং $OY$-এর দিকে লওয়া দূরত্বের

মাপগুলিকে ধনাত্মক (positive) বলিয়া ধরা হয়। আবার অপরপক্ষে মূলবিন্দু হইতে $OX'$ এবং $OY'$-এর দিকে লওয়া দূরত্বের মাপগুলিকে ঋণাত্মক (negative) বলিয়া ধরা হয়। স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে যে, $XOX'$ এবং $YOY'$ অক্ষদুইটি সম্পূর্ণ সমতলক্ষেত্রটিকে $XOY$, $YOX'$, $X'OY'$ এবং $Y'OX$ এই চারিটি ভাগে ভাগ করিয়াছে। এই চারিটি ভাগকে যথাক্রমে প্রথম পাদ (first quadrant), দ্বিতীয় পাদ (second quadrant), তৃতীয় পাদ (third quadrant) এবং চতুর্থ পাদ (fourth quadrant) বলা হয়।

$P$ বিন্দুটি প্রথম পাদে অবস্থিত। যদি $OM=a$, $PM=b$ হয়, তাহা হইলে $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(a, b)$। দ্বিতীয় পাদে $P_1$ একটি বিন্দু লও এবং $OY$ রেখার সমান্তরাল করিয়া $P_1M_1$ একটি সরলরেখা টান। মনে কর $OM_1$-এর দূরত্ব $c$ এবং $M_1P_1$-এর দূরত্ব $d$. অতএব $P_1$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(-c, d)$। আবার তৃতীয় পাদে $P_2$ একটি বিন্দু লও। $OY'$-এর সমান্তরাল করিয়া $M_2P_2$ একটি সরলরেখা টান। মনে কর $OM_2$-এর দূরত্ব $e$ এবং $M_2P_2$-এর দূরত্ব $f$. অতএব $P_2$-এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-e, -f)$। পুনরায় চতুর্থ পাদে $P_3$ আর একটি বিন্দু লও। $OY'$-এর সমান্তরাল করিয়া $M_3P_3$ সরলরেখা টান। যদি $OM_3$-এর দূরত্ব $g$ এবং $M_3P_3$-এর দূরত্ব $h$ হয়, তাহা হইলে $P_3$-এর স্থানাঙ্ক হইবে $(g, -h)$।

যদি $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ হয় তাহা হইলে,

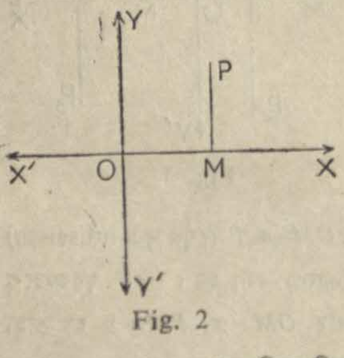



Fig. 2

(i) $y=0$, যদি $P$ বিন্দু $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়।

(ii) $x=0$, যদি $P$ বিন্দু $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়।

(iii) $x>0, y>0$, যদি $P$ বিন্দু প্রথম পাদে অবস্থিত হয়।

(iv) $x<0, y>0$, যদি $P$ বিন্দু দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হয়।

(v) $x<0, y<0$, যদি $P$ বিন্দু তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়।

(vi) $x>0, y<0$, যদি $P$ বিন্দু চতুর্থ পাদে অবস্থিত হয়।

এখানে স্পষ্টতঃই বুঝা যাইতেছে যে মূলবিন্দু $O$ এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$।

∴ $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ প্রথম পাদে $(+,+)$, দ্বিতীয় পাদে $(-,+)$, তৃতীয় পাদে $(-, -)$ এবং চতুর্থ পাদে $(+, -)$ হইবে।

যেহেতু $XOX'$ এবং $YOY'$ অক্ষ দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত সেইহেতু ওই দুইটি অক্ষকে Rectangular axes বলা হয়। উপরের আলোচিত স্থানাঙ্ক পদ্ধতিটিকে আয়তক্ষেত্রাকার কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Rectangular Cartesian Co-ordinate system) বলা হয়।

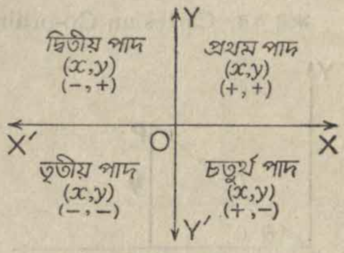


Fig. 3

**1.3. মেরুজ স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Polar Co-ordinate System):**

মনে কর, $O$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং এই $O$ বিন্দুটি হইল মূলবিন্দু। $O$ বিন্দুর মধ্য দিয়া $OX$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। একই সমতলে $P$ একটি বিন্দু লও। $OP$ যোগ কর। $P$ বিন্দুর অবস্থান জানা যাইবে যদি $\angle XOP$ এবং $OP$-এর দূরত্ব জানা থাকে। $\angle XOP$-কে ধনাত্মক ধরা হয় যদি ইহা $OX$ হইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে পরিমাপ করা হয়। দৈর্ঘ্য $OP$-কে Radius Vector বলা হয় এবং ইহাকে $r$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $\angle XOP$-কে Vertical angle বলা হয় এবং ইহাকে $\theta$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এই দুইটিকে একসঙ্গে $P$ বিন্দুর **মেরুজ স্থানাঙ্ক** (Polar Co-ordinate) বলা হয়। $P$ বিন্দুর অবস্থান $(r, \theta)$ দ্বারা সূচিত হয়।

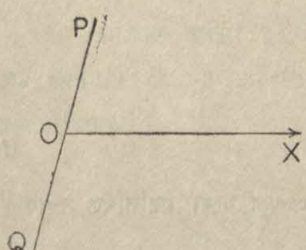


Fig. 4

Radius Vector-কে ধনাত্মক ধরা হয় যদি ইহা মূলবিন্দু $O$ হইতে $P$-এর দিকে হয় (along the line bounding the vertical angle) এবং ঋণাত্মক ধরা হয় যদি ইহা বিপরীত দিকে পরিমাপ করা হয়। যদি $P$ বিন্দুকে এমনভাবে $Q$ পর্যন্ত বর্ধিত করা হয় যেখানে $OQ = OP$ (মানের দিক্ হইতে) তাহা হইলে $Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(-r, \theta)$ বা $(r, \theta+\pi)$।

**1.4. কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক এবং মেরুজ স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় *(Relation between the Cartesian Co-ordinates and the Polar Co-ordinates)* :**

মনে কর, Cartesian Co-ordinates-এ $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ [ $OX$ অক্ষ এবং $OY$ অক্ষ অনুসারে ] এবং Polar Co-ordinates-এ $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(r, \theta)$ [ $O$ বিন্দু (Pole) এবং initial line $OX$ অনুসারে ]। $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টানা হইল। $OP$ যোগ কর। তাহা হইলে $OP = r$, $OM = x$, $PM = y$।

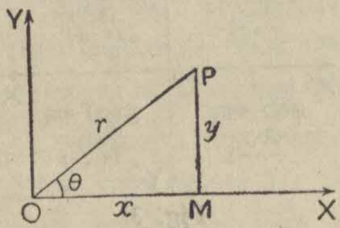



Fig. 5

$$\therefore\ x = OP \cos MOP = r \cos\theta \qquad \cdots \quad (i)$$

$$y = PM = OP \sin MOP = r \sin\theta \qquad \cdots \quad (ii)$$

$$r = OP = \sqrt{OM^2 + MP^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cdots \quad (iii)$$

(*ii*)-কে (*i*) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \cdots \quad (iv)$$

Cartesian এবং Polar Co-ordinates-এর মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি প্রতিষ্ঠিত হইল।

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \qquad \cdots \quad (v)$$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \qquad \cdots \quad (vi)$$

উপরিউক্ত (*v*) নং সম্পর্ক হইতে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক Polar Co-ordinate-এ দেওয়া থাকিলে ওই বিন্দুর Cartesian Co-ordinates-এ স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যাইবে। আবার (*vi*) নং সম্পর্ক হইতে কোন বিন্দুর কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Co-ordinates) দেওয়া থাকিলে ওই বিন্দুর মেরুজ স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates) নির্ণয় করা যাইবে।

**1.5. Rectangular Co-ordinates-এর সাহায্যে মূলবিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় (*To find the distance of a given point from the origin in terms of its Co-ordinates*) :**

মনে কর, $OX$ এবং $OY$ দুইটি Rectangular axes এবং $P$ একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$। $O$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। $P$ বিন্দু হইতে $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টান। $OP$ যোগ কর।

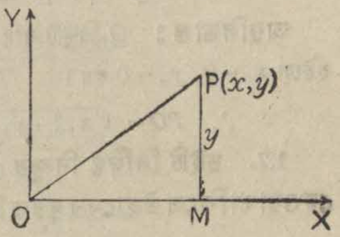


Fig. 6

যেহেতু $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$

$\therefore \quad OM = x, PM = y$

$\therefore \quad OP^2 = OM^2 + MP^2$

$\quad = x^2 + y^2$

$\therefore \quad OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**1.6. স্থানাঙ্ক দ্বারা দুইটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় (*To find the distance between the two points in terms of their Co-ordinates*) :**

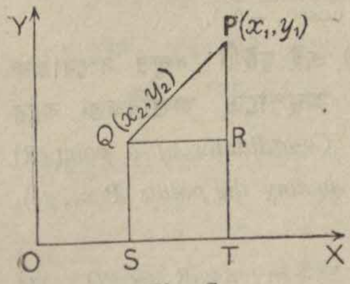


Fig. 7

মনে কর, $OX$ এবং $OY$ দুইটি Rectangular axes এবং $P$ ও $Q$ দুইটি বিন্দু। মনে কর, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$ এবং $Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_2, y_2)$। $PQ$ সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। $OX$-এর উপর $P$ ও $Q$ বিন্দু দুইটি হইতে যথাক্রমে $PT$ ও $QS$ লম্ব টানা হইল। আবার $PT$ রেখার উপর $QR$ লম্ব টান।

এখন $OT = x_1$, $OS = x_2$, $PT = y_1$, $QS = y_2$

$\therefore \quad QR = ST = OT - OS = x_1 - x_2$

$\quad PR = PT - RT = PT - QS = y_1 - y_2$

$\therefore$ $PQR$ সমকোণী ত্রিভুজে,

$$PQ^2 = QR^2 + RP^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

**অনুসিদ্ধান্ত :** $Q$ বিন্দুটি যদি মূলবিন্দু $O$-এর সহিত মিলিয়া যায় তাহা হইলে $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ হয়।

$$\therefore \quad PO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \text{ হয়।}$$

**1.7. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মেরুজ স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates) দেওয়া থাকিলে উহাদের দূরত্ব নির্ণয়** (*To find the length of a straight line joining two points whose Polar Co ordinates are given*) :

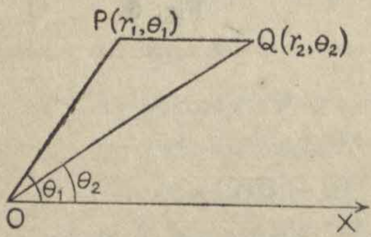



Fig. 8

মনে কর, $P$ বিন্দুর Polar Co-ordinates $(r_1, \theta_1)$ এবং $Q$ বিন্দুর Polar Co-ordinates $(r_2, \theta_2)$।

এখন $\angle QOP = \angle XOP - \angle XOQ = \theta_1 - \theta_2$

আবার $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ \cos QOP$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\therefore \quad PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

**1.8.** $P(x_1, y_1)$ **এবং** $Q(x_2, y_2)$ **এই দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু** $(R)$ $m : n$ **অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয়** (*To find the Co-ordinates of a point* $(R)$ *which internally divides the line joining the points* $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ *in the ratio* $m : n$) :

মনে কর, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু এবং $R$ বিন্দু $PQ$ রেখার উপর এইরূপে অবস্থিত যেন $PR : RQ = m : n$।

মনে কর, $R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$। $OX$ রেখার উপর $PL$, $QM$, $RN$ লম্ব টান। $OX$-এর সমান্তরাল করিয়া $PT$ টান। $PT$ রেখা $RN$-কে $S$ বিন্দুতে এবং $QM$-কে $T$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন $OL=x_1$, $OM=x_2$, $ON=x$

চিত্র হইতে আমরা পাই,

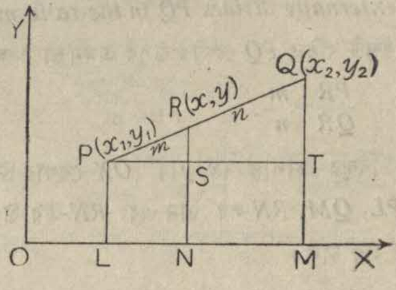



Fig. 9

$$PS=LN=ON-OL=x-x_1$$
$$RS=RN-SN=y-y_1$$
$$ST=NM=OM-ON=x_2-x$$

যেহেতু $RS$ এবং $QT$ সমান্তরাল

$$\therefore \frac{PS}{ST}=\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}$$

অর্থাৎ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\dfrac{m}{n}$

অথবা, $n(x-x_1)=m(x_2-x)$

অথবা, $(m+n)x=mx_2+nx_1$

$$\therefore x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

পুনরায় $PQT$ ত্রিভুজে যেহেতু $RS \parallel QT$

$$\therefore \frac{RS}{QT}=\frac{PR}{PQ}=\frac{PR}{PR+RQ}=\frac{m}{m+n}$$

$$\therefore \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{m}{m+n}$$

$$\therefore y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

$\therefore$ $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

**1.9. $R$ বিন্দু $PQ$ সরলরেখাকে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করিলে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয়** ***(To find the Co-ordinates of a point R which externally divides PQ in the ratio m : n) :***

মনে কর, $R$ বিন্দুটি বর্ধিত $PQ$ রেখার উপর এমনভাবে অবস্থিত যে,

$$\frac{PR}{QR}=\frac{m}{n}.$$

মনে কর, $R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$। $OX$ রেখার উপর $P, Q, R$ বিন্দু হইতে যথাক্রমে $PL, QM, RN$ লম্ব টান এবং $RN$-এর উপর $P$ ও $Q$ হইতে যথাক্রমে $PS, QT$ লম্ব টান।

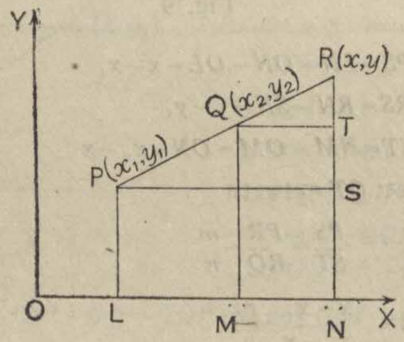



Fig. 10

এখন $PS=LN=ON-OL=x-x_1$

$QT=MN=ON-OM=x-x_2$

$RS=NR-NS=NR-PL=y-y_1$

$RT=NR-NT=NR-MQ=y-y_2$

এখন $\triangle PRS$ ও $\triangle QRT$ সদৃশ

$$\therefore \quad \frac{m}{n}=\frac{PR}{QR}=\frac{PS}{QT}=\frac{x-x_1}{x-x_2}$$

বা, $mx-mx_2=nx-nx_1$

বা, $x(m-n)=mx_2-nx_1$

$$\therefore \quad x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

পুনরায় $\frac{m}{n}=\frac{PR}{QR}=\frac{RS}{RT}=\frac{y-y_1}{y-y_2}$

বা, $my-my_2=ny-ny_1$

$\therefore\ y(m-n)=my_2-ny_1$

$\therefore\ y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$

$\therefore$ $R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

**অনুসিদ্ধান্ত :** $R$ বিন্দু $PQ$ রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে $\frac{m}{n}=1$ হয় অর্থাৎ $m=n$ হয়।

$$\therefore\ x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{m(x_2+x_1)}{2m}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}=\frac{m(y_2+y_1)}{2m}=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$\therefore$ $R$ বিন্দু $PQ$ রেখার মধ্যবিন্দু হইলে $R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$।

**1.10. ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল নির্ণয়** (*To find the area of a Trapezium*) :

মনে কর, $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়ম। উহার $AD$ এবং $BC$ বাহুদ্বয় সমান্তরাল। $AC$ যোগ কর। $BC$-এর উপর $AL$ লম্ব টান। $AD$-এর বর্ধিতাংশের উপর $C$ বিন্দু হইতে $CN$ লম্ব টান।

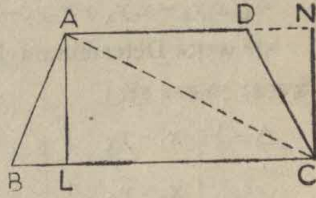



Fig. 11

$ABCD$-এর ক্ষেত্রফল $=\triangle ABC+\triangle ACD$
$=\frac{1}{2}BC\times AL+\frac{1}{2}AD\times NC$
$=\frac{1}{2}(BC+AD).AL \qquad (\because\ AL=NC)$

**1.11. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়** (*To find the area of a triangle in terms of the Co-ordinates of its vertices*) :

মনে কর, *ABC* একটি ত্রিভুজ এবং উহার কৌণিক বিন্দু তিনটি *A*, *B*, *C*-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$। *OX*-এর উপর *AL*, *BM*, *CN* লম্ব টান। মনে কর, *ABC* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা সূচিত করা হইল।

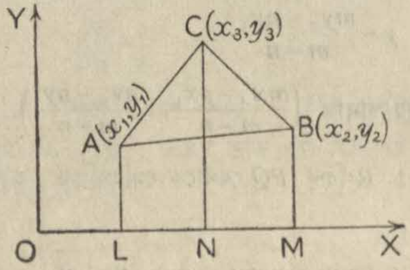



Fig. 12

*ABC* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \triangle =$ ট্রাপিজিয়ম *ALNC* + ট্রাপিজিয়ম *CNMB* − ট্রাপিজিয়ম *ALMB*

$$= \tfrac{1}{2}(AL+CN).\ LN + \tfrac{1}{2}(CN+BM).\ NM - \tfrac{1}{2}(AL+BM).\ LM$$

$$= \tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) + \tfrac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}[x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2]$$

$$= \tfrac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3]$$

যদি এখানে Determinant Notation ব্যবহার করা হয় তাহা হইলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হইবে

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

**অনুসিদ্ধান্ত :** (i) কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (0,0) $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল $\tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ হইবে।

(ii) যদি বিন্দু তিনটি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হয় তাহা হইলে $\triangle = 0$ হইবে। অর্থাৎ বিন্দু তিনটির সমরেখ হইবার শর্ত হইল $x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) = 0$

বিপরীতক্রমে $\triangle=0$ হইলে বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে। এই প্রসঙ্গে মনে রাখা দরকার যে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকক্রমে (anticlockwise) ত্রিভুজের $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ এই শীর্ষবিন্দুগুলি লইয়া ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে। যদি এইগুলিকে ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে লওয়া হয় তাহা হইলে ক্ষেত্রফলের পরিমাণ ঋণাত্মক (Negative) হইবে।

**1.12. কোন চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দু চারিটির স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়** (*To find the area of a quadrilateral in terms of the Co-ordinates of its vertices*) :

মনে কর, *ABCD* একটি চতুর্ভুজ। *A, B, C, D,* বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইল যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ এবং $(x_4, y_4)$।

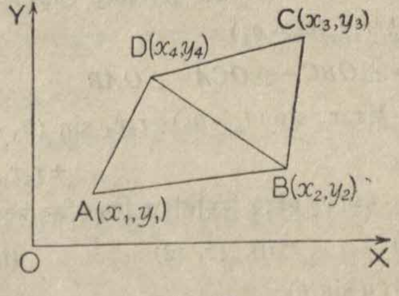



Fig. 13

$ABCD$-এর ক্ষেত্রফল $=\triangle ABD+\triangle DBC$

$$=\tfrac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_4-x_4y_2+x_4y_1-x_1y_4]$$
$$+\tfrac{1}{2}[x_4y_2-x_2y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4]$$

**1.13. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটির Polar Co-ordinates দেওয়া থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়** (*To find the area of a triangle the Co-ordinates of whose angular points are given in polar form*) :

মনে কর, *ABC* একটি ত্রিভুজ। *A, B, C* বিন্দু তিনটির Polar Co-ordinates-এ স্থানাঙ্ক হইল যথাক্রমে $(r_1,\theta_1)$, $(r_2,\theta_2)$ এবং $(r_3,\theta_3)$।

আমরা জানি $\triangle ABC = \triangle OBC + \triangle OCA - \triangle OAB$

এখন $\triangle OBC = \frac{1}{2}\ OB\ OC \sin BOC = \frac{1}{2} r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)$

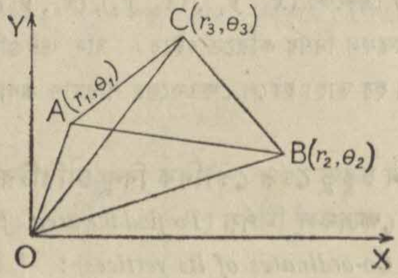



Fig. 14

$\triangle OCA = \frac{1}{2}\ OC.OA \sin COA = \frac{1}{2}\ r_2 r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\ OA.OB \sin AOB = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\theta_1 - \theta_2)$

$= -\frac{1}{2}\ r_1 r_2 (\theta_2 - \theta_1)$

$\therefore\ \triangle ABC = \triangle OBC + \triangle OCA - \triangle OAB$

$= \frac{1}{2}[r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_3 r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)$

$+ r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)]$

**উদাহরণ 1.** মূলবিন্দু হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর :

(*i*) (3, −4) (*ii*) (5, 12) (*iii*) (−7, −1)

(*iv*) $(a \cos \theta, a \sin \theta)$

(*i*) আমরা জানি মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $(OP) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25} = 5$

(*ii*) নির্ণেয় দূরত্ব $(OP) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144}$

$= \sqrt{169} = 13.$

(*iii*) নির্ণেয় দূরত্ব $(OP) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1}$

$= \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}.$

(*iv*) নির্ণেয় দূরত্ব $(OP) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}$

$= \sqrt{a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{a^2.1} = a$

**উদাহরণ 2.** নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $P(3,2)$ এবং $Q(7,5)$

(ii) $P(-3,8)$ এবং $Q(5,-7)$

(iii) $P(1,-3)$ এবং $Q(-2,1)$

(i) $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(3-7)^2+(2-5)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

(ii) $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(-3-5)^2+(8+7)^2}$

$=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17$

(iii) $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}$

$=\sqrt{25}=5.$

**উদাহরণ 3.** দেখাও যে $(3, 2)$ এবং $(-6, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

মনে কর, $P$ ও $Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 2)$ ও $(-6, -4)$ এবং $O$ মূলবিন্দু।

$OP=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$OQ=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=\sqrt{4\times13}=2\sqrt{13}$

$PQ=\sqrt{(3+6)^2+(2+4)^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$

$\therefore\ OP+OQ=\sqrt{13}+2\sqrt{13}=3\sqrt{13}=PQ$

$\therefore$ $Q, O, P$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

**উদাহরণ 4.** $x$-এর মান নির্ণয় কর যদি $(x, 2)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 8 হয়।

প্রদত্ত বিন্দু দুইটির দূরত্ব $=\sqrt{(x-3)^2+(2-4)^2}$

$\therefore\ 8=\sqrt{(x-3)^2+(2-4)^2}$

অথবা, $64=(x-3)^2+(2-4)^2$

অথবা, $64=x^2-6x+9+4$

অথবা, $x^2-6x+13-64=0$

অথবা, $x^2-6x-51=0$

$$\therefore \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36+4.1.51}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36+204}}{2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{240}}{2}=\frac{6\pm4\sqrt{15}}{2}=3\pm2\sqrt{15}$$

$\therefore \quad x=3\pm2\sqrt{15}.$

**উদাহরণ** 5. যদি $(x, y)$ বিন্দুটি $(3, 4)$ এবং $(7, -2)$ বিন্দু দুইটির সমদূরবর্তী হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $x+3y=5.$

$(x, y)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব

$=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

আবার $(x, y)$ এবং $(1, -2)$ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব

$=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

শর্তানুসারে, $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

বা, $(x-3)^2+(y-4)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$

বা, $x^2+9-6x+y^2-8y+16=x^2-2x+1+y^2+4+4y$

বা, $-4x-12y=-20$

বা, $4x+12y=20$

$\therefore \quad x+3y=5.$

**উদাহরণ** 6. $(4, 5)$ এবং $(7, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু $1:2$ এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত (dividing internally) করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(x, y)$

আমরা জানি $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

$$\therefore \quad x=\frac{1\times7+2\times4}{1+2}=\frac{7+8}{3}=\frac{15}{3}=5$$

$$y=\frac{1\times-1+2\times5}{1+2}=\frac{-1+10}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(5, 3).$

**উদাহরণ 7.** $P(3, 2)$ এবং $Q(6, 5)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে $R(9, 8)$ বিন্দু কি অনুপাতে বহির্বিভক্ত (dividing externally) করে তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় অনুপাত $= m : n$

আমরা জানি $x = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

$$y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

$$\therefore \quad 9 = \frac{m \times 6 - n \times 3}{m-n}$$

বা, $9m - 9n = 6m - 3n$

বা, $9m - 6m = 9n - 3n$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= 2 : 1$.

**মন্তব্য :** $y = \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}$ হইতেও একই অনুপাত পাওয়া যাইবে।



**উদাহরণ 8.** $P(4, 1)$ এবং $Q(10, 7)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা $R(5, 2)$ বিন্দুটিতে কি অনুপাতে বিভক্ত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় অনুপাত $= m : n$

আমরা জানি $x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$$\therefore \quad 5 = \frac{m \times 10 + n \times 4}{m+n}$$

বা, $5m + 5n = 10m + 4n$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{5}$$

$\dfrac{m}{n}$ এর মান যদি ঋণাত্মক (Negative) হয় অর্থাৎ মনে কর $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{1}{5}$ হয়, তাহা হইলে বলিতে হইবে 1 : 5 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করিয়াছে।

**উদাহরণ 9.** $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (5, 6,), (−3, −2), (1, 3) ; ওই ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$AB = \sqrt{(5+3)^2+(6+2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 4\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(-3-1)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$CA = \sqrt{(1-5)^2+(3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

**উদাহরণ 10.** $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 2), (2, 3), (-1, -2)$ ; প্রমাণ কর ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

$AB = \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$CA = \sqrt{(-1+2)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

যেহেতু $AB = AC$

$\therefore$ $ABC$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

**উদাহরণ 10.** $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$ হইলে ভরকেন্দ্র (centroid) $G$-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

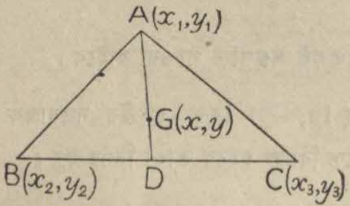


Fig. 15

$ABC$ ত্রিভুজের $BC$ বাহুর মধ্যবিন্দু $D$ লওয়া হইল। $AD$কে $G$ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করিলে $G$ বিন্দুটি $ABC$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হইবে এবং ওই বিন্দুটির ($G$) স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

$D$ বিন্দু $BC$ বাহুর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $D$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

$G$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক মনে কর $(x, y)$

$\because$ $G$-বিন্দু $AD$-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে

$$\therefore \quad x = \frac{2 \times \frac{x_2+x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \times \frac{y_2+y_3}{2} + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$\therefore$ $G$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

**উদাহরণ 11.** *ABC* ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ এবং ত্রিভুজের বাহুগুলি $a, b, c$ হইলে ওই ত্রিভুজের আন্তঃকেন্দ্রের (in-centre) স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

*ABC* ত্রিভুজের *A, B, C* বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$। মনে কর ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমদ্বিখণ্ডকগুলি *I* বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। *AI*-কে বর্ধিত করায় *BC* বাহুকে উহা *D* বিন্দুতে ছেদ করিল।

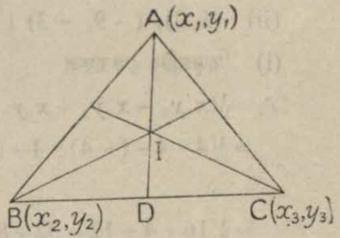



Fig. 16

মনে কর *I* বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$

আমি জানি $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$

$\therefore$ *D* বিন্দু *BC*-কে $c : b$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে।

$\therefore$ *D* বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{cx_3+bx_2}{c+b}, \frac{cy_3+by_2}{c+b}\right)$

আবার *CI* হইল $\angle BCA$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$$\therefore \frac{AI}{ID}=\frac{CA}{CD}$$

এবং *BI*, $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক,

$$\therefore \frac{AI}{ID}=\frac{BA}{BD}$$

$$\therefore \frac{AI}{ID}=\frac{CA}{CD}=\frac{BA}{BD}=\frac{CA+BA}{CD+BD}=\frac{b+c}{a}$$

$\therefore$ *I* বিন্দু *AD*-কে $(b+c) : a$ অনুপাতে বিভক্ত করিল।

$$\therefore x=\frac{(b+c).\frac{cx_3+bx_2}{(c+b)}+ax_1}{b+c+a}$$

$$y=\frac{(b+c).\frac{cy_3+by_2}{(c+b)}+ay_1}{b+c+a}$$

$\therefore$ *I* বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$।

**উদাহরণ 12.** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(i) (4, 1), (−4, 4), (8, −3)

(ii) (5, 2), (−9, −3) (−3, −5)

(i) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$\triangle = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}[4\times4-(-4)\times1+(-4)\times(-3)-8\times4+8\times1 -4\times(-3)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[16+4+12-32+8+12]$$
$$= \tfrac{20}{2} = 10.$$

(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$\triangle = \tfrac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3]$$
$$= \tfrac{1}{2}[5\times(-3)-(-9\times2)+(-9\times-5)-(-3\times-3) +(-3\times2)-(5\times-5)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[-15+18+45-9-6+25]$$
$$= \tfrac{58}{2} = 29.$$

**উদাহরণ 13.** দেখাও যে তিনটি বিন্দু $(a, 0), (0, b), (1, 1)$ সমরেখ হইবে যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।

প্রদত্ত তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবে যদি ঐ বিন্দু তিনটিকে শীর্ষবিন্দু লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে যে ত্রিভুজ হইবে তাহার ক্ষেত্রফল $\triangle=0$ হয়।

এখানে $\triangle = \frac{1}{2}\, x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$
$$= \tfrac{1}{2}[a(b-1)+0(1-b)+1(0-b)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab-a-b)$$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি $\triangle=0$ হয়

অর্থাৎ যদি $ab-a-b=0$ হয়

অর্থাৎ যদি $ab=a+b$ হয়

অর্থাৎ যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।

**উদাহরণ 14.** *ABC* ত্রিভুজের *A, B, C* বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $A(x, y)$, $B(1, 2,)$, $C(2, 1)$ এবং ক্ষেত্রফল 6 ; প্রমাণ কর যে $x+y=15$.

$$\triangle = \tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x(2-1)+1(1-y)+2(y-2)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[2x-x+1-y+2y-4]$$

এখানে $\triangle = 6$

$\therefore \quad 6=\dfrac{x+y-3}{2}$

বা, $\quad 12=x+y-3$

$\therefore \quad x+y=15.$

**উদাহরণ 15.** *ABC* ত্রিভুজের *BC* বাহুর মধ্যবিন্দু *D* হইলে প্রমাণ কর $AB^2+AC^2=2\,(AD^2+BD^2)$ ।

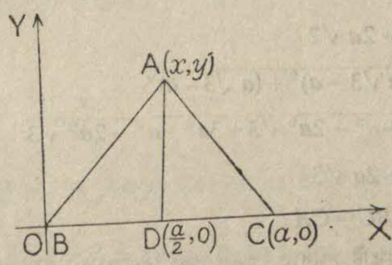



Fig. 17

*ABC* ত্রিভুজের *BC* বাহুকে *x* অক্ষ এবং *BC* বাহুর *B* বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব *BY*-কে *y* অক্ষ ধর।

আবার *B* বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং $BC=a$ ধর।

$\therefore$ *B* বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), *C* বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং *D* বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ হইবে।

আবার মনে কর, *A* বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$।

এখন $AB^2+AC^2=(x^2+y^2)+(a-x)^2+y^2$
$$=x^2+y^2+a^2+x^2-2ax+y^2$$
$$=2x^2+2y^2-2ax+a^2$$ এবং

$$2(AD^2+BD^2)=2\left[\left\{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right\}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\left[x^2+\frac{a^2}{4}-2.\frac{a}{2}.x+y^2+\frac{a^2}{4}\right]$$

$$=2\left[x^2+y^2-ax+\frac{a^2}{2}\right]$$

$$=2x^2+2y^2-2ax+a^2$$

$\therefore \quad AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2).$

**উদাহরণ 16.** দেখাও যে, $A(a, a), B(-a, -a), C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দুগুলি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

$AB=\sqrt{(a+a)^2+(a+a)^2}=\sqrt{4a^2+4a^2}=\sqrt{8a^2}=2a\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{(-a+a\sqrt{3})^2+(-a-a\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{a^2+3a^2-.a^2\sqrt{3}+a^2+3a^2+2a^2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{8a^2}=2a\sqrt{2}$

$CA=\sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2+(a\sqrt{3}-a)^2}$

$=\sqrt{3a^2+a^2+2a^2\sqrt{3}+3a^2+a^2-2a^2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{8a^2}=2a\sqrt{3}$

যেহেতু $AB=BC=CA$

$\therefore$ $ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং বিন্দুগুলি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

**উদাহরণ 17.** দেখাও যে, $(a, b), (a', b'), (a-a', b-b')$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে যদি $ab'=a'b$ হয়।

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি ঐ বিন্দু তিনটিকে শীর্ষবিন্দু ধরিয়া ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে যে ত্রিভুজ হইবে তাহার ক্ষেত্রফল $\triangle=0$ হয়।

এখন $\triangle=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$$=\frac{1}{2}[a(b'-b+b')+a'(b-b'-b)+(a-a')(b-b')]$$

$$=\frac{1}{2}[ab'-ab+ab'-a'b'+ab-a'b-ab'+a'b']$$

$$=\frac{ab'-a'b}{2}$$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি $\Delta = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $ab' - a'b = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $ab' = a'b$ হয়।

**উদাহরণ 18.** কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক Cartesian Co-ordinate-এ $(+1, +1)$ হইলে ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক Polar Co-ordinate-এ কত হইবে নির্ণয় কর।

আমরা জানি $x = r\cos\theta$

$$y = r\sin\theta$$

$\therefore\ r\cos\theta = +1$

$r\sin\theta = +1$

বা, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1^2 + 1^2 = 2$

বা, $r^2 = 2$

$\therefore\ r = \sqrt{2}$

এবং $\tan\theta = 1$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinate-এ) হইবে $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$।

**উদাহরণ 19.** কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক Cartesian Co-ordinate-এ $\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$ হইলে ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক Polar Co-ordinate-এ কত হইবে নির্ণয় কর।

এখন $x = r\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\cos 45^\circ = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$$y = r\sin\theta = r\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ বা, $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

**উদাহরণ 20.** $x^2 + y^2 = a^2$ সমীকরণটিকে Cartesian form হইতে Polar form-এ রূপান্তরিত কর।

এখানে $x^2 + y^2 = a^2$ $\quad\cdots(1)$

$\because\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$\therefore$ (1) হইতে পাই, $r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2$

বা, $r^2 = a^2$

$\therefore \ r = a$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $r = a$.

## অনুশীলনী 1

1. মূলবিন্দু হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর :—

(i) $(-5, -2)$ (ii) $(3, 4)$ (iii) $(-4, 7)$

(iv) $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ (v) $(a \cos \theta + b \sin \theta, b \cos \theta - a \sin \theta)$

(vi) $(a, -b)$.

2. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :—

(i) $(2, -1)$ এবং $(6, 8)$ (ii) $(-4, -5)$ এবং $(-8, -8)$

(iii) $(2, 8)$ এবং $(1, -5)$ (iv) $(2, 3)$ এবং $(2, -3)$

(v) $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ (vi) $(m, -n)$ এবং $(-m, n)$

(vii) $(a, b)$ এবং $(b, a)$ (viii) $(3a, 0)$ এবং $(0, 3b)$

(ix) $(b+c, c+a)$ এবং $(c+a, a+b)$

(x) $(am_1{}^2, 2am_1)$ এবং $(am_2{}^2, 2am_2)$

3. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর :—

(i) $(5, 3)$ এবং $(11, 7)$ (ii) $(a, 0)$ এবং $(0, b)$

(iii) $(a, -b)$ এবং $(-a, b)$ (iv) $(7, -4)$ এবং $(-5, 6)$

4. দেখাও যে নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যাইবে :—

(i) $(-5, 3)$ এবং $(15, -9)$ (ii) $(-3, -2)$ এবং $(-6, -4)$

(iii) $(4, 3)$ এবং $(8, 6)$ (iv) $(a-b, -c)$ এবং $(b-a, c)$

5. যদি $(x, y)$ বিন্দুটি $(4, 3)$ এবং $(-2, 4)$ বিন্দু দুইটির সমদূরবর্তী হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $12x - 2y = 5$.

6. যদি $(x, y)$ বিন্দুটি $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দু দুইটির সমদূরবর্তী হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর $ax - by = \frac{a^2 - b^2}{2}$.

7. $ABC$ ত্রিভুজের বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $A(1, 4)$, $B(4, 1)$, $C(8, 8)$ ; দেখাও যে $ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

8. $ABC$ ত্রিভুজের তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(2a, 4a)$, $B(2a, 6a)$, $C(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ ; দেখাও যে $ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

9. $ABC$ ত্রিভুজের বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $A(-2,-2)$, $B(2, 2)$, $C(4, -4)$ ; দেখাও যে $ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

10. $ABC$ ত্রিভুজের বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $A(-2,-5)$, $B(4,-1)$, $C(-1, 0)$ ; দেখাও যে $ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

11. $ABC$ ত্রিভুজের বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $A(5, 1)$, $B(-3, 7)$, $C(8, 5)$ ; দেখাও যে $ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

12. দেখাও যে $(-7, 3)$ এবং $(14, -16)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া অতিক্রম করে।

13. প্রমাণ কর যে $A(2,-2)$, $B(8, 4)$, $C(5, 7)$, $D(-1, 1)$ বিন্দুগুলি লইয়া যে চতুর্ভুজ হইবে সেটি একটি আয়তক্ষেত্র (Rectangle)।

14. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হয় তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

(i) $(7, -5)$ এবং $(-2, 7)$, অনুপাত $5 : 4$ ( অন্তর্বিভক্ত )

(ii) $(1, 3)$ এবং $(2, 7)$, অনুপাত $3 : 4$ ( অন্তর্বিভক্ত )

(iii) $(4, 5)$ এবং $(7, -1)$, অনুপাত $1 : 2$ ( অন্তর্বিভক্ত )

(iv) $(-1, 2)$ এবং $(4, -5)$, অনুপাত $2 : 3$ ( বহির্বিভক্ত )

(v) $(1, 3)$ এবং $(4, 6)$, অনুপাত $2 : 1$ ( বহির্বিভক্ত )

(vi) $(-2, 2)$ এবং $(6, 4)$, অনুপাত $3 : 1$ ( বহির্বিভক্ত )

15. $P(3, 5)$ এবং $Q(2, 7)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে $R(\frac{12}{5}, \frac{31}{5})$ কি অনুপাতে বিভক্ত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

16. $P$ ও $Q$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 10)$ এবং $(10, y)$ এবং $PQ^2 = 50$ হইলে $y$-এর মান নির্ণয় কর।

17. $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 0)$, $(0, 4)$ এবং $(2, 0)$। $BC$-এর মধ্যবিন্দু $D$ হইলে $AD$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

18. $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 0)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$ হইলে ঐই ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

19. $P, A, B$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $P(x, y), Q(-2, 0), B(2, 0)$ হইলে $PA$ ও $PB$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

যদি $PA=PB$ হয় তাহা হইলে $x$ ও $y$-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

20. $ABC$ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

(i) $A(0, 4), B(3, 6), C(-8, 2)$

(ii) $A(3, 5), B(-2, 4), C(5, 2)$

(iii) $A(a, b+c), B(a, b-c), C(-a, c)$

(iv) $A(3, 4), B(-4, 3), O(8, -6)$

(v) $A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right), C\left(c, \frac{1}{c}\right)$

(vi) $A(am^2, 2am_1), B(am_2{}^2, 2am_2), C(am_3{}^2, 2am_3)$

(vii) $A(0, 0,), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$

21. দেখাও যে $(1, 4), (3, -2), (-3, -16)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে।

22. দেখাও যে $(3a, 0), (0, 3b), (a, 2b)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে।

23. দেখাও যে $P(a, b+c), Q(b, c+a), R(c, a+b)$ বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

24. দেখাও যে $(1, 4), (3, -2), (-3, 16)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে।

25. কোন্ শর্তে $(a, b), (a', b'), (a-a', b-b')$ বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে ?

26. $ABC$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (centroid) $G$ নির্ণয় কর যাহার শীর্ষবিন্দু-গুলির স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে :

(i) $A(-1, 2), B(2, 1), C(5, 3)$

(ii) $A(2, 1), B(-6, -3), C(-8, -4)$

27. $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$ এবং $BC$-এর মধ্যবিন্দু $D$. $AD$-কে $G$ বিন্দুতে এমনভাবে বিভক্ত করা হইয়াছে যাহাতে $AG=2GD$ হয়। $G$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

28. $ABCD$ চতুর্ভুজের $A, B, C, D$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $A(-1, 6)$ $B(-3, -9), C(5, -8), D(3, 9)$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

29. $ABC$ ত্রিভুজের $G$ হইল ভরকেন্দ্র। $A$ ও $B$-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3), (-9, 7)$ এবং $G$-এর স্থানাঙ্ক $(1, 4)$। $C$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

30. $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক Cartesian Co ordinate-এ $(-\sqrt{3}, 1)$। এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক Polar Co-ordinate-এ কত হইবে নির্ণয় কর।

31. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যদি ওই ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(1, 30°), (2, 60°), (3, 90°)$ হয়।

32. $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক ( Polar Co-ordinate-এ ) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$; ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক Cartesian Co-ordinate-এ কত হইবে নির্ণয় কর।

33. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, Polar সমীকরণটিকে Cartesian সমীকরণে নির্ণয় কর।

34. $x^2 + y^2 = 2ax$, Cartesian সমীকরণটিকে Polar সমীকরণে রূপান্তরিত কর।

35. $ABC$ ত্রিভুজের $A, B, C$ বিন্দু তিনটি স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$। $BC$ বাহু $P$ বিন্দুতে $n : m$ বিন্দুতে বিভক্ত হয় এবং $AP$, $G$ বিন্দুতে $m+n : l$ অনুপাতে বিভক্ত হয়। দেখাও যে $G$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{lx_1 + mx_2 + nx_3}{l+m+n}, \frac{ly_1 + my_2 + ny_3}{l+m+n}\right)$$

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## সঞ্চারপথ (Locus)

2.1. **সঞ্চারপথ ও ইহার সমীকরণ** (**Locus and its equation**) **:**

যদি কোন বিন্দু এক অথবা একের অধিক শর্ত মানিয়া গতিশীল হয় তাহা হইলে তাহার গতিপথকে উহার **সঞ্চারপথ** বলে।

মনে কর, $O$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ তলে $P$ আর একটি বিন্দু। এখন $P$ বিন্দুটি এমনভাবে গতিশীল হইল যে $O$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব সব সময় সমান থাকে। ($O$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব সবসময় $a$ মনে কর।) ইহা স্পষ্ট যে গতিশীল বিন্দুর সমস্ত অবস্থাগুলি একটি বৃত্তের পরিধির উপর থাকে। $O$ হইল বৃত্তের কেন্দ্র এবং $a$ হইল ব্যাসার্ধ। যখন $P$ বিন্দু এইভাবে নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত থাকিয়া গতিশীল হয় তখন বৃত্তের পরিধি হইল $P$ বিন্দুর সঞ্চারপথ।

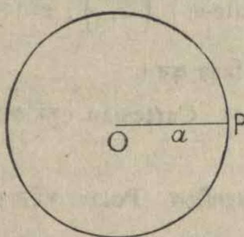


Fig. 18

বিন্দুটি যে শর্তানুযায়ী চলিতে থাকে তাহাকে জ্যামিতিক ভাষায় প্রকাশ না করিয়া উহার স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কোন শর্ত যখন স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশিত হয় তখন তাহাকে ঐ সঞ্চারপথের সমীকরণ বলে। $P$ বিন্দু গতিশীল হইয়া যে লেখটি উৎপন্ন হয় তাহার উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক ঐ লেখটির সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং বিপরীতক্রমে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা যদি লেখটির সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাহা হইলে ওই বিন্দু তখন ঐ লেখর উপর অবস্থিত হইবে।

মনে কর, $AB$ ও $CD$ দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা। $P$ বিন্দুটি যদি এমন ভাবে গতিশীল হয় যে ঐ দুইটি সরলরেখা হইতে উহার দূরত্ব সব সময় সমান হয় তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে ঐ দুইটি রেখার অন্তর্ভূ্ক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

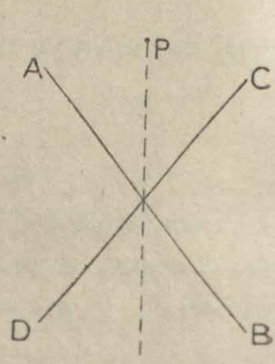


Fig. 19

**2.2. সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় ( স্থানাঙ্ক দ্বারা ) ঃ**

মনে কর, $P$ বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হইতেছে যে $P$ বিন্দুর যে-কোন অবস্থানে $OX$ হইতে $P$-এর দূরত্ব $OY$ হইতেও $P$-এর দূরত্বের সমান।

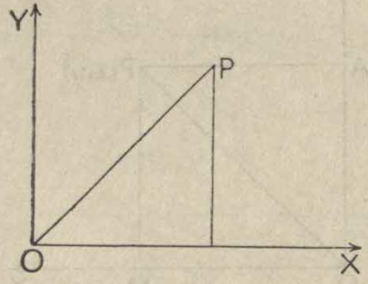



Fig. 20

মনে কর, গতিশীল বিন্দুর $P(x, y)$ হইল একটি অবস্থান। যেহেতু $P$ হইতে $OX$-এর দূরত্ব এবং $P$ হইতে $OY$-এর দূরত্ব সমান, অতএব এক্ষেত্রে $x=y$ হইবে। $P$ বিন্দুর যে-কোন অবস্থানেও তাহার ভুজ তাহার কোটির সমান বলিয়া $x=y$ হইবে।

∴ P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x=y$ হইবে।

**2.3. কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য কয়েকটি নিয়ম।**

(i) শর্ত প্রকাশ করিয়া চিত্র আঁক।

(ii) গতিশীল বিন্দুর যে-কোন একটি অবস্থানের স্থানাঙ্ক $P(x, y)$ লও।

(iii) $x$ ও $y$ দ্বারা প্রদত্ত শর্তটি লেখ এবং সরল কর।

**উদাহরণ 1.** নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে $P(x, y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y$ অক্ষ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব 2

(ii) মূলবিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব 4.

(i) মনে কর, গতিশীল $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$ ; $y$ অক্ষ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব 2। $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টান।

$PA=OM=2$

∴ $M$-এর স্থানাঙ্ক $(2, 0)$

$OP^2 = x^2 + y^2$
$OM^2 = 4$
$PM^2 = \sqrt{(2-x)^2 + y^2} = \sqrt{4 + x^2 - 4x + y^2}$

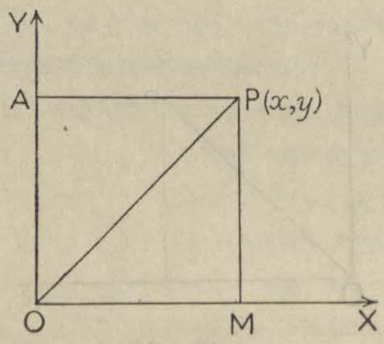



Fig. 21

$OP^2 = OM^2 + PM^2$

বা, $x^2 + y^2 = 4 + 4 + x^2 - 4x + y^2$

$\therefore \quad x = 2$ হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) মনে কর, গতিশীল $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$। $O$ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব 4।

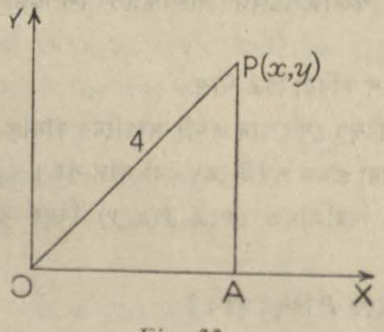



Fig. 22

$OX$-এর উপর $PA$ লম্ব টান।

$OP^2 = OA^2 + AP^2$

বা $16 = x^2 + y^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 16$ হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**উদাহরণ 2.** যদি (1, 2) বিন্দু হইতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $y$-অক্ষ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্বের সমান হয় তাহা হইলে $P$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

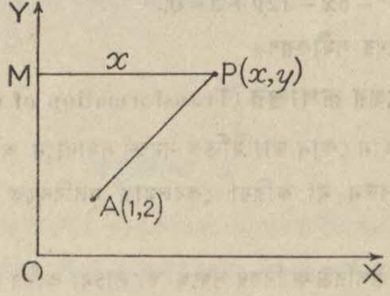



Fig. 23

এখন, $AP= \sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}$

$y$-অক্ষ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব $x$

$\therefore \quad x= \sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}$

যেহেতু $AP=PM$

$\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}=x$

বা, $x^2=1+x^2-2x+4+y^2-4y$

বা, $y^2-4y-2x+5=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=y^2-4y-2x+5=0.$

**উদাহরণ 3.** $A(1, 2)$ বিন্দু হইতে একটি বিন্দুর ($P$) দূরত্ব $y$-অক্ষ হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বের সমান। ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$AP= \sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}$

$y$-অক্ষ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব $=x$

শর্তানুসারে, $x^2=(1-x)^2+(2-y)^2$

বা, $x^2=1+x^2-2x+4+y^2-4y$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=y^2-4y-2x+5=0.$

**উদাহরণ 4.** যদি $P(x, y)$ বিন্দু হইতে $A(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব $PA$, $P$ বিন্দু হইতে $B(3, 4)$ বিন্দুর দূরত্ব $PB$ এবং $PA^2+PB^2=25$ হয় তাহা হইলে $P$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

শর্তানুসারে, $PA^2+PB^2=25$

বা, $\{(x-1)^2+(y-2)^2\}+\{(x-3)^2+(y-4)^2\}=25$

বা, $2x^2+2y^2-8x-12y+5=0.$

ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

## 2.4. স্থানাঙ্কের রূপান্তর (Transformation of Co-ordinates):

অনেক সময় কোন কোন জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে অক্ষ দুইটির দিকের (direction) পরিবর্তন না করিয়া কেবলমাত্র মূলবিন্দুকে স্থানান্তরিত করিয়া সমাধান করা হয়।

আমরা এখানে উপরিউক্ত বিষয় সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

মনে কর $OX$ এবং $OY$ আদি অক্ষদ্বয় এবং $O$ মূলবিন্দু। আবার মনে কর $O'X'$ এবং $O'Y'$ নূতন অক্ষদ্বয় ($O'X'$ অক্ষ $OX$-এর সহিত সমান্তরাল এবং

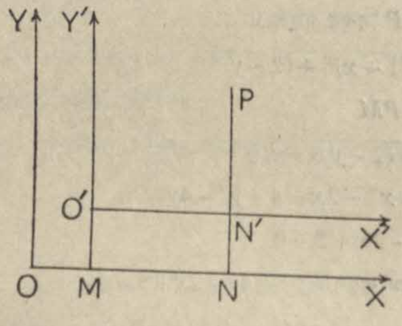



Fig. 24

$O'Y'$ অক্ষ $OY$-এর সহিত সমান্তরাল করিয়া পরিবর্তিত হইল) এবং $O'$ ইহাদের নূতন মূলবিন্দু। মনে কর আদি অক্ষদ্বয় ($OX$ ও $OY$) সাপেক্ষে নূতন মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $(h, k)$। মনে কর একই সমতলে অবস্থিত $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক আদি অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে $(x, y)$ এবং নূতন অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে $(x', y')$।

$OX$-এর উপর $PN$ লম্ব টানা হইল, এই লম্ব $O'X'$-কে $N'$ বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore \quad x=ON=OM+MN=OM+O'N'=h+x'$

$\quad y=PN=PN'+N'N=PN'+O'M=O'M+PN'=k+y'$

যেহেতু $OM=h$, $O'M=k$, $O'N'=x'$, $PN'=y'$.

এখানে দেখা যাইতেছে যে $x$-এর স্থলে $(h+x')$ এবং $y$-এর স্থলে $(k+y')$ হয়। অর্থাৎ যদি $(x, y)$ স্থানাঙ্কের স্থলে $(h+x', k+y')$ বসানো হয় তাহা হইলে আদি মূলবিন্দুটি $(h, k)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়।

## অনুশীলনী 2

1. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে $P(x, y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) $A(-1, 2)$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব, $B(4, 4)$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্বের সমান।

(ii) $A(3, 4)$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব, $B(5, 6)$ বিন্দু হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্বের সমান।

(iii) $A(a+b, a-b)$ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব, $B(a-b, a+b)$ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্বের সমান।

(iv) $A(2, 2)$ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব, $y=4$ রেখা হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্বের সমান।

2. $P(x, y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যদি $A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 0)$ এবং $B$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 0)$ হয় এবং $PA^2+PB^2=68$ হয়।

3. $P(x, y)$ এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যদি $A$-এর স্থানাঙ্ক $(3, 0)$ এবং $B$-এর স্থানাঙ্ক $(0, 2)$ এবং $PA=3PB$.

4. $P(x, y)$ এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যদি $PA=2PB$ হয় যেখানে $A$-এর স্থানাঙ্ক $(5, 3)$ এবং $B$-এর স্থানাঙ্ক $(-1, 2)$ হয়।

5. $P(x, y)$ এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যদি $\frac{PA}{PB}=\frac{2}{1}$ হয় যেখানে $A$-এর স্থানাঙ্ক $(8, 0)$ এবং $B$-এর স্থানাঙ্ক $(2, 0)$।

6. $P(x, y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যদি $P$ হইতে $OX$-এর দূরত্ব $-$ $P$ হইতে $OY$-এর দূরত্ব $=2$ হয়।

7. প্রমাণ কর যে $P(x, y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $4x+2y=3$ যদি $PA=PB$ হয় এবং যেখানে $A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 0)$ এবং $B$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -2)$।

# তৃতীয় অধ্যায়

## সরলরেখা (The Straight Line)

### 3. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় :

**3.1. কোন অক্ষের সমান্তরাল এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a straight line which is parallel to one of the Co-ordinate axes*) :

মনে কর, $AB$ সরলরেখা $y$-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x$-অক্ষকে $B$ বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর $OB = a$ এবং $AB$ এর উপর $P(x, y)$ একটি চলমান বিন্দু।

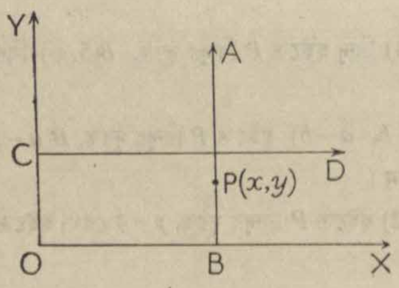



Fig. 25

$AB$-এর উপর $P$-এর যে-কোন অবস্থানে উহার কোটি (ordinate) যাহাই হউক না কেন উহার ভুজ (abscissa) সব সময় $a$ হইবে।

অতএব $x = a$ হইবে $AB$ সরলরেখার সমীকরণ।

আবার মনে কর $CD$ সরলরেখা $x$-অক্ষের সমান্তরাল এবং $y$ অক্ষকে $C$ বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর $OC = b$। $CD$ রেখার উপর যে-কোন বিন্দু লওয়া হউক না কেন $CD$-র উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি (ordinate $y$) $b$ হইবে।

অতএব $y = b$ হইবে $CD$ সরলরেখার সমীকরণ।

$a$ ধনাত্মক হইলে $x = a$ রেখাটি $y$-অক্ষের ডানদিকে এবং ঋণাত্মক হইলে $y$-অক্ষের বামদিকে থাকিবে।

$b$ ধনাত্মক হইলে $y = b$ রেখাটি $x$-অক্ষের উপরে এবং ঋণাত্মক হইলে $x$-অক্ষের নীচে থাকিবে।

(i) $x=4$ হইল এমন একটি সরলরেখা যাহা $y$-অক্ষের ডানদিকে অবস্থিত, $y$-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে 4 একক দূরে অবস্থিত।

(ii) $x=-4$ হইল এমন একটি সরলরেখা যাহা $y$-অক্ষের বামদিকে অবস্থিত, $y$-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে বামদিকে 4 একক দূরে অবস্থিত।

(iii) $y=4$ হইল এমন একটি সরলরেখা যাহা $x$-অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত, $x$-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে 4 একক দূরে অবস্থিত।

(iv) $y=-4$ হইল এমন একটি সরলরেখা যাহা $x$-অক্ষের নীচের দিকে অবস্থিত, $x$-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে নীচের দিকে 4 একক দূরে অবস্থিত।

**অনুসিদ্ধান্ত:** $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর কোটি ($y$) যাহাই হউক না কেন উহার ভুজ ($x$) সব সময় শূন্য হইবে। অতএব $x=0$ হইবে $y$-অক্ষের সমীকরণ। আবার $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ ($x$) যাহাই হউক না কেন উহার কোটি ($y$) সব সময় শূন্য হইবে।

$\therefore$ $y=0$ হইবে $x$-অক্ষের সমীকরণ।

আবার $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূজ ($x$) যাহাই হউক না কেন উহার কোটি ($y$) সব সময় শূন্য হইবে।

$\therefore$ $y=0$ হইবে $x$-অক্ষের সমীকরণ।

### 3.2. সরলরেখার প্রবণতা *(Gradient of a Straight line)* :

কোন সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে উহার tangent-কে ওই সরলরেখার প্রবণতা (gradient) বলে।

মনে কর, $OX$ এবং $OY$ দুইটি লম্ব অক্ষ। অর্থাৎ $OX$ হইল $x$-অক্ষ এবং $OY$ হইল $y$-অক্ষ।

$P(x, y)$ যে-কোনএকটি বিন্দু লও এবং $OP$ যোগ কর। মনে কর, $OP$ রেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\angle MOP$ $(=\theta)$ উৎপন্ন করিয়াছে। $P$ বিন্দু হইতে $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টান।

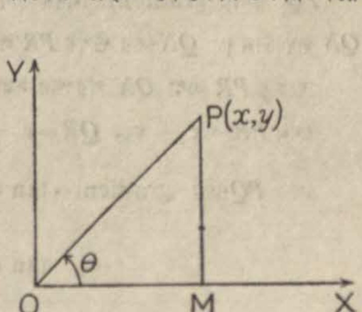



Fig. 26

এখন $OM = x$, $PM = y$ হইল।

$\therefore$ $OP$ রেখার gradient $= \tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{y}{x}$

যদি $\tan\theta = m$ ধরা হয়, তাহা হইলে $OP$-এর gradient $= m = \dfrac{y}{x}$ হইবে।

## দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয়

***(To find the gradient of the straight line joining two points) :***

মনে কর, $AB$ সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণ করিয়াছে এবং $AB$ রেখার উপর $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

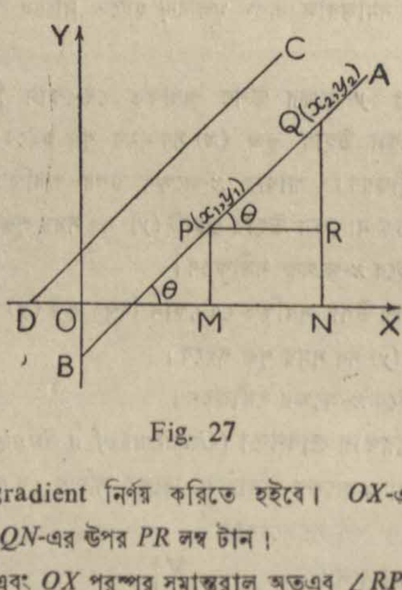



Fig. 27

$PQ$ রেখার gradient নির্ণয় করিতে হইবে। $OX$-এর উপর $PM$ এবং $QN$ লম্ব টান। $QN$-এর উপর $PR$ লম্ব টান।

যেহেতু $PR$ এবং $OX$ পরস্পর সমান্তরাল অতএব $\angle RPQ = \theta$.

এখন $PR = x_2 - x_1$, $QR = y_2 - y_1$

$\therefore$ $PQ$-এর gradient $= \tan\theta = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\text{বা,}\quad \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ইহাই হইল নির্ণেয় প্রবণতা (gradient)।

**3.3. তিনটি বিন্দুর সমরেখ হইবার শর্ত (gradient-এর সাহায্যে) :**

মনে কর, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, এবং $R(x_3, y_3)$ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $P, Q, R$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি $PQ$ রেখার gradient এবং $QR$ রেখার gradient পরস্পর সমান হয়।

এখন $PQ$-এর gradient $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$QR$-এর gradient $= \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

$P, Q, R$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে যদি $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $x_3(y_2 - y_1) - x_2(y_2 - y_1) = x_2(y_3 - y_2) - x_1(y_3 - y_2)$,

অর্থাৎ যদি $x_1(y_3 - y_2) - x_2(y_2 - y_1) + x_3(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_2) = 0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ হয়।

ইহাই হইল নির্ণেয় শর্ত।

**3.4. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা y-অক্ষ হইতে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে** *(To find the equation of a straight line which cuts of a given intercept on the axis of y and makes a given angle with positive direction of x axis.)*

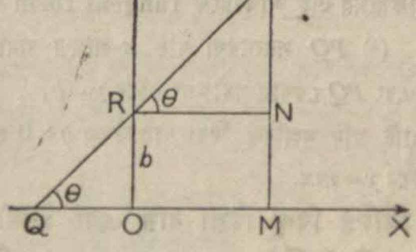



Fig. 28

মনে কর, $PQ$ সরলরেখা $y$-অক্ষ হইতে $OR = b$ অংশ ছিন্ন করিয়াছে এবং $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণ করিয়াছে। মনে কর, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ এবং $R$ হইতে $PM$-এর উপর $RN$ লম্ব টান।

এখন $\angle NRP=\theta, RN=x,\ PM=y,\ OR=MN=b$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{PN}{RN}=\frac{PM-NM}{RN}=\frac{y-b}{x}$$

বা, $\tan\theta=\dfrac{y-b}{x}$

বা, $m=\dfrac{y-b}{x}$ [ এখানে $\tan\theta=m$ ]

বা, $mx=y-b$

$\therefore\ y=mx+b$ হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**অন্য প্রকার প্রমাণ ঃ**

$$PM=PN+NM$$

বা, $y=\dfrac{PN}{RN}.RN+NM$

বা, $y=\tan\theta.x+b$

$\therefore\ y=mx+b.$

**মন্তব্য ঃ** (i) *PQ* রেখা *y*-অক্ষকে ধনাত্মক দিকে ছেদ করিয়াছে। যদি *PQ* রেখা *y*-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে ছেদ করে তাহা হইলে *b* ঋণাত্মক হইবে এবং মূলবিন্দুতে ছেদ করিলে $b=0$ হইবে।

(ii) এখানে $\theta$ কোণটিকে সূক্ষ্মকোণ ধরা হইয়াছে বলিয়া $\tan\theta$-কে ধনাত্মক ধরা হইয়াছে। যদি $\theta$ কোণটিকে স্থূলকোণ ধরা হয় তাহা হইলে $\tan\theta$-কে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

সরলরেখার সমীকরণের এই আকারকে **Tangent form** বলে।

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** (i) *PQ* সরলরেখা যদি *x*-অক্ষের সমান্তরাল হয় তাহা হইলে $\theta=0$ হইবে এবং *PQ* রেখার সমীকরণ হইবে $y=b$.

(ii) *PQ* রেখাটি যদি মূলবিন্দু দিয়া যায় তখন $b=0$ হইবে এবং *PQ* রেখার সমীকরণ হইবে $y=mx$.

**3.5. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণ করে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় (*To find the equation of a straight line which passes through a given point and is inclined at a given angle with the positive direction of x-axis.*)**

মনে কর, $AB$ সরলরেখা $Q(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণ করে। মনে কর, $P(x, y)$, $AB$ রেখার উপর যে-কোন একটি বিন্দু। $P$ হইতে $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টান এবং $Q$ হইতে $PM$-এর উপর $QN$ লম্ব টান।

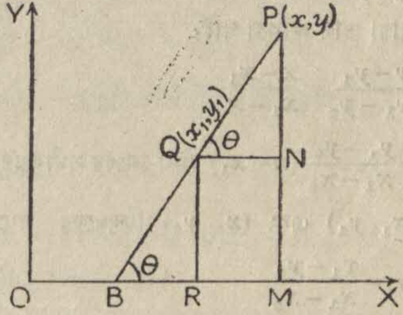



Fig. 29

এখানে যেহেতু $QN \parallel BM \quad \therefore \angle NQP = \theta$

এখন $PN = PM - NM = y - y_1$ এবং $QN = x - x_1$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

বা, $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ [ এখানে $\tan\theta = m$ ]

বা, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$ হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**3.6. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়** ***(To find the equation of a straight line passing through two given points) :***

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$। এই দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ মনে কর $y = mx + b$ ( এখানে $m$ এবং $b$ অজ্ঞাত রাশি )। ... (1)

যেহেতু বিন্দু দুইটি ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত, অতএব বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক দ্বারা $y = mx + b$ সিদ্ধ হইবে।

$$y_1 = mx_1 + b \quad \cdots \quad (2)$$

$$y_2 = mx_2 + b \quad \cdots \quad (3)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots \quad (4)$$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$y_1-y_2=m(x_1-x_2) \quad \cdots \quad (5)$$

(4) কে (5) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

$\therefore\ y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$ হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার gradient হইল $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

**3.7. যে সরলরেখা অক্ষ দুইটি হইতে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of a straight line which cuts of given intercepts from the axes of co-ordinates)* :

মনে কর, $AB$ সরলরেখা $x$-অক্ষকে $A$ বিন্দুতে এবং $y$-অক্ষকে $B$ বিন্দুতে ছেদ করে।

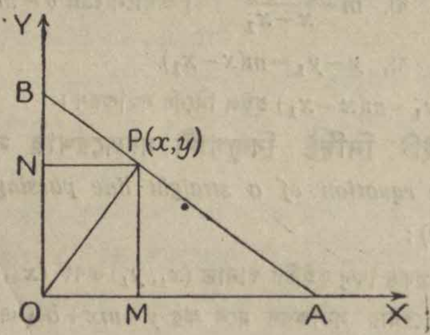



Fig. 30

মনে কর, $OA=a$, $OB=b$ এবং $P(x, y)$, $AB$ রেখার উপর যে-কোন একটি বিন্দু। $P$ হইতে $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টান।

এখন $OM=x$, $PM=y$.

*BOA* ও *PMA* এই দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ হইতে আমরা পাই,

$$\frac{PM}{BO}=\frac{MA}{OA}=\frac{OA-OM}{OA}$$

$$\therefore \quad \frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}=1-\frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$ ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**অন্য প্রকার প্রণালী :**

$$\triangle OBP+\triangle OPA=\triangle BOA$$

বা, $\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}ay=\frac{1}{2}ab$

বা, $bx+ay=ab$

উভয় পক্ষকে $ab$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

**মন্তব্য :** (i) কোন সরলরেখার সমীকরণের এই আকারকে intercept form বলে।

(ii) *AB* সরলরেখা *x*-অক্ষকে *A* $(a, 0)$ বিন্দুতে এবং *y*-অক্ষকে *B* $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করায় *AB* সরলরেখার সমীকরণ হইল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

(iii) *AB* সরলরেখা *x*-অক্ষকে *A* $(a, 0)$ বিন্দুতে এবং *y*-অক্ষকে *B* $(0, -b)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে *AB*-এর সমীকরণ হইবে $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1.$

(iv) *AB* রেখা *x*-অক্ষকে *A* $(-a, 0)$ বিন্দুতে এবং *y*-অক্ষকে *B* $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে *AB*-এর সমীকরণ হইবে $-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

(v) *AB* রেখা *x*-অক্ষকে *A* $(-a, 0)$ বিন্দুতে এবং *y*-অক্ষকে *B* $(0, -b)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে *AB*-এর সমীকরণ হইবে $-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1.$

3.8. কোন সরলরেখার উপর মূলবিন্দু হইতে লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা যদি দেওয়া থাকে তাহা হইলে ঐ লম্ব এবং কোণটি দ্বারা ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় (*To find the equation of a straight line in terms of the perpendicular drawn to it from the origin and the angle that the perpendicular makes with the positive direction of x-axis*) :

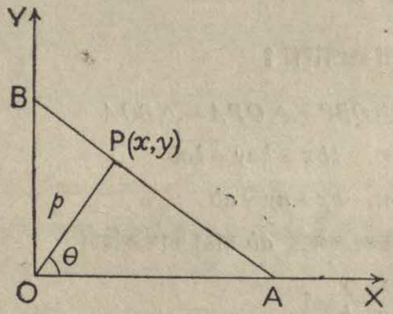



Fig. 31

$O$ বিন্দু হইতে $AB$ সরলরেখার উপর $OP$ লম্ব টানা হইয়াছে। $OP$ সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণ করিয়াছে। মনে কর, $OP=p$ এবং $AB$ রেখা $x$-অক্ষকে $A$ বিন্দুতে এবং $y$-অক্ষকে $B$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$।

Intercept form-এ $AB$ সরলরেখার সমীকরণ হইল $\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}=1$ $\cdots(1)$

এখন $\frac{OP}{OA}=\cos\theta \quad \therefore \quad OA=\frac{OP}{\cos\theta}=\frac{p}{\cos\theta}$

এবং $\frac{OP}{OB}=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \qquad \therefore \quad OB=\frac{OP}{\sin\theta}=\frac{p}{\sin\theta}$

(i) হইতে পাই, $\frac{x}{\frac{p}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{p}{\sin\theta}}=1$

বা, $\frac{x\cos\theta}{p}+\frac{y\sin\theta}{p}=1$

বা, $x \cos\theta + y \sin\theta = p.$

ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** কোন সরলরেখার সমীকরণের এই আকারকে উহার perpendicular form বলে।

### 3.9. কোন সরলরেখার সমীকরণ একঘাত সমীকরণ হইবে (*The equation of any straight line is linear*) :

উপরের আলোচনা হইতে দেখা যাইতেছে যে সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন আকার নিম্নলিখিত রূপে হইতে পারে।

(i) $y = mx + b$ (Tangent form)

(ii) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (Intercept form)

(iii) $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ (Normal form)

উপরের সমীকরণগুলির প্রত্যেকটি একঘাত সমীকরণ।

মনে কর, কোন সরলরেখার উপর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে-কোন দুইটি বিন্দু। ঐ রেখার উপর অন্য একটি বিন্দু $R(x, y)$ অবস্থিত হইবে (অর্থাৎ যদি $R$ বিন্দু $P$ ও $Q$ এর সহিত সমরেখ হইবে) যদি $x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) = 0$ হয় অর্থাৎ যদি $x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$

$\therefore$ ইহাই হইবে ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ।

এখন $y_1 - y_2 = A$, $x_2 - x_1 = B$, $x_1y_2 - x_2y_1 = C$ ধর। অতএব ঐ সমীকরণটি $Ax + By + C = 0$ হইবে এবং ইহাই একঘাত দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ।

### 3.10. যে-কোন একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।

$x$ ও $y$-এর একঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল

$$Ax + By + C = 0 \qquad \cdots(1)$$

(যেখানে $A, B, C$ ধ্রুবক)

মনে কর, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$ যে-কোন তিনটি বিন্দু এবং উহারা (1) নং সমীকরণের সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত।

ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$Ax_1+By_1+C=0 \qquad ...(2)$$

$$Ax_2+By_2+C=0 \qquad ...(3)$$

$$Ax_3+By_3+C=0 \qquad ...(4)$$

(2) এবং (3) হইতে আমরা পাই,

$$\frac{A}{y_1-y_2}=\frac{B}{x_2-x_1}=\frac{C}{x_1y_2-x_2y_1}$$

$A, B, C$-এর আনুপাতিক মানগুলি (4) নং সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

$\therefore$ $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ এবং $(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore$ $Ax+By+C=0$ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

### 3.11. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে $(Ax+By+C=0)$ বিভিন্ন আকারে প্রকাশ :

(i) $Ax+By+C=0$ কে $y=mx+b$ এর আকারে প্রকাশ :

$$Ax+By+C=0$$

বা, $By=-Ax-C$

বা, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$

ইহা $y=mx+b$ আকারের সমীকরণ যেখানে $m=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$.

(ii) $Ax+By+C=0$ কে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে প্রকাশ :

$$Ax+By+C=0$$

বা, $Ax+By=-C$

বা, $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$

বা, $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$

ইহা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারের সমীকরণ যাহার $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$.

(iii) $Ax+By+C=0$ কে $x \cos\theta+y \sin\theta=p$ এর আকারে প্রকাশ :

কোন সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল $Ax+By+C=0$ ...(1)

মূলবিন্দু $O$ হইতে (1)-এর উপর অঙ্কিত লম্ব $p$ এবং ঐ লম্ব $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণ করিলে সরলরেখার সমীকরণ হইবে,

$$x \cos \theta+y \sin \theta=p \qquad ...(2)$$

এই সমীকরণ (2) এবং সমীকরণ (1) একই সরলরেখা প্রকাশ করে।

অতএব $\dfrac{\cos \theta}{A}=\dfrac{\sin \theta}{B}=-\dfrac{p}{C}$

বা, $\dfrac{p}{C}=\dfrac{\cos \theta}{-A}=\dfrac{\sin \theta}{-B} \qquad ...(3)$

আবার, $\dfrac{p^2}{C^2}=\dfrac{\cos^2 \theta}{(-A)^2}=\dfrac{\sin^2 \theta}{(-B)^2}=\dfrac{\cos^2 \theta+\sin^2\theta}{A^2+B^2}=\dfrac{1}{A^2+B^2}$ ...(4)

(3) এবং (4) হইতে পাই,

$$\frac{p}{C}=\frac{\cos \theta}{-A}=\frac{\sin \theta}{-B}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\therefore \cos \theta=-\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin \theta=-\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$P=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\therefore$ (1) হইতে পাই,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

বা, $-x \cos \theta-y \sin \theta+\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$

যেহেতু $\cos \theta=-\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin \theta=-\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

বা, $x \cos \theta+y \sin \theta=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ইহা $x \cos \theta+y \sin \theta=p$ আকারের হইয়াছে।

এখানে দেখা গেল $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ধনাত্মক হইলে

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$ হইবে নির্ণেয় সমীকরণ ;

এবং $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ঋণাত্মক হইলে

$$-x \cos \theta - y \sin \theta + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$ হইবে নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** $x \cos 45° - y \sin 45° = -2$ এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ যাহার উপর মূলবিন্দু হইতে লম্ব এবং $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ্ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাণ 135° হইবে, 45° হইবে না।

ধ্রুবক পদটিকে ধনাত্মক করার জন্য সমীকরণটিকে লেখা হয়

$$-x \cos 45° + y \sin 45° = +2$$

বা, $$x \cos 135° + y \sin 135° = 2.$$

**3.12. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূ´ত কোণ নির্ণয় (*To find the angle between two given straight lines*) :**

(*a*) মনে কর, *PA* সরলরেখাটির সমীকরণ $y = m_1 x + b_1$ এবং *PB* সরলরেখার সমীকরণ $y = m_2 x + b_2$.

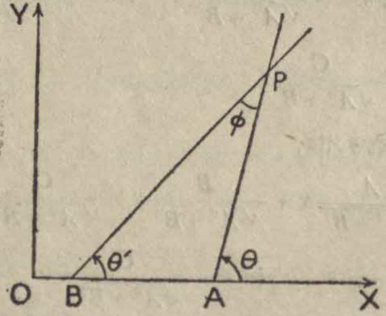



Fig. 32

মনে কর, *PA* এবং *PB* সরলরেখাদ্বয় *P* বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং উহাদের অন্তর্ভূ´ত কোণ $\phi$।

*PA* রেখা এবং *PB* রেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যথাক্রমে $\theta$ ও $\theta'$ কোণ করিয়াছে।

$\therefore \quad \tan\theta = m_1, \tan\theta' = m_2$ এবং $\phi = \theta - \theta'$

$$\therefore \quad \tan\theta = \tan(\theta - \theta') = \frac{\tan\theta - \tan\theta'}{1 + \tan\theta\tan\theta'} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \qquad \cdots \qquad (1)$$

যেহেতু $\phi$ হইল সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূ´ত কোণ, অতএব ইহা দ্বারা সরল-রেখা দুইটির অন্তর্ভূ´ত কোণ পাওয়া গেল।

**মন্তব্য :** যদি $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ এর মান ধনাত্মক (positive) হয় তখন উহাদের অন্তর্ভূ´ত কোণ হইবে সূক্ষ্মকোণ এবং $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ এর মান যখন ঋণাত্মক (negative) হইবে তখন উহাদের অন্তর্ভূ´ত কোণ $\phi$ হইবে স্থূলকোণ।

(*b*) যখন সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad \cdots \qquad (2)$$

হইবে তখন উহাদের অন্তর্ভূ´ত কোণ $\phi$ কে নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে উহাদিগকে $y = mx + b$ আকারে সাজাইতে হইবে।

(1) নং সমীকরণ হইতে পাই, $y = -\dfrac{A_1}{B_1}x - \dfrac{C_1}{B_1}$

(2) নং সমীকরণ হইতে পাই, $y = -\dfrac{A_2}{B_2}x - \dfrac{C_2}{B_2}$

এখানে $m_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}, \quad m_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$

$$\therefore \quad \tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}}{1 + \frac{A_1}{B_1}\frac{A_2}{B_2}} = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1}\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

ইহা দ্বারা সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূ´ত কোণ $\phi$ পাওয়া গেল।

**3.13. দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল হইবার শর্ত** (*Condition of Parallelism of two straight lines*) :

(i) দুইটি সরলরেখা $y = m_1x + b_1$ এবং $y = m_2x + b_2$ সমান্তরাল হইবে যদি উহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ $\phi = 0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\tan\phi = 0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\tan\phi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $m_1 - m_2 = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $m_1 = m_2$ হয়।

(ii) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ এবং $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ এই সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে

যদি $\tan\phi = \dfrac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $A_2B_1 = A_1B_2$

অর্থাৎ যদি $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$ হয়।

**3.14. দুইটি সরলরেখার পরস্পর লম্ব হইবার শর্ত** (*Condition of perpendicularity of two straight lines*) :

(i) দুইটি সরলরেখা $y = m_1x + b_1$ এবং $y = m_2x + b_2$ পরস্পর লম্ব হইবে যদি $\phi = 90°$ হয়। $\phi = 90°$ হইলে $\cot\phi = 0$ হইবে।

এখানে $\tan\phi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

বা, $\dfrac{1}{\tan\phi} = \dfrac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2}$

বা, $\cot\phi = \dfrac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2}$

সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে যদি $\cot\phi = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $\cot\phi = \dfrac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2} = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $1 + m_1m_2 = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $m_1m_2 = -1$ হয়।

(ii) দুইটি সরলরেখা $A_1x+B_1y+C_1=0$ এবং $A_2x+B_2y+C_2=0$ পরস্পর লম্ব হইবে যদি $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\times\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)=-1$ হয়

অর্থাৎ যদি $A_1A_2+B_1B_2=0$ হয়।

**কার্যকর নিয়ম :**

$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \cdots(i) \quad$ এবং $\quad A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \cdots(ii)$

সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে যদি $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ হয়।

মনে কর, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=K$

$\therefore \quad A_1=A_2K, B_1=B_2K$

(i) নং সমীকরণে $A_1$, $B_1$-এর মান বসাইয়া পাই,

$$A_2Kx+B_2Ky+C_1=0$$

বা, $A_2x+B_2y+\frac{C_1}{K}=0$

বা, $A_2x+B_2y+C'=0. \qquad \left[\text{যেখানে } C'=\frac{C_1}{K} \text{ ( ধ্রুবক )}\right]$

এখানে দেখা যাইতেছে সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যে ধ্রুবক (constant) পদেই শুধুমাত্র পার্থক্য দেখা যাইতেছে। $K$-এর মান অন্য কোন শর্ত হইতে নির্ণয় করিলে উহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইবে। অতএব কোন সরলরেখার সমান্তরাল কোন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে শুধু মাত্র ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করিলেই হইবে। অতএব $Ax+By+C=0$ সরলরেখার সমান্তরাল এমন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $Ax+By+D=0$। অন্য একটি শর্ত হইতে $D$-এর মান বাহির করিলেই নির্ণেয় সমীকরণ হইবে।

আবার উপরের (i) এবং (ii) সরলরেখা দুইটি লম্ব হইবে যখন

$\frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2}$ হইবে।

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ হইতে পাই

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

বা, $\frac{A_1}{B_1}x+y+\frac{C_1}{B_1}=0$

বা, $\frac{-B_2}{A_2}x+y+\frac{C_1}{B_1}=0 \quad \left(\because \frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2}\right)$

বা, $-B_2x+A_2y+\frac{C_1A_2}{B_1}=0$

বা, $-B_2x+A_2y+C'=0.$ $\left[\text{যেখানে } C'=\frac{C_1A_2}{B_1} \text{ (ধ্রুবক)}\right]$

একটি সরলরেখা দেওয়া আছে, উহার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত এইরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে $x$ ও $y$-এর সহগ দুইটি বিনিময় করিয়া উহাদের যে-কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হইবে এবং একটি নূতন ধ্রুবক পদ যোগ করিতে হইবে। অতএব $Ax+By+C=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ হইবে $Bx-Ay+D=0.$

অন্য একটি শর্তের সাহায্যে $D$-এর মান নির্ণয় করিলে ইহা একটি নির্ণেয় সমীকরণ হইবে।

**3.15. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়** (*To find the point of intersection of two given lines*) :

মনে কর, $A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$

এবং $A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

হইল দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$। যেহেতু ছেদবিন্দুটি উভয় সরলরেখায় অবস্থিত, অতএব ঐ স্থানাঙ্ক দ্বারা ঐ সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \; A_1x_1+B_1y_1+C_1=0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$

$A_2x_2+B_2y_2+C_2=0 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$

(iii) ও (iv) হইতে পাই,

$$\frac{x_1}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{y_1}{C_1A_2-A_1C_2}=\frac{1}{A_1B_2-A_2B_1}$$

$$\therefore \; x_1=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y_1=\frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}\right)$

**মন্তব্য :** ছেদবিন্দুর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাইবে যদি $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ হয়। আবার যদি $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ হয় অর্থাৎ যদি $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ হয় তাহা হইলে সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুর মান পাওয়া যাইবে না। উহারা তখন সমান্তরাল হইবে। তবে সরলরেখা দুইটি অসীম দূরত্বে ছেদ করিবে। আমরা আগেই আলোচনা করিয়াছি যে, সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে যদি $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ হয়।

3.16. **তিনটি সরলরেখার সমবিন্দু ( Concurrent ) হইবার শর্ত নির্ণয়** (*To find the condition of concurrence of three straight lines*) :

মনে কর, প্রদত্ত সরলরেখা তিনটির সমীকরণ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

প্রথম দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}\right)$$

যদি তিনটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে প্রথম দুইটির ছেদবিন্দু তৃতীয় সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে এবং ঐ ছেদবিন্দুর দ্বারা তৃতীয় সরলরেখাটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \; A_3 \times \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} + B_3 \times \frac{A_2C_1 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1} + C_3 = 0$$

∴ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হইবার শর্ত হইল

$$A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

বা, $A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + C_1(A_2B_3 - A_3B_2) = 0$

3.17. **যে সরলরেখা দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a straight line passing through the point of intersection of two given straight lines*) :

মনে কর, নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \cdots \quad (ii)$

এখন $A_1x+B_1y+C_1+K(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \cdots \quad (iii)$

সমীকরণটি একঘাত বলিয়া ইহা একটি সরলরেখার সমীকরণ। $K$ যে-কোন একটি ধ্রুবক (constant)। $K$-এর বিভিন্ন মানের জন্য (iii) নং সমীকরণ বিভিন্ন সরলরেখা প্রকাশ করিবে।

সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}\right)$$

এই ছেদবিন্দু দ্বারা সমীকরণ (iii) সিদ্ধ হইবে। অতএব সমীকরণ (iii) হইবে ঐ দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

**3.18. যে সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a straight line passing through a given point and through the point of intersection of two given straight lines*) :

মনে কর, নির্দিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \cdots \quad (i)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$A_1x+B_1y+C_1+K'(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \cdots \quad (iii)$$

যেহেতু এই সরলরেখাটি $(h, k)$ বিন্দু দিয়া যায় অতএব $x=h, y=k$ হইবে এবং (iii) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$A_1h+B_1k+C_1\times K'(A_2h+B_2k+C_2)=0$$

$$\therefore \quad K'=-\frac{A_1h+B_1k+C_1}{A_2h+B_2k+C_2}$$

$K'$ এর মান (iii) সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$A_1x+B_1y+C_1-\frac{A_1h+B_1k+C_1}{A_2h+B_2k+C_2}(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

বা, $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1h+B_1k+C_1}=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2h+B_2k+C_2}$

ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**3.19. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়** (*To find the length of the perpendicular from a given point upon a given straight line*) :

মনে কর, নির্দিষ্ট সরলরেখা $AB$-এর সমীকরণ $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ এবং মনে কর $P(x_1, y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $AB$-এর উপর $OR$ লম্ব টান এবং $P(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া $AB$-এর সমান্তরাল করিয়া $CD$ সরলরেখা টান। যেহেতু $AB$-এর সমীকরণ $x \cos \theta + y \sin \theta = p$.

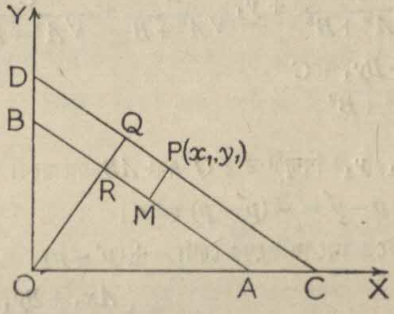



Fig. 33

অতএব $OR = p$ এবং $\angle AOR = \theta$

এখন যদি $OQ = p'$ হয় তাহা হইলে $CD$ রেখার সমীকরণ হইবে

$x \cos \theta + y \sin \theta = p'$ যেহেতু $CD$ রেখা $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী ;

$\therefore \quad x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta = p'$ হইবে।

$\therefore \quad p' = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $PM = QR = OQ - OR = p' - p$

$= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta - p.$

**মন্তব্য :** $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে যদি $x \cos \theta + y \sin \theta - p$ এই রাশিটিতে $x$-এর পরিবর্তে $x_1$ এবং $y$-এর পরিবর্তে $y_1$ বসানো হয়।

**অনুসিদ্ধান্ত :** (i) মনে কর, $AB$ সরলরেখার সমীকরণ

$$Ax+By+C=0 \quad \cdots \quad (i)$$

এই সমীকরণটিকে প্রথমে $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0 \quad \cdots \quad (ii)$ আকারে প্রকাশ করা হইল।

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \quad \cdots \quad (iii)$$

যেহেতু (ii) এবং (iii) একই সরলরেখার সমীকরণ

$$\therefore \cos\theta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\theta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ -p=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\therefore$ $(x_1, y_1)$ হইতে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p$

$$=x_1\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}+y_1\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

**দ্রষ্টব্য :** $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি যদি $O$ এবং $AB$-এর মধ্যে অবস্থিত হয় তাহা হইলে লম্বের দৈর্ঘ্য $= p-p' = -(p'-p)$ হইবে।

$\therefore$ $P$ বিন্দু হইতে নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য $= \pm(p'-p)$

$$=\pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

লম্বের দৈর্ঘ্যের চিহ্ন (sign) ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হউক না কেন দৈর্ঘ্য বলিতে উহার সাংখ্য মানকে বুঝায়।

**3.20.** $A_1x+B_1y+C_1=0$ **এবং** $A_2x+B_2y+C_2=0$ **সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equations to the straight lines bisecting the angle between two straight lines* $A_1x+B_1y+C_1=0$ *and* $A_2x+B_2y+C_2=0$) :

মনে কর, দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের কোন সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে-কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x', y')$।

একটি সরলরেখা হইতে ঐ বিন্দুর লম্বদূরত্ব অন্য সরলরেখাটি হইতে ঐ বিন্দুর লম্বদূরত্বের সমান।

ঐ লম্বদূরত্বগুলি একই চিহ্নযুক্ত হইতে পারে বা বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইতে পারে।

$$\therefore \frac{A_1x' + B_1y' + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x' + B_2y' + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

∴ লম্বদ্বিখণ্ডকগুলির সমীকরণ হইল

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

**দ্রষ্টব্য :** উপরের সমীকরণটিতে ± চিহ্নদ্বয়ের মধ্যে + চিহ্নটি তখনই লওয়া হইবে যখন সমদ্বিখণ্ডকটি মূলবিন্দু যেদিকে সেইদিকে থাকে, অন্যথায় − চিহ্নটি লওয়া হইবে। অর্থাৎ, দুইটি সরলরেখা $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ এবং $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ছেদ করিলে, ঐ সমতলে ছেদিত অংশের যেদিকে মূলবিন্দু সেইদিকে সমদ্বিখণ্ডকটি থাকিলে, ধনাত্মক চিহ্নটি লওয়া হইবে ; অন্যথায় ছেদিত অংশের যেদিকে মূলবিন্দু নাই সেইদিকে সমদ্বিখণ্ডকটি থাকিলে ঋণাত্মক চিহ্নটি লওয়া হইবে। নিচের চিত্রটি লক্ষ্য করিলে বিষয়টি পরিষ্কার হইবে।

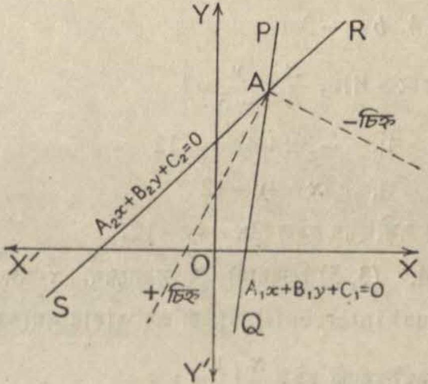



Fig. 34

**উদাহরণ 1.** এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $y$-অক্ষের সমান্তরাল এবং (3, 5) বিন্দুগামী।

$y$-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x = a$

যেহেতু সরলরেখাটি (3, 5) বিন্দুগামী, অতএব এখানে $a = 3$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $x = 3$.

**উদাহরণ 2.** যে সরলরেখা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 3 একক কাটিয়া লয় এবং $x$-অক্ষের সহিত $30^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y = mx + b$.

এখানে $b = 3$,

$$m = \tan\theta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 3$

বা, $\sqrt{3}y - x = 3\sqrt{3}$

বা, $x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} = 0.$

**উদাহরণ 3.** যে সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 4 একক এবং $y$-অক্ষের ঋণাত্মক দিক হইতে 3 একক কাটিয়া লয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সমীকরণটি হইল $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ... (i)

এখানে $a = 4$, $b = -3$

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$

বা, $-3x + 4y = -12$

বা, $3x - 4y = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3x - 4y = 12.$

**উদাহরণ 4.** (3, 5) বিন্দুগামী যে সরলরেখা $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ হইতে সমান অংশ (equal intercepts) কাটিয়া লয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সমীকরণটি হইল $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

এখানে যেহেতু $a = b$, $\therefore$ $x + y = a$

আবার যেহেতু সরলরেখাটি (3, 5) বিন্দুগামী,

$\therefore$ $3 + 5 = a$ $\therefore$ $a = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x + y = 8$

**উদাহরণ 5.** (2,5) বিন্দুগামী যে সরলরেখার প্রবণতা (gradient) 1 সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$
এখানে $m=1,\ x_1=2,\ y_1=5$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y-5=1(x-2)$

$$\text{বা,}\quad x-y+3=0.$$

**উদাহরণ 6.** (1, 2) এবং (3, 5) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার প্রবণতা (gradient) নির্ণয় কর।

$(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ এর সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $m=\dfrac{5-2}{3-1}=\dfrac{3}{2}$.

**উদাহরণ 7.** $x$-অক্ষের সহিত 135° কোণ উৎপন্নকারী এবং (6, −5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সমীকরণটি হইল $y=mx+b$
এখানে $m=\tan 135^\circ=-1$
যেহেতু (6, −5) বিন্দুটি ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore\quad -5=6m+b$$

$$\text{বা,}\quad -5=6\times(-1)+b \qquad \therefore\ b=1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y=-x+1$

$$\text{বা,}\quad x+y=1.$$

**উদাহরণ 8.** যে সরলরেখা (2, 3) বিন্দুগামী এবং $x$-অক্ষের সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সমীকরণটি হইল $y=mx+b$

এখানে $m=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

যেহেতু সরলরেখাটি (2, 3) বিন্দুগামী,

$$\therefore\quad 3=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 2+b \qquad \therefore\ b=3-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+3-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\text{বা,}\quad x-\sqrt{3}y+3\sqrt{3}-2=0.$$

**অন্য প্রণালী ঃ** মনে কর, সমীকরণটি হইল $y-y_1=m(x-x_1)$

এখানে $m=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

যেহেতু সরলরেখাটি (2, 3) বিন্দুগামী,

$$\therefore\ y-3=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$$

বা, $\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=x-2$

বা, $x-\sqrt{3}y+3\sqrt{3}-2=0.$

**উদাহরণ 9.** $2x+y=2$ সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে ( $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষকে ) মূলবিন্দু হইতে যে অংশে ছেদ করে সেই ছেদিতাংশ দুইটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণকে $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$ আকারে লেখা যায়।

$\therefore$ $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষের ছেদিতাংশ দুইটি হইল 1 এবং 2.

**উদাহরণ 10.** $x+y+1=0$ সরলরেখাকে $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ আকারে প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর।

$x+y+1=0$ সরলরেখাটিকে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় :

$$\frac{x}{\sqrt{1^2+1^2}}+\frac{y}{\sqrt{1^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=0$$

বা, $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

বা, $x.\frac{1}{\sqrt{2}}+y.\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $x\cos 225^\circ+y\sin 225^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ইহাই হইল নির্ণেয় আকার।

আবার $x+y+1=0$

বা, $-x-y=+1$

$$\therefore\ \text{লম্বদৈর্ঘ্য}=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**উদাহরণ 11.** $(-1, 2)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

বা, $y-2=\frac{2-4}{-1-3}(x+1)$

বা, $y-2=\frac{-2}{-4}(x+1)$

বা, $2y-4=x+1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-2y+5=0$.

**উদাহরণ 12.** $(3, 4)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে বিপরীত চিহ্নযুক্ত (opposite in sign) সমান অংশ কাটিয়া লয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, সমীকরণটি হইল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \cdots \quad$ (i)

যেহেতু অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ-এর মান সমান কিন্তু চিহ্ন বিপরীত,

$\therefore \quad b=-a$ হইবে।

$\therefore$ (1) নং সমীকরণ হইতে পাই, $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$

বা, $x-y=a$

যেহেতু রেখাটি $(3, 4)$ বিন্দুগামী,

$\therefore \; 3-4=a \quad \therefore \; a=-1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x-y+1=0$.

**উদাহরণ 13.** যদি মূলবিন্দু হইতে $x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{a}{2}\sin 2\theta$ সরলরেখা এবং $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$ সরলরেখার উপর লম্বদূরত্বদ্বয় যথাক্রমে $p$ ও $p_1$ হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর $4p^2+p_1^2=a^2$.

এখানে লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্য

$$p=\frac{\frac{a}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=\frac{a}{2}\sin 2\theta$$

এবং $p_1 = \frac{a \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = a \cos 2\theta$

$\therefore \; 4p^2 + p_1{}^2 = 4\frac{a^2}{4} \sin^2 2\theta + a^2 \cos^2 2\theta$

$= a^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$

$= a^2$

$\therefore \; 4p^2 + p_1{}^2 = a^2.$

**উদাহরণ 14.** $2x + y - 3 = 0$ এবং $x + 3y + 2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর।

এখন $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণকে $y = -2x + 3$ আকারে লেখা হইল এবং $x + 3y + 2 = 0$ সমীকরণকেও $y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ আকারে লেখা হইল।

এখানে $m_1 = -\frac{1}{3}, m_2 = -2$

আমরা জানি, $\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{1}{3} + 2}{1 + (-2) \times (-\frac{1}{3})}$

$= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1.$

$\therefore \; \phi = \tan^{-1} 1 = 45^\circ.$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ $= 45^\circ$.

**উদাহরণ 15.** (5, 4) বিন্দুগামী এবং $2x + 3y - 1 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$2x + 3y - 1 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ সমীকরণ দুইটিকে সমাধান করিলে $x = -1, y = 1$ পাওয়া যায়। এই দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু হইল $(-1, 1)$.

$\therefore$ (5, 4) এবং $(-1, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y - 4 = \frac{4 - 1}{5 + 1}(x - 5)$$

বা, $x - 2y + 3 = 0.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x - 3y + 3 = 0.$

**উদাহরণ 16.** প্রমাণ কর $5x + 3y - 7 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $x + y - 1 = 0$ সরলরেখাত্রয় একবিন্দুগামী হইবে।

$$5x + 3y - 7 = 0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$3x - 4y - 10 = 0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$(\;)\times 3,\quad 15x+9y-21=0$$

$$(ii)\times 5,\quad 15x-20y-50=0$$

$$\underline{-\quad+\quad+}$$

বিয়োগ করিয়া $\quad 29y+29=0$

$$\therefore\quad y=-1$$

(i) হইতে পাই, $5x+3(-1)-7=0$

$$\therefore\quad 5x=7+3=10$$

$$\therefore\quad x=2.$$

প্রথম দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু হইল $(2,-1)$। এখন যদি $(2,-1)$ বিন্দু দ্বারা $x+y-1=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহা হইলে তৃতীয় সরলরেখাটিও প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুগামী হইবে।

এখন, $\quad x+y-1=2-1-1=0$

$\therefore$ দেখা যাইতেছে যে $(2,-1)$ বিন্দু দ্বারা $x+y-1=0$ সিদ্ধ হইতেছে।

$\therefore$ সরলরেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

**উদাহরণ 17.** $(1,-2)$ বিন্দুগামী এবং $7x-4y+2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$7x-4y+2=0$ রেখার সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $7x-4y+k=0$ হইবে।

যেহেতু সরলরেখাটি $(1,-2)$ বিন্দুগামী,

$\therefore\quad 7\times 1-4(-2)+k=0$

$\therefore\quad k=-15$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $7x-4y-15=0$.

**উদাহরণ 18.** $(2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $4x-3y-10=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$4x-3y-10=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এইরূপ যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $3x+4y+k=0$

যেহেতু এই রেখাটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী,

$\therefore\quad 3.2+4.3+k=0 \qquad \therefore\quad k=-18$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $3x+4y-18=0$.

**উদাহরণ 19.** যে সরলরেখা $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $y-x-8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$

সমীকরণ দুইটিকে সমাধান করিলে $x=-1, y=-1$ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রথম দুইটির ছেদবিন্দু হইল $(-1,-1)$। এই ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y+1=m(x+1)$$

বা, $y=m(x+1)-1$

এই সরলরেখাটি $y=x+8$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে যদি $m.1=-1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m=-1$ হয় $(\because m_1m_2=-1)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y=-1(x+1)-1$

বা, $x+y+2=0.$

**উদাহরণ 20.** এমন একটি সরলরেখা যাহা মূলবিন্দুগামী এবং $2x-3y+14=0$ এবং $5x+4y-7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এইরূপ সরলরেখার উপর $(4,-7)$ বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$2x-3y+14+k\ (5x+4y-7)=0 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী

$\therefore$ $2.0-3.0+14+k\,(5.0+4.0-7)=0$

বা, $14-7k=0$

$\therefore$ $k=2.$

(i) হইতে পাই, $2x-3y+14+2(5x+4y-7)=0$

বা, $12x+5y=0 \quad \ldots \quad$ (ii)

$\therefore$ $(4,-7)$ বিন্দু হইতে $12x+5y=0$ রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{12\times4+5\times(-7)}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{48-35}{13}=\frac{13}{13}=1.$$

**উদাহরণ 21.** $3x-4y+7=0$ ও $12x-5y-8=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমীকরণ দুইটিকে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায় :

$3x-4y+7=0$ ও $-12x+5y+8=0$

∴ মূলবিন্দু যে কোণের মধ্যে আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}}=+\frac{-12x+5y+8}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

বা, $\dfrac{3x-4y+7}{5}=\dfrac{-12x+5y+8}{13}$.

বা, $99x-77y+51=0$

অন্য সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{-12x+5y+8}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

বা, $\dfrac{3x-4y+7}{5}=-\dfrac{-12x+5y+8}{13}$

বা, $21x+27y-131=0$

∴ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হইল

$99x-77y+51=0$ ও $21x+27y-131=0$.

## প্রশ্নমালা 3

1. যে সরলরেখা (2, 3) বিন্দুগামী এবং $x$-অক্ষের সমান্তরাল সেইরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. (3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার প্রবণতা (gradient) 1 হইলে ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. যে সরলরেখা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 1 একক কাটিয়া লয় এবং $x$-অক্ষের সহিত $45^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. যে সরলরেখা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 1 একক কাটিয়া লয় এবং $x$-অক্ষের সহিত $60^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. যে সরলরেখা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 2 একক কাটিয়া লয় এবং $x$-অক্ষের সহিত $30^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. যে সরলরেখা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 2 একক কাটিয়া লয় এবং $x$ অক্ষের সহিত $120^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. যে সরলরেখা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 2 একক এবং $y$-অক্ষের ঋণাত্মক দিক হইতে 3 একক কাটিয়া লয় সেই রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. (2, 4) বিন্দুগামী যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ এমনভাবে কাটিয়া লয় যে (i) ছেদিত অংশ উভয়েই ধনাত্মক, (ii) ছেদিত অংশের একটি ধনাত্মক অপরটি ঋণাত্মক তাহা হইলে ঐরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. (1, −2) বিন্দুগামী যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ কাটিয়া লয় এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার প্রবণতা (gradient) নির্ণয় কর :

(i) (−5, 3) এবং (9,5)

(ii) (0, 0) এবং (2, −2)

(iii) (0, −5) এবং (−4,7)

11. দেখাও যে (3, 4) এবং (9, 12) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায়।

12. $4x+7y+5=0$ সরলরেখাকে (i) $y=mx+b$ (ii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে প্রকাশ কর।

13. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে perpendicular আকারে লিখ :

(i) $y=3x+2$ (ii) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (iii) $4x-3y+1=0$

14. $x \cos45^\circ + y \sin45^\circ = \sqrt{2}$ সমীকরণটিকে intercept আকারে লিখ।

15. $2x-১y+6=0$ এবং $3x-4y+1=0$ সরলরেখা দুইটিকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে প্রকাশ কর।

16. $x+y+a=0$ সরলরেখাকে $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ আকারে প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর।

17. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $(3, 4)$ এবং $(5, 6)$ (ii) $(-1, 3)$ এবং $(6, -7)$

(iii) $(0, -a)$ এবং $(b, 0)$ (iv) $(7, 1)$ এবং $(-5, -2)$

(v) $(a, b)$ এবং $(a-b, a+b)$

(vi) $(a \cos \phi_1, a \sin \phi_1)$ এবং $(a \cos \phi_2, a \sin \phi_2)$.

18. ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে

(i) $(1, 4), (2, -3), (-1, -2)$ (ii) $(-4, 3), (7, -3), (5, 8)$

(iii) $(0, 0), (5, -2), (6, 9)$ (iv) $(0, 1), (2, 0), (-1, -2)$.

19. নিম্নলিখিত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয় কর :—

(i) $x-2y-5=0$ এবং $x-3y+7=0$

(ii) $7x-4y+3=0$ এবং $3x-11y+1=0$

(iii) $x-y+1=0$ এবং $(2-\sqrt{3})x-y+3=0$

(iv) $x-y\sqrt{3}-5=0$ এবং $\sqrt{3}x+y-7=0$

(v) $3x-y+7=0$ এবং $x-3y+8=0$

20. নিম্নলিখিত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর :

(i) $y=5x-7$ এবং $4x-3y+1=0$

(ii) $3x+y=5$ এবং $x+5y+3=0$

(iii) $3x+y-5=0$ এবং $5x-2y-1=0$

(iv) $x=ay+b$ এবং $y=bx+a$

21. দেখাও যে $y=6-5x$ সরলরেখা $3x-2y=1$ এবং $x-3y+2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী।

22. দেখাও যে $x+3y+1=0$, $2x+7y+3=0$, $5x-y=11$ সরলরেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

23. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $(5, 4)$ বিন্দু এবং $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায়।

24. প্রমাণ কর $2x-y+8=0$, $3x+y+2=0$ ও $4x+3y-4=0$ সরলরেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

25. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা

(i) $(3, 5)$ বিন্দুগামী এবং $4x-3y+1=0$ সরলরেখার সমান্তরাল ;

(ii) $(1, -2)$ বিন্দুগামী এবং $7x-4y+2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল

(iii) $3x-2y+4=0$ এবং $2x+y-7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $y=12x$-এর সমান্তরাল ;

(iv) $(3, 4)$ বিন্দুগামী এবং $4x-3y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(v) $(-3, 1)$ বিন্দুগামী এবং $5x-2y+7=0$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(vi) $(-6, 10)$ বিন্দুগামী এবং $7x+8y-5=0$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(vii) $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং $(1, 3)$ ও $(2, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব ;

(viii) $2x+3y+4=0$ এবং $3x+4y-5=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু-গামী এবং $6x-7y+8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(ix) মূলবিন্দুগামী এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ ও $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় ;

(x) $2x-y+5=0$ ও $x+y+1=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং $2x+y-5=0$ ও $x-y-7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

26. যে সরলরেখা $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং $3x+2y-7=0$ সরলরেখার সহিত $45°$ কোণ উৎপন্ন করে সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

27. যে সরলরেখা $(4, 5)$ বিন্দুগামী এবং $x \cos 60° + y \sin 60° = 3$ সরলরেখার উপর লম্ব সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

28. যে সরলরেখা মূলবিন্দুগামী এবং $x \cos 60° + y \sin 60° = 2$ সরলরেখার উপর লম্ব সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. যে সরলরেখা $(4, 3)$ বিন্দুগামী এবং $x \cos 60° + y \sin 60° = 2$ সরলরেখার সমান্তরাল এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

30. প্রমাণ কর সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল :

(i) $4x-3y+3=0$ ও $4x-3y+1=0$

(ii) $7x-4y+2=0$ ও $7x-4y=15$

(iii) $3x+2y+5=0$ ও $6x+4y-7=0$

(iv) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{c}{ab}$

31. প্রমাণ কর সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব :

(i) $4x-3y+1=0$ ও $3x+4y-25=0$

(ii) $2x+5y+1=0$ ও $5x-2y+7=0$

(iii) $5x-4y=20$ ও $4x-5y=10$

(iv) $x+y+2=0$ ও $y-x-8=0$

(v) $4x-5y+7=0$ ও $10x+8y+3=0$

32. দেখাও যে $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$, $x=0$ সরলরেখাত্রয় দ্বারা যে ত্রিভুজ অঙ্কিত হয় তাহার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\left\{\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}\right\}$.

33. দেখাও যে $(a+b)x+(a-b)y-2ab=0$, $(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$, $x+y=0$ সরলরেখাত্রয় দ্বারা যে ত্রিভুজ অঙ্কিত হয় তাহার উলম্ব কোণ $2\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$.

34. যে সরলরেখা $(3, -2)$ বিন্দুগামী এবং $\sqrt{3}x+y=1$ সরলরেখার সহিত $60^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে সেই সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

35. $A(1, 0)$, $B(2, -4)$, $C(-5, -2)$ তিনটি বিন্দু।

(i) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $A$ বিন্দুগামী এবং $BC$-এর উপর লম্ব।

(ii) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $B$ বিন্দুগামী এবং $AC$-এর উপর লম্ব।

36. নিম্নলিখিত বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বদূরত্বগুলি নির্ণয় কর :—

(i) $(0, 0)$ হইতে $x+2y+3=0$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(ii) $(2, -1)$ হইতে $x+3y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(iii) $(1, 1)$ হইতে $2x\cos 30^\circ+3y\sin 30^\circ=4$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(iv) $(2, 1)$ হইতে $x\sin 60^\circ+y\cos 60^\circ=2$ সরলরেখার উপর লম্ব ;

(v) $(a, 0)$ হইতে $y=mx+\frac{a}{m}$ এর উপর লম্ব।

37. $4x+3y=8$ ও $4x+3y+12=0$ এই সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

38. $3x+4y-6=0$ ও $3x+4y+5=0$ এই দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

39. $12x-5y+4=0$ ও $3x-4y-2=0$ এই সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূ্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

40. নিম্নলিখিত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণের লম্বদ্বিখণ্ডকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $4x-3y=0$ ও $3x+4y=0$

(ii) $y-2x=4$ ও $2y=x-4$

(iii) $4x-3y-1=0$ ও $3x-4y+2=0$

(iv) $3x+4y-12=0$ ও $4x+3y+24=0$

(v) $4y+3x-12=0$ ও $3y+4x-24=0$

41. $y=mx+c$ এবং $y=mx+c'$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

42. এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $Ax+By+C=0$ ও $A'x+B'y+C'=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং

(i) মূলবিন্দু দিয়া যায়,

(ii) $y$-অক্ষের সমান্তরাল,

(iii) $y$-অক্ষ হইতে $a$ একক ছিন্ন করে,

(iv) $(x', y')$ বিন্দুগামী।

43. প্রমাণ কর যে $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$, $\sqrt{3}y+x=1$ এই চারিটি সরলরেখা লইয়া যে সামান্তরিক (Parallelogram) অঙ্কিত হয় তাহার কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।

# চতুর্থ অধ্যায়

## বৃত্ত (Circle)

4.1. **বৃত্ত ঃ** কোন একটি বিন্দু যদি যে-কোন সমতলের উপর এমনভাবে চলমান হয় যে ঐ সমতলে অপর একটি স্থিরবিন্দু হইতে উহার দূরত্ব সর্বদা সমান থাকে তাহা হইলে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। প্রকৃত-পক্ষে ইহা বৃত্তের পরিধি (Circumference)। এই স্থিরবিন্দুকে বৃত্তের কেন্দ্র (Centre) বলে। স্থিরবিন্দু হইতে চলমান বিন্দুর নির্দিষ্ট দূরত্বকে ব্যাসার্ধ (Radius) বলে।

4.2. **মূলবিন্দুকে কেন্দ্র ধরিয়া বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of a circle whose centre is the origin)* :

মনে কর, মূলবিন্দু $O$ বৃত্তের কেন্দ্র এবং $a$ ইহার ব্যাসার্ধ। বৃত্তের পরিধির উপর যে-কোন $P(x, y)$ একটি বিন্দু লও। $P$ বিন্দু হইতে $OX$-এর উপর $PM$ লম্ব টান। $OP$ যুক্ত কর।

এখন $OM = x$, $PM = y$ এবং $OP = a$.

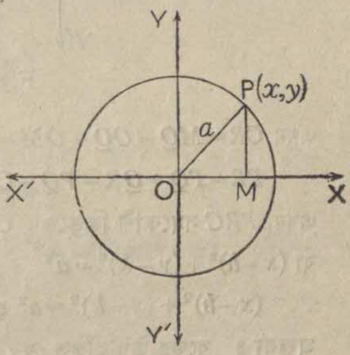


Fig. 35

এখানে $PMO$ সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore \quad OM^2 + PM^2 = OP^2$

বা, $x^2 + y^2 = a^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = a^2$ হইল বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** বৃত্তের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা ইহা সিদ্ধ হইবে না।

4.3. **বৃত্তের কেন্দ্র যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু (h, k) এবং ব্যাসার্ধ a হইলে ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of a circle whose centre is any point (h, k) and radius equal to a given length a)* :

মনে কর, $C$ বৃত্তের কেন্দ্র যাহার স্থানাঙ্ক $(h, k)$ এবং $a$ ইহার ব্যাসার্ধ। বৃত্তের উপরিস্থিত $P(x,y)$ যে-কোন একটি বিন্দু লও। $C$ ও $P$ হইতে $OX$ এর উপর যথাক্রমে $CM$ ও $PQ$ লম্ব টান। $C$ হইতে $PQ$-এর উপর $CR$ লম্ব টান। $CP$ যোগ কর। তাহা হইলে $OM = h$, $CM = k$, $OQ = x$, $PQ = y$, $CP = a$.

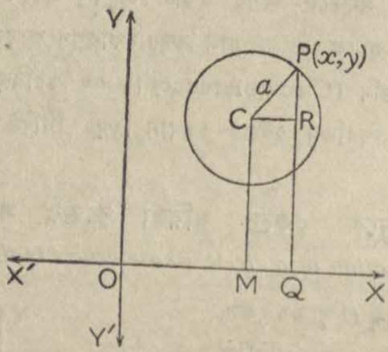



Fig. 36

এখন $CR = MQ = OQ - OM = x - h$

$PR = PQ - QR = PQ - CM = y - k$

এখন, $PRC$ সমকোণী ত্রিভুজের $CR^2 + PR^2 = CP^2$

বা $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\therefore$ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ হইল বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** বৃত্তের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, অন্য কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা ইহা সিদ্ধ হইবে না।

**অনুসিদ্ধান্ত** (i) বৃত্তের কেন্দ্র $C$-এর স্থানাঙ্ক যদি $(h, -k)$, $(-h, -k)$, $(-h, k)$ হয় তাহা হইলে বৃত্তের সমীকরণ হইবে যথাক্রমে $(x-h)^2 + (y+k)^2 = a^2$, $(x+h)^2 + (y+k)^2 = a^2$, $(x+h)^2 + (y-k)^2 = a^2$.

(ii) মনে কর, মূলবিন্দু $O$ বৃত্তের পরিধিস্থ।

$\therefore$ $h^2 + k^2 = a^2$

$\therefore$ এক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণ হইবে

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2 + k^2$

বা, $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$.

(iii). মনে কর, মূলবিন্দু $O$ বৃত্তের পরিধিস্থ নয় কিন্তু কেন্দ্র $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

এখানে $k=0$ হইবে।

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হইবে $(x-h)^2+y^2=a^2$.

(iv) মনে কর, মূলবিন্দু বৃত্তের পরিধিস্থ এবং $x$-অক্ষের উপর বৃত্তের ব্যাস অবস্থিত।

এক্ষেত্রে $k=0$ এবং $a=h$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2+y^2-2hx=0$.

(v) বৃত্তের কেন্দ্র $C$ যদি মূলবিন্দু হয় তাহা হইলে $h=0, k=0$ হইবে।

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2+y^2=a^2$.

এখন $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ এই সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত রূপে লেখা যায়।

$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0$

বা, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

যেখানে $g, f, c$ হইল ধ্রুবক পদ এবং $g=-h, f==k, c=h^2+k^2-a^2$.

## 4.4. বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ রূপ ঃ

বৃত্তের [ যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(h, k)$ ব্যাসার্ধ $a$] সমীকরণ হইল

$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ ... (i)

বা, $x^2+y^2-2hx+y^2+k^2-2yk=a^2$

বা, $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0$ ... (ii)

এখানে $x^2$ ও $y^2$-এর সহগ সমান এবং $xy$-যুক্ত কোন পদ নাই।

(2) নং সমীকরণকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (iii)-রূপে প্রকাশ করা যায় যেখানে $g, f, c$ হইল ধ্রুবক পদ এবং $g=-h, f=-k$, $c=h^2+k^2-a^2$.

(iii) নং সমীকরণ হইল বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ রূপ।

## 4.5. প্রমাণ কর $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সর্বদাই কোন বৃত্তের সমীকরণ হইবে। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

বৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (i)

বা, $x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2+c-g^2-f^2=0$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$ ... (ii)

এখন $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ এই সমীকরণটির সহিত (ii) নং সমীকরণের তুলনা করিলে দেখা যায় দুইটি সমীকরণ সমান হইবে যদি $h=-g, k=-f, a=\sqrt{g^2+f^2-c}$ হয়।

$\therefore$ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সর্বদাই কোন বৃত্তের সমীকরণ হইবে যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$।

**দ্রষ্টব্য ঃ** (i) যদি $g^2+f^2>c$ হয়, তবে ব্যাসার্ধ বাস্তব হইবে।

$\therefore$ বৃত্ত বাস্তব হইবে।

(ii) যদি $g^2+f^2=c$ হয়, তবে ব্যাসার্ধ $=0$ হইবে।

$\therefore$ বৃত্ত একটি বিন্দুতে পরিণত হইবে। এই বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র। এইরূপ বৃত্তকে বিন্দু বৃত্ত (Point Circle) বলে।

(iii) যদি $g^2+f^2<c$ হয় তবে ব্যাসার্ধ কাল্পনিক হইয়া যায়, তখন বৃত্তটি কাল্পনিক হইয়া যায়।

### 4.7. সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ

$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হওয়ার শর্ত *(To find the condition that the general equation of second degree $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ may represent a circle)* :

মনে কর, সমীকরণটি হইল $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$

বা, $x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}+\frac{c}{a}=0$

বা, $\left(x^2+2\frac{g}{a}x+\frac{g^2}{a^2}\right)+\left(y^2+\frac{2fy}{a}+\frac{f^2}{a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{g^2}{a^2}-\frac{f^2}{a^2}=0$

বা, $\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}$.

অতএব দেখা যাইতেছে যে যদি $a=b$ হয় এবং $h=0$ হয় তবে $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হইবে।

∴ নির্ণেয় শর্ত হইল

(i) $x^2$-এর সহগ $=y^2$-এর সহগ (ii) $xy$-এর সহগ $=0$.

**4.8. $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের ব্যাস সেই বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** [*To find the equation of a circle whose diameter is the line joining the two given points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$*]

মনে কর, $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দুইটি প্রদত্ত বিন্দু। মনে কর, বৃত্তের পরিধিস্থ $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু। $AP$ এবং $BP$ যোগ কর।

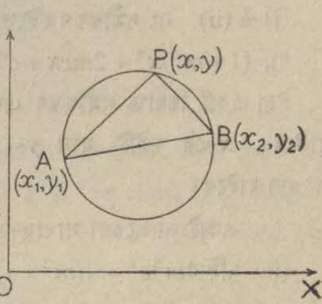



Fig. 37

যেহেতু $AB$ একটি বৃত্তের ব্যাস, অতএব $\angle APB$ হইল সমকোণ।

∴ $AP$ এবং $BP$ পরস্পর লম্ব।

∴ $AP$-এর প্রবণতা $\times$ $BP$-এর প্রবণতা $=1$

এখন $AP$-এর প্রবণতা $=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

$BP$-এর প্রবণতা $=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

$$\therefore\ \frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

ইহাই হইল বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

**4.9. বৃত্তের স্পর্শক (Tangent to the circle) :**

আমরা জানি, একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। যদি ঐ ছেদবিন্দু দুইটি একটিমাত্র বিন্দুতে মিলিত হয় তখন ঐ সরলরেখাটিকে ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক বলে। ঐ বিন্দুটিকে বলা হয় স্পর্শবিন্দু (point of contact)। স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হয়।

**অভিলম্ব (Normal) :** যে সরলরেখা স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুতে লম্ব তাহাকে অভিলম্ব (Normal) বলে।

## 4.10. একটি সরলরেখা ও বৃত্তের ছেদবিন্দু নির্ণয় (*To find the points of intersection of a straight line and a circle*) :

মনে কর, $y=mx+c$ ··· (i) সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ ··· (ii) বৃত্তটিকে ছেদ করিয়াছে। কোন্ কোন্ বিন্দুতে বৃত্তটিকে ছেদ করিয়াছে তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হইতে আমরা পাই, $x^2+(mx+c)^2=a^2$

বা, $(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং ইহা হইতে $x$-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। $x$-এর দুইটি মান $y=mx+c$ তে বসাইলে $y$-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ একটি সরলরেখা সাধারণতঃ একটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(*i*) যদি $4m^2c^2-4(m^2+1)(c^2-a^2)>0$ হয়

অর্থাৎ যদি $a^2(1+m^2)-c^2>0$ হয় তবে বিন্দু দুইটি পৃথক এবং বাস্তব হইবে।

(ii) যদি $a^2(1+m^2)-c^2=0$ হয় তবে বিন্দু দুইটি একটি বিন্দুতে মিলিত হইবে।

(iii) যদি $a^2(1+m^2)-c^2<0$ হয় তবে বিন্দু দুইটি কাল্পনিক হইবে। এক্ষেত্রে সরলরেখাটি বৃত্তটিকে কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না।

মনে কর, $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে $x_1$ এবং $x_2$ দুইটি বীজ (roots) পাওয়া যায়।

$$x_1+x_2=-\frac{2mc}{1+m^2},\ x_1x_2=\frac{c^2-a^2}{1+m^2}$$

$$\therefore\ x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{2}{1+m^2}\sqrt{m^2c^2-(c^2-a^2)(1+m^2)}$$

$$=\frac{2}{1+m^2}\sqrt{(1+m^2)a^2-c^2}$$

যদি ছেদবিন্দু দুইটি $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ হয় তাহা হইলে $y_1 - y_2 = (mx_1 + c) - (mx_2 + c) = m(x_1 - x_2)$

$\therefore$ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1+m)^2} = (x_1 - x_2)\sqrt{1+m^2}$$

$$= \frac{2}{1+m^2}\sqrt{\{a^2(1+m^2) - c^2\}(1+m^2)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2) - c^2}{1+m^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}$$

এই জ্যাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= 0$ হয়। অর্থাৎ জ্যা যে দুইটি বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করিয়াছিল সেই দুইটি বিন্দু একটি বিন্দুতে সমাপতিত হইবে। অতএব সরলরেখা $y = mx + c$, $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ায় শর্ত হইল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= 0$

অর্থাৎ $\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2} = 0$

বা, $c^2 = a^2(1+m^2)$

$\therefore \quad c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হইল $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

অতএব $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ হইলে $y = mx + c$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

$\therefore$ বৃত্তের স্পর্শকের সাধারণ রূপ হইল $y = mx \pm a\sqrt{l+m^2}$, যেখানে $m$ ধ্রুবক রাশি।

## অন্য প্রণালীতে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় ঃ

মনে কর, সরলরেখা $y = mx + c$, $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে $P$ ও $Q$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $PQ$ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। $O$ হইল মূলবিন্দু। $O$ হইতে $PQ$-এর উপর $OR$ লম্ব টান। $OP$ যোগ কর। এখানে $OP = a$.

$$OR = \frac{0 - 0 + c}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$$

আমরা জানি, $PQ=2PR$, $PRO$ সমকোণী ত্রিভুজে $OP^2=OR^2+PR^2$

$\therefore \quad PR^2=OP^2-OR^2$

$$\therefore \quad PR=\sqrt{a^2-\frac{c^2}{1+m^2}}=\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}$$

$$PQ=2PR=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\times\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}$$

ইহাই হইল নির্ণেয় জ্যা ($PQ$)-এর দৈর্ঘ্য।

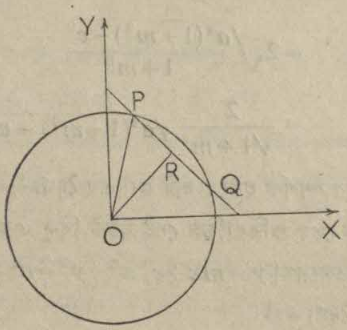



Fig. 38

**মন্তব্য ঃ** $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ এবং $y=mx-a\sqrt{1+m^2}$ এর প্রত্যেকে $x^2+y^2=a^2$ এর স্পর্শক। দুইটি সমীকরণেই $m$ একই। যেহেতু $m$ দুইটি সমীকরণেই এক, অতএব উহারা পরস্পর সমান্তরাল।

**4.11. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a tangent at the point $P(x_1, y_1)$ to the circle $x^2+y^2=a^2$*) :

মনে কর, বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দু ছাড়া $Q(x_2, y_2)$ আর একটি নিকটস্থ অপর বিন্দু।

$PQ$ সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি বৃত্তের উপর অবস্থিত

$$\therefore \quad x_1^2+y_1^2=a^2 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$x_2^2+y_2^2=a^2 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2=0$$

বা, $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$

$$\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$$

(i) হইতে পাই,

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1)$$

ইহা হইল $PQ$-এর সমীকরণ। এখানে $PQ$ হইল বৃত্তের জ্যা। এই জ্যা $PQ$, $P$ বিন্দুতে বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে যদি $Q$ বিন্দু ক্রমশ অগ্রসর হইয়া $P$ বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়। অর্থাৎ যদি $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ হয়।

$\therefore$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=-\frac{2x_1}{2y_1}(x-x_1)$$

বা, $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ বা, $yy_1-y_1^2=-xx_1+x_1^2$

বা, $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2 \quad (\because x_1^2+y_1^2=a^2)$

$\therefore$ $xx_1+yy_1=a^2$ হইল স্পর্শকের নির্ণেয় সমীকরণ।

**অন্য প্রণালী :**

মনে কর, বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $AB$ একটি স্পর্শক। $O$ হইল মূলবিন্দু।

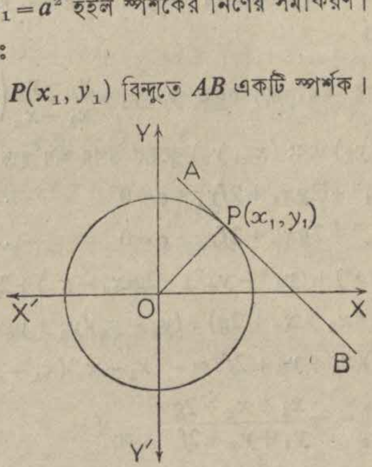



Fig. 39

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী $AB$ সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার $PO$ সরলরেখার সমীকরণ হইল $y=\frac{y_1}{x_1}x$ ... (ii)

এই সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব,

$$\therefore\ m\times\frac{y_1}{x_1}=-1 \qquad \therefore\ m=-\frac{x_1}{y_1}$$

$m$-এর মান (i) নং সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2=-xx_1+x_1^2$

বা, $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2$

$\therefore$ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল $xx_1+yy_1=a^2$.

**4.12. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of a tangent at the point $P(x_1, y_1)$ to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$)* :

মনে কর, বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দু ছাড়া $Q(x_2, y_2)$ হইল আর একটি নিকটস্থ অপর বিন্দু।

$PQ$ সরলরেখার সমীকরণ হইল $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$ ... (i)

যেহেতু $P(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বৃত্তের উপর অবস্থিত

$\therefore$ $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ ... (ii)

$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$ ... (iii)

বা, $(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)+2g(x_1-x_2)+2f(y_1-y_2)=0$

বা, $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2g)+(y_1-y_2)(y_1+y_2+2f)=0$

বা, $(y_1-y_2)(x_1+y_2+2f)=-(x_1-x_2)(x_1+x_2+2g)$

$$\therefore\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}$$

(i) হইতে পাই, ( $PQ$-এর সমীকরণ )

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}(x-x_1) \qquad \cdots \text{(iv)}$$

এখানে $PQ$ হইল বৃত্তের একটি জ্যা। এই জ্যা $PQ$, $P$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $Q$ বিন্দু $P$ বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়, অর্থাৎ যদি $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ হয়।

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$y - y_1 = -\frac{2(x_1 + g)}{2(y_1 + f)}(x - x_1)$$

বা, $(y - y_1)(y_1 + f) = -(x_1 + g)(x - x_1)$

বা, $yy_1 + yf - y_1^2 - y_1 f = -xx_1 + x_1^2 - gx + gx_1$

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c - gx_1 - fy_1 - c$

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = -gx_1 - fy_1 - c$

যেহেতু $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

বা, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

ইহাই হইল $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

**অন্য প্রণালী ঃ**

মনে কর, বৃত্তটির কেন্দ্র হইল $C$ এবং বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু হইল $P(x_1, y_1)$।

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$।

$\therefore$ $C$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$

$\therefore$ $CP$ রেখার সমীকরণ $y - y_1 = \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}\left(x - x_1\right)$ $\quad\cdots$ (i)

আবার $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \cdots \text{(ii)}$$

এই রেখাটি $CP$-এর উপর লম্ব হইবে যদি $m \times \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g} = -1$ হয়।

$(\because m_1 m_2 = -1)$

অর্থাৎ যদি $m = -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f}$ হয়।

$\therefore$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\left(x - x_1\right)$$

বা, $(y-y_1)(y_1+f)=-(x_1+g)(x-x_1)$

বা, $xx_1+yy_1+yf+gx=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c-gx_1$
$-fy_1-c$

বা, $xx_1+yy_1+yf+gx=-gx_1-fy_1-c$
( যেহেতু $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ )

বা, $xx_1+yy_1+yf+gx=-gx_1-fy_1-c$

$\therefore\ xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

ইহা হইল $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

**মন্তব্য :** $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে যে-কোন বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে যদি $x^2$-এর স্থলে $xx_1$, $y^2$-এর স্থলে $yy_1$ এবং $2x$-এর স্থলে $(x+x_1)$, $2y$-এর স্থলে $(y+y_1)$ লেখা যায়।

**4.13. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal) সমীকরণ নির্ণয়** ***(To find the equation of the normal at any point $P(x_1, y_1)$ of the circle $x^2+y^2=a^2$) :***

আমরা জানি, $P(x_1, y_1)$ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ স্পর্শকের উপর লম্ব। $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হইল অভিলম্ব।

এখানে বৃত্তের কেন্দ্র $O$ হইল মূলবিন্দু।

$O(0, 0)$ এবং $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-0=\frac{y_1-0}{x_1-0}(x-0) \quad \text{বা,} \quad y=\frac{y_1}{x_1}(x)$$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ হইল $xy_1-x_1y=0$.

**অন্য প্রণালী :**

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল $xx_1+yy_1=a^2$

বা, $y=-\dfrac{x_1}{y_1}x+\dfrac{a^2}{y_1}$ $\quad\cdots\quad$ (i)

এই সরলরেখার প্রবণতা হইল $-\dfrac{x_1}{y_1}$

আবার $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad\cdots\quad \text{(ii)}$$

এই দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইবে যদি $m\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)=-1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m=\frac{y_1}{x_1}$ হয়।

(ii) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

বা, $x_1y-x_1y_1=y_1x-x_1y_1$

বা, $xy_1-x_1y=0$

ইহাই হইল নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ।

**4.14. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of normal at any point $P(x_1, y_1)$ of the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$)* **:**

$P(x_1, y_1)$ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ স্পর্শকের উপর লম্ব। আমরা জানি, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$।

$(-g, -f)$ এবং $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$$

বা, $(y-y_1)(x_1+g)=(y_1+f)(x-x_1)$

∴ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$x(y_1+f)-y(x_1+g)-fx_1+gy_1=0.$$

**অন্য প্রণালী :**

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

বা, $y=-\frac{x_1+g}{y_1+f}x-\frac{gx_1+fy_1+c}{y_1+f}$ $\cdots$ (i)

এই সরলরেখার প্রবণতা হইল $-\frac{x_1+g}{y_1+f}$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$y-y_1=m(x-x_1)$ $\cdots$ (ii)

এই দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইবে যদি

$$-\frac{x_1+g}{y_1+f}\times m=-1 \text{ হয়} \qquad (\because m_1m_2=-1)$$

অর্থাৎ যদি $m=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$ হয়।

(ii) নং সমীকরণ হইতে পাই, $y-y_1=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$

বা, $x(y_1+f)-y(x_1+g)-fx_1+gy_1=0$

∴ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$x(y_1+f)-y(x_1+g)-fx_1+gy_1=0.$$

**মন্তব্য :** এই সমীকরণ হইতে দেখা যায় অভিলম্বের সমীকরণটি কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। অতএব অভিলম্বটি বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

4.15. **স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু নির্ণয়** *(To find the Co-ordinates of the point of contact when $y=mx+c$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$) :*

মনে কর, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি হইল স্পর্শবিন্দু।

∴ স্পর্শকের সমীকরণ হইল $xx_1+yy_1=a^2$

$$\text{বা, } y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2}{y_1} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

(i) নং সমীকরণকে $y=mx+c$ সমীকরণের সহিত তুলনা করিয়া পাই,

$$m=-\frac{x_1}{y_1}, \quad c=\frac{a^2}{y_1}$$

$$\therefore y_1=\frac{a^2}{c}, \quad x_1=-my_1=-m.\frac{a^2}{c}=\frac{-a^2m}{c}.$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক } \left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$$

আবার যেহেতু $c=a\sqrt{1+m^2}$

∴ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নিম্নলিখিতভাবেও লেখা যায়,

$$\left(-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

**4.16. স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী জ্যা** (*Chord of Contact*) :

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে যে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাহাদের স্পর্শবিন্দু দুইটিকে যোগ করিলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তাহাকে স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী জ্যা বা Chord of Contact বলে।

**4.17. স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the chord of contact*) :

$x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হইল

$$xx_1+yy_1=a^2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$xx_2+yy_2=a^2 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

যদি এই স্পর্শক দুইটি $(x', y')$ বিন্দু দিয়া যায় তাহা হইলে

$$\left.\begin{aligned} x'x_1+y'y_1=a^2 \\ x'x_2+y'y_2=a^2 \end{aligned}\right\} \text{ হইবে।}$$

ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে যে $xx'+yy'=a^2$

সরলরেখাটি $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ এই দুইটি স্পর্শবিন্দু দিয়া যায়।

$\therefore$ $(x', y')$ বিন্দুর Chord of Contact হইল $xx'+yy'=a^2$.

**4.18. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয়** (*To find the length of the tangent from an external point* $(x_1, y_1)$ *to the circles*) :

(i) $x^2+y^2=a^2$

(ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

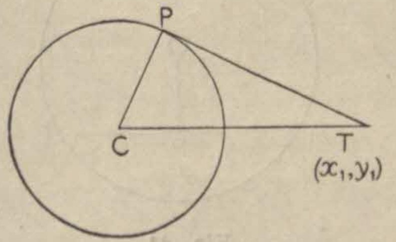



Fig. 40

মনে কর, $T(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে বৃত্তের $P$ বিন্দুতে $PT$ স্পর্শক। $C$ বিন্দু হইল বৃত্তের কেন্দ্র। $CP$ এবং $CT$ যোগ কর।

$\angle CPT$ হইল এক সমকোণ।

$CT^2 = CP^2 + PT^2$ বা, $PT^2 = CT^2 - CP^2$

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে $C$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $(0, 0)$

$CT^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}$, $CP^2 = a^2$

$\therefore \ PT^2 = CT^2 - CP^2$

$\therefore \ PT^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} - a^2$

$\therefore$ (স্পর্শক)$^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} - a^2$ ... (iii)

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

এই বৃত্তে $C$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $CP = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\therefore \ PT^2 = CT^2 - CP^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$

$\therefore \ PT^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + 2gx_1 + 2fy_1 + c \cdots$

$\therefore$ (স্পর্শক)$^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ .... (iv)

(iii) ও (iv) হইতে দেখা যাইতেছে যে, যদি বৃত্তের সমীকরণকে এমনভাবে সাজানো যায় যে $x^2$-এর সহগ $= 1$ এবং $y^2$-এর সহগ $= 1$ এবং ডানপক্ষ $= 0$ হয় তাহা হইলে বৃত্তের সমীকরণের বামদিকে $x$-এর স্থলে $x_1$, $y$-এর স্থলে $y_1$ লিখিলে $(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে বৃত্তের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের বর্গ পাওয়া যাইবে।

**4.19. বৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়।**

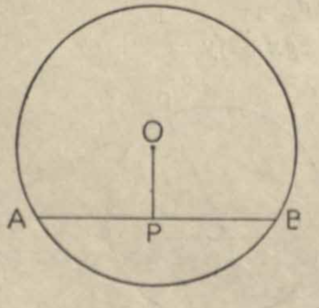



Fig. 41

(i) মনে কর, $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের $O$ বিন্দু হইল কেন্দ্র। $O$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$। $AB$ জ্যা-এর $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হইল মধ্যবিন্দু। $OP$ যোগ কর। $AB$-এর উপর $P$ বিন্দুতে $OP$ লম্ব।

$OP$-এর সমীকরণ

$$y-0=\frac{y_1-0}{x_1-0}(x-0) \qquad \cdots \qquad (1)$$

বা, $y=\frac{y_1}{x_1}x$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots \qquad (2)$$

এই দুইটি সরলরেখা লম্ব হইবে যদি $m\times\frac{y_1}{x_1}=-1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m=-\frac{x_1}{y_1}$ হয়।

(2) হইতে পাই, $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $(x-x_1)x_1+(y-y_1)y_1=0.$

(ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের $C(-g, -f)$ বিন্দু হইল কেন্দ্র। $P$ বিন্দু হইল $AB$-এর মধ্যবিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক মনে কর $(x_1, y_1)$। $P$ বিন্দুতে $CP$ লম্ব।

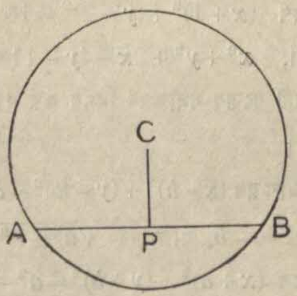





Fig. 42

$CP$-এর সমীকরণ $\quad y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1) \qquad \cdots \quad (1)$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots \quad (2)$$

যেহেতু $CP$ এবং $AB$ পরস্পর লম্ব $\quad\therefore\ m\times\frac{y_1+f}{x_1+g}=-1$

$$\therefore\ m=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

(2) নং সমীকরণ হইতে $AB$-এর সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

$\therefore$ $AB$ জ্যা-এর নির্ণেয় সমীকরণ

$$=(x-x_1)(x_1+g)+(y-y_1)(y_1+f)=0.$$

**উদাহরণ 1.** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র হইল মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ 6।

আমরা জানি, যে বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 6 তাহার সমীকরণ

$$x^2+y^2=a^2$$

এখানে $a=6$, $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2=36$.

**উদাহরণ 2.** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার ব্যাসার্ধ 4 এবং কেন্দ্র $(-1, 2)$।

আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র $(h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ $a$ হইলে বৃত্তের সমীকরণ হয়

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

এখানে $h=-1$, $k=2$, $a=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $(x+1)^2+(y-2)^2=16$

বা, $x^2+y^2+2x-4y-11=0$.

**উদাহরণ 3.** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2-b^2}$ এবং কেন্দ্র $(-a, -b)$।

মনে কর, বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$

এখানে $h=-a$, $k=-b$, ব্যাসার্ধ $=\sqrt{a^2-b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $(x+a)^2+(y+b)^2=a^2-b^2$

বা, $x^2+y^2+2ax+2by+2b^2=0$.

**উদাহরণ 4.** যে বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-6x+14y+33=0$ তাহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

$x^2+y^2-6x+14y+33=0$

বা, $x^2-2.3x+3^2-3^2+y^2+2.7y+7^2-7^2+33=0$

বা, $(x-3)^2+(y+7)^2=49+9-33$

বা, $(x-3)^2+(y+7)^2=5^2$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র হইল $(3, -7)$ এবং ব্যাসার্ধ 7.

**অন্য প্রণালী ঃ**

$x^2+y^2-6x+14y+33=0$

বা, $x^2+y^2+2.(-3)x+2.7y+33=0$

এখানে $g=-3,\ f=7,\ c=33$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র হইল $(-g,\ -f)$ অর্থাৎ $(3,\ -7)$ এবং

ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{9+49-33}=\sqrt{58-33}=\sqrt{25}=5.$

**উদাহরণ 5.** একটি বৃত্তের কেন্দ্র (3, 2), এবং ইহা (7, 5) বিন্দুগামী ; ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র (3, 2), অতএব বৃত্তের সমীকরণ হইবে

$(x-3)^2+(y-2)^2=a^2$, যেখানে $a$ হইল ব্যাসার্ধ।

বৃত্তটি (7, 5) বিন্দুগামী বলিয়া $(7-3)^2+(5-2)^2=a^2$

বা, $16+9=a^2 \quad \therefore\ a=5$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x-3)^2+(y-2)^2=25$

বা, $x^2+y^2-6x-4y-12=0.$

**উদাহরণ 6.** $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(3, 4)$ বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

যেহেতু বৃত্তটি (1, 2), (3, 2), (3, 4) বিন্দুত্রয়গামী

$\therefore\ 1+4+2g.1+2f.2+c=0 \quad \ldots$ (i)

$9+4+6g+4f+c=0 \quad \ldots$ (ii)

$9+16+6g+8f+c=0 \quad \ldots$ (iii)

বা, $2g+4f+c=-5 \quad \ldots$ (iv)

$6g+4f+c=-13 \quad \ldots$ (v)

$6g+8f+c=-25 \quad \ldots$ (vi)

(iv) − (v), $-4g=8 \quad \therefore\ g=-2$

(v) − (vi), $-4f=12 \quad \therefore\ f=-3$

(iv) হইতে পাই, $2\times(-2)+4\times(-3)+c=-5$

বা, $-4-12+c=-5$

বা, $c=-5+16=11$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2-4x-6y+11=0.$

**উদাহরণ 7.** $A(2, 3)$ ও $B(0, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ হইল $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ... (1)

এখানে $x_1=2,\ x_2=0,\ y_1=3,\ y_2=-1$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$(x-2)(x-0)+(y-3)(y+1)=0$

বা, $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**উদাহরণ 8.** $(1, 1)$ ও $(2, -3)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $3x-y-7=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (i)

এই বৃত্তের কেন্দ্র হইল $(-g, -f)$

যেহেতু বৃত্তটি $(1, 1)$ ও $(2, -1)$ বিন্দুগামী

$\therefore\ 1+1+2g+2f+c=0$ ... (ii)

$4+1+4g-2f+c=0$ ... (iii)

(ii) হইতে পাই, $2g+2f+c=-2$ ... (iv)

(iii) হইতে পাই, $4g-2f+c=-5$ ... (v)

যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, $3x-y-7=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত

$\therefore\ -3g+f-7=0$ ... (vi)

এখন $2g+2f+c=-2$ ... (iv)

$4g-2f+c=-5$ ... (v)

$-3g+f-7=0$ ... (vi)

(iv) এবং (v) নং সমীকরণ দুইটিকে যোগ করিলে আমরা পাই,

$6g+2c=-7$ ... (vii)

(iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া পাই,

$-2g+4f=3$ ... (viii)

(vi)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া এবং উহা হইতে (viii) বিয়োগ করিলে পাই,

$-10g=25 \quad \therefore\ g=-\frac{5}{2}$

এবং (vii) হইতে পাই, $2c=-7-6g=-7+6.\frac{5}{2}=8$

$\therefore\ c=4.$

(vi) হইতে পাই, $f = 7 + 3g = 7 + 3 \times (-\frac{5}{2})$

$$= \frac{14-15}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$.

**উদাহরণ 9.** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $x$-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে এবং $y$-অক্ষকে (0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে দেখা যাইতেছে যে, বৃত্তটি প্রথম পাদে অবস্থিত এবং উহার কেন্দ্র (4, 4) এবং ব্যাসার্ধ 4 ;

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$

বা, $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$.

**উদাহরণ 10.** (4, 2) বিন্দুগামী যে বৃত্তটি $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0$, যেহেতু বৃত্তটি (4, 2) বিন্দুগামী ;

$\therefore$ $16 + 4 - 16 + 12 + c = 0$ বা, $c = -16$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 16 = 0$.

**উদাহরণ 11.** নিম্নলিখিত বৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের (1, −2) বিন্দুতে ;

(ii) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ বৃত্তের (2, −1) বিন্দুতে ;

(iii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ বৃত্তের (3, 2) বিন্দুতে।

(i) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের (1, −2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$x.1 + y.(-2) = 25$ [ যেহেতু $xx_1 + yy_1 = a^2$ ]

বা, $x - 2y = 25$ ;

আবার (1, −2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$x \times -2 - y.1 = 0$ বা, $y + 2x = 0$ [ $\because xy_1 - yx_1 = 0$ ]

(ii) $x^2 + y^2 + 2x + 2(-3)y - 15 = 0$ বৃত্তের ( 2, −1 ) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

বা, $x.2 + y(-1) + 1.(x+2) + (-3)(y-1) - 15 = 0$

বা, $2x-y+x+2-3y+3-15=0$

বা, $3x-4y-10=0.$

$(2, -1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0$$

বা, $x\{-1+(-3)\}-y(2+1)+1.(-1)-(-3).2=0$

বা, $-4x-3y-1+6=0$

বা, $4x+3y+5=0.$

(iii) $x^2+y^2+2(-2)x+2(-3)y+11=0$ বৃত্তের $(3, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

বা, $x.3+y.2+(-2)(x+3)+(-3)(y+2)+11=0$

বা, $3x+2y-2x-6-3y-6+11=0$

বা, $x-y-1=0$

আবার $(3, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0$$

বা, $x(2-3)-y(3-2)+(-2).2-(-3).3=0$

বা, $-x-y-4+9=0$

বা, $x+y-5=0.$

**অন্য প্রণালীতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় :**

স্পর্শকের সমীকরণ $x-y-1=0$ হইতে স্পর্শকের gradient $(m_1)=1$

$[\because\ y=x-1]$

$(3, 2)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $y-2=m(x-3)$ ...(i)

আমরা জানি, স্পর্শকের gradient $(m_1)\times$ অভিলম্বের gradient $(m)=-1$

$$\therefore\ m_1\times m=-1$$

$$\therefore\ m=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{1}=-1$$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ হইতে অভিলম্বের সমীকরণ পাই,

$$y-2=-1(x-3) \quad \text{বা,} \quad x+y=5.$$

**উদাহরণ 12.** প্রমাণ কর $y=x+c\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

এখন $y=x+c\sqrt{2}$ হইতে $y$-এর মান $x^2+y^2=c^2$ সমীকরণে বসাইয়া পাই, $x^2+(x+c\sqrt{2})^2=c^2$

বা, $x^2+(x^2+2c^2+2\sqrt{2}.x.c)-c^2=0$

বা, $2x^2+2c^2+2\sqrt{2}.x.c-c^2=0$

বা, $x^2+\sqrt{2}x.c+\frac{c^2}{2}=0$

বা, $x^2+2.\frac{\sqrt{2}}{2}x.c+\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2=0$

বা, $\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2=0$

$\therefore\ x=-\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}$

এখন $x$-এর মানগুলি $y=x+c\sqrt{2}$ তে বসাইয়া পাই,

$y=x+c\sqrt{2}$

বা, $y=-\frac{c}{\sqrt{2}}+c\sqrt{2}=\frac{-c+2c}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}$

এবং $y=x+c\sqrt{2}=-\frac{c}{\sqrt{2}}+c\sqrt{2}=\frac{c}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ দেখা যাইতেছে যে, সরলরেখাটি বৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে উহারা সমাপতিত বিন্দু $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore\ y=x+c\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$।

**অন্য প্রণালী :** $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ $c$.

(0, 0) বিন্দু হইতে $x-y+c\sqrt{2}=0$ এর লম্বদূরত্ব

$=\frac{0-0+c\sqrt{2}}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=c$ যাহা বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore\ y=x+c\sqrt{2}$ সরলরেখাটি বৃত্তটিকে স্পর্শ করে।

এখন $y=x+c\sqrt{2}$ এবং $x^2+y^2=c^2$ কে সমাধান করিলে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ পাওয়া যাইবে।

**উদাহরণ 13.** $x^2+y^2=9$ বৃত্তের যে স্পর্শক দুইটি $3x+4y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ সর্বদাই $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

এখানে $a=3, m=-\frac{3}{4}$ $(\because 3x+4y=0, \therefore y=-\frac{3}{4}x)$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$y=-\frac{3}{4}x\pm 3\sqrt{1+\frac{9}{16}}$ ($\because$ স্পর্শকদ্বয় $3x+4y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল, অতএব $m=m_1$)

বা, $y=-\frac{3}{4}x\pm\frac{3.5}{4}$ বা, $4y=-3x\pm 15.$

$\therefore$ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হইল $3x+4y+15=0$ এবং $3x+4y-15=0.$

**অন্য প্রণালী :** যেহেতু স্পর্শকগুলি $3x+4y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল, অতএব $3x+4y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

$3x+4y+k=0$

বা, $x=-\frac{4}{3}y-\frac{k}{3}$

$x$-এর মান $x^2+y^2=9$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$\left(-\frac{4}{3}y-\frac{k}{3}\right)^2+y^2=9$

বা, $\frac{16}{9}y^2+\frac{k^2}{9}+\frac{8}{9}ky+y^2-9=0$

বা, $25y^2+8ky+k^2-81=0$

এখন যদি $3x+4y+k=0$ স্পর্শক হয় তাহা হইলে এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore\ 64k^2-4.25(k^2-81)=0$

বা, $64k^2-100k^2+8100=0$

বা, $-36k^2=-8100$

$\therefore\ k^2=\frac{900}{4}$

$\therefore\ k=\pm\frac{30}{2}=\pm 15$

$\therefore$ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হইল $3x+4y+15=0$

এবং $3x+\ y-15=0.$

**উদাহরণ 14.** $x^2+y^2=9$ বৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $4x+3y+5=0$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$4x+3y+5=0$-এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $3x-4y+k=0$

$x^2+y^2=9$ বৃত্তটির কেন্দ্র হইল $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=3$

$\therefore$ $3x-4y+k=0$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=9$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $(0, 0)$ হইতে সরলরেখাটির দূরত্ব $\pm 3$ হয় অর্থাৎ যদি

$$\frac{3.0-4.0+k}{\sqrt{9+16}}=\pm 3 \quad \therefore \quad k\pm=15$$

নির্ণেয় সমীকরণ $3x-4y+15=0$ এবং $3x-4y-15=0$.

**অন্য প্রণালী ঃ** $4x+3y+5=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ $3x-4y+k=0$

বা, $x=\frac{4}{3}y-\frac{k}{3}$

$x$-এর মান $x^2+y^2=9$-এ বসাইয়া পাই,

$$\left(\frac{4}{3}y-\frac{k}{3}\right)^2+y^2=9$$

বা, $25y^2-8ky+k^2-81=0$ ... (i)

এখন যদি $3x-4y+k=0$ বৃত্তের স্পর্শক হয় তাহা হইলে এই দ্বিঘাত সমীকরণ (i)-এর বীজদ্বয় সমান হইবে,

$\therefore$ $64k^2+4.25(k^2-81)=0$ বা, $k^2=\frac{900}{4}$

$\therefore$ $k=\pm\frac{30}{2}=\pm 15.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $3x-4y\pm 15=0.$

**উদাহরণ 15.** প্রমাণ কর $x^2+y^2+2ax+c^2=0$ এবং $x^2+y^2+2by+c^2=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিলে $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$ হইবে।

$x^2+y^2+2ax+c^2=0$ ... (i)

বা, $(x+a)^2+y^2=(\sqrt{a^2-c^2})^2$

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র $(-a, 0)$, ব্যাসার্ধ $=\sqrt{a^2-c^2}$

$x^2+y^2+2by+c^2=0$ ... (ii)

বা, $x^2+(y+b)^2=(\sqrt{b^2-c^2})^2$

(ii) নং বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -b)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{b^2-c^2}$ যেহেতু দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে। অতএব কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব = বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের যোগফল বা বিয়োগফল।

এখন কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব $= \sqrt{a^2+b^2}$

ব্যাসার্ধ দুইটির যোগফল $= \sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2}$

$\therefore$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2}$ হয়

বা, $a^2+b^2 = a^2-c^2+b^2-c^2+2\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$

বা, $2c^2 = 2\sqrt{a^2b^2-c^2(a^2+b^2)+c^4}$

বা, $c^4 = a^2b^2-c^2(a^2+b^2)+c^4$

বা, $c^2(a^2+b^2) = a^2b^2$

বা, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$.

**উদাহরণ 16.** $(4, -3)$ বিন্দু হইতে $x^2+y^2+2x-4x+4=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$(4, -3)$ বিন্দু হইতে $x^2+y^2+2x-4x+4=0$ বৃত্তের স্পর্শক $PT$ হইলে

$PT^2 = 16+9+8+12+4$

$= 37+12 = 49$

$\therefore \; PT = 7$

$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= 7$.

**উদাহরণ 17.** $x+y-7=0$ সরলরেখা $x^2+y^2+8x+6y-75=0$ বৃত্তটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিলে যে জ্যা উৎপন্ন হয় তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$x+y-7=0$ এবং $x^2+y^2+8x+6y-75=0$ এই দুইটি সমীকরণকে সমাধান করিলে ছেদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক হইবে $(2, 5)$ এবং $(4, 3)$।

$\therefore$ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-4)^2+(5-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

## প্রশ্নমালা 4

এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার

1. কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ $=3$

2. কেন্দ্র (2, 4) এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{61}$

3. কেন্দ্র (2, 3) এবং ব্যাসার্ধ $=5$

4. কেন্দ্র $(3, -7)$ এবং ব্যাসার্ধ $=5$

5. কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ $=2\sqrt{3}$

6. কেন্দ্র $(-1, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $=1$

7. কেন্দ্র $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

8. কেন্দ্র (2, 3) এবং বৃত্তটি (5, 7) বিন্দুগামী

9. কেন্দ্র $(g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{f^2+g^2}$

10. কেন্দ্র $\left(\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mc}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $=c$

11. কেন্দ্র (1, 1) এবং ব্যাসার্ধ $=1$.

12. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার ব্যাস হইল $A(0, -1)$ এবং $B(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা।

13. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র (5, 7) এবং বৃত্তটি $2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী।

নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

14. $x^2+y^2+6x-4y-3=0$

15. $x^2+10x+y^2+12x-39=0$

16. $x^2+y^2+8x+10y+29=0$

17. $x^2+y^2+6x-4y+7=0$

18. $x^2+y^2-2ax+2by-2ab=0$

19. $x^2+y^2+2ax+2by+2b^2=0$

বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি দিয়া যায় :

20. $(1, 2), (3, -4), (5, -6)$

21. $(2, -1), (2, 3), (4, -1)$

22. $(1, 1), (2, -1), (3, 2)$

23. $(0, 1), (1, 0), (2, 1)$

24. $(0, 1), (3, 0)$ এবং $(0, 6)$

বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

25. যাহার কেন্দ্র (2, 3) এবং বৃত্তটি (3, $-2$) বিন্দুগামী।

26. যখন বৃত্তটি (4, 2), ($-6$, $-2$) বিন্দুদ্বয়গামী এবং কেন্দ্র $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

27. যাহার কেন্দ্র ($-1$, $-5$) এবং বৃত্তটি $x$-অক্ষকে স্পর্শ করে।

28. (i) যখন বৃত্তটি (0, $-3$), (4, 0) বিন্দুদ্বয়গামী এবং কেন্দ্র $x+2y=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

(ii) যখন বৃত্তটি (1, $-2$) এবং (4, $-3$) বিন্দুদ্বয়গামী এবং বৃত্তের কেন্দ্র $3x+4y-7=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

29. (i) দেখাও যে (16, 1), (16, 3), (14, 7), (2, 3) বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ (concyclic)।

(ii) দেখাও যে (0, 0), (1, 1), (5, $-5$), (6, $-4$) বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

30. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y-1=0$ এবং $x^2+y^2-12x+4y-1=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্র তিনটি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত।

31. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-4x+2y=0$, $x^2+y^2-6x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-10y+25=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্র তিনটি সমরেখ (collinear)।

32. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-12x-6y-4=0$ এবং $x^2+y^2-12x+2y+28=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে internally স্পর্শ করে।

33. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $x^2+y^2-8x+10y+5=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক এবং (3, 2) বিন্দুগামী।

34. দেখাও যে $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ এবং $x^2+y^2-10x+4y+20=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে externally স্পর্শ করে।

35. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-2x+4y=0$ এবং $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে externally স্পর্শ করে।

36. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র এবং বাহুর দৈর্ঘ্য $a$। $AB$-কে $x$-অক্ষ এবং $AD$-কে $y$-অক্ষ ধরিয়া এবং $A, B, C, D$ বিন্দু চারিটি দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কন করা যায় (circumcircle) দেখাও যে তাহার সমীকরণ $x^2+y^2=a(x+y)$।

37. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $(4, -1)$ ও $(3, 6)$ বিন্দুদ্বয়গামী এবং কেন্দ্র $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

38. যে বৃত্তের ব্যাস হইল $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা সেই বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

39. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা মূলবিন্দুগামী এবং বৃত্তটি $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 6 একক এবং $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 8 একক কাটিয়া লয়।

40. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-2x+6y+1=0$, $x^2+y^2+4x-12y-9=0$, $x^2+y^2-16=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্র তিনটি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত।

41. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা মূলবিন্দুগামী এবং $3x+4y=12$ সরলরেখা $x$-অক্ষ এবং $y$-অক্ষকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে সেই বিন্দু দুইটি দিয়া যায়।

42. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $(0, 4)$ বিন্দুগামী এবং $x$-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

43. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা মূলবিন্দু হইতে $x$-অক্ষকে 5 একক দূরত্বে এবং $y$-অক্ষকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

44. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+2gx+2fy-1=0$, $x^2+y^2-12x+4y-1=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্র তিনটি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে যদি $g+3f=0$ হয়।

45. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y-6=0$, $x^2+y^2-4x-12y-9=0$ বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ তিনটি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

46. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ এবং $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ বৃত্ত দুইটি $(3, -1)$ বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে।

47. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $x^2+y^2+\frac{5}{2}x-3y+1=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক এবং ব্যাসার্ধ $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

48. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং উহা $x^2+y^2+2x+2y-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায়।

49. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র $x-4y+7=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং $x$-অক্ষকে $(2, 0)$ এবং $(6, 0)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে।

50. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার ব্যাস $(3, 7)$, $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা। দেখাও যে $x+y-4=0$ সরলরেখা বৃত্তের স্পর্শক।

বৃত্তের স্পর্শকের এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

51. $x^2+y^2=16$ বৃত্তের $(2, 3)$ বিন্দুতে ;

52. $x^2+y^2=5$ বৃত্তের $(2, -1)$ বিন্দুতে ;

53. $x^2+y^2+16x-14y-56=0$ বৃত্তের $(-?, -5)$ বিন্দুতে ;

54. $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ বৃত্তের $(3, 2)$ বিন্দুতে ;

55. $x^2+y^2-3x+10y-15=0$ বৃত্তের $(4, -1)$ বিন্দুতে ;

56. $x^2+y^2+4x+6y-87=0$ বৃত্তের $(6, 3)$ বিন্দুতে।

57. $x^2+y^2=3$ বৃত্তের দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $x$-অক্ষের সহিত $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

58. $x^2+y^2=16$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $x+2y+4=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

59. দেখাও যে $y=x+c\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

60. দেখাও যে $3x+4y+7=0$ সরলরেখা $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

61. $m$-এর মান কত হইলে $y=mx+13$ সরলরেখা $x^2+y^2=144$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে ?

62. প্রমাণ কর যে $x+y=2+\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

63. দেখাও যে $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ বৃত্তটি $x$-অক্ষ এবং $y$-অক্ষকে স্পর্শ করে।

64. $y+3x-5=0$ এবং $x+y+1=0$ সরলরেখা দুইটি একটি বৃত্তের দুইটি ব্যাস এবং বৃত্তটি $3x-4y=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

65. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র (3, 4) এবং বৃত্তটি $5x+12y-11=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

66. $x^2+y^2=25$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $4x+3y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

67. $x^2+y^2-3x+10y-15=0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $12x+5y=1$ সরলরেখার উপর লম্ব। স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

68. দেখাও যে $x-y+2=0$ সরলরেখা $x^2+y^2=2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

69. $x+y=7$ সরলরেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

70. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা মূলবিন্দুগামী এবং $3x+4y-12=0$ সরলরেখা $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে সেই দুইটি বিন্দু দিয়া যায়।

71. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তকে $3x+4y+7=0$ সরলরেখা স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

72. দেখাও যে $x^2+y^2=25$ বৃত্তের (3, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x^2+y^2-8x+6y=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

73. প্রমাণ কর যে $y=mx$ সরলরেখা $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $(g+mf)^2=c(1+m^2)$ হয়।

74. $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $3x+4y+5=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

75. (2, 3) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=4$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

76. (4, 7) বিন্দু হইতে $x^2-4x+y^2-6y+12=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

77. $(h, k)$ বিন্দু হইতে $x^2+y^2=6$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2+y^2+3x+3y=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে

$$h^2+k^2+4h+4k+2=0.$$

# পঞ্চম অধ্যায়

## শঙ্কুচ্ছেদ (Conic Sections)

5.1. যদি কোন সমতলে কোন বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে ঐ তলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ঐ বিন্দুটির দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সবসময় ধ্রুবক (Constant) থাকে, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চার-পথকে (Locus) একটি **শঙ্কুচ্ছেদ** (Conic Section) বলে।

ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে **নাভি** (Focus) বলে এবং সাধারণত ইহাকে $S$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। এই ধ্রুবক অনুপাতকে (Constant ratio) উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) বলে এবং ইহাকে $e$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাকে **নিয়ামক** (Directrix) বলা হয়। যে সরলরেখা Focus-এর মধ্য দিয়া যায় এবং Directrix-এর উপর লম্ব তাহাকে **অক্ষ** (Axis) বলা হয়। এই অক্ষ (Axis) Conic Section-কে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ঐ Conic Section-এর **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে। সাধারণতঃ Vertex-কে $A$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(i) যখন উৎকেন্দ্রতা $(e)=1$ হয়, তখন Conic Section-টিকে অধিবৃত্ত (Parabola) বলা হয়।

(ii) যখন উৎকেন্দ্রতা $(e)<1$ হয়, তখন Conic Section-টিকে উপবৃত্ত (Ellipse) বলা হয়।

(iii) যখন উৎকেন্দ্রতা $(e)>1$ হয়, তখন Conic Section-টিকে পরাবৃত্ত (Hyperbola) বলা হয়।

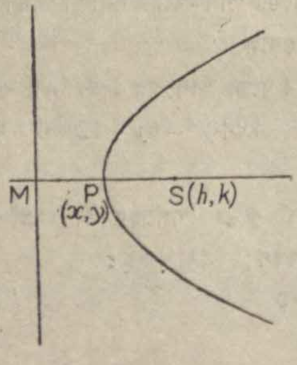



Fig. 43

**5.2. Conic Section-এর সাধারণ সমীকরণ** (*General equation of the Conic Section*) :

মনে কর, নাভি (Focus) $S$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ এবং নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ $lx+my+n=0$। আবার মনে কর, চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$। যদি $P$ হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব $PM$ টানা যায়, তাহা হইলে $SP=ePM$ হইবে।

∴ Conic Section-এর সমীকরণ হইবে,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}.$$

ইহাকে সরল করিলে Conic Section-এর সাধারণ রূপ হইবে,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

যেখানে $a$, $b$, $h$, $g$, $f$, $c$ সহগগুলি $x$ ও $y$ হইতে স্বাধীন (free from $x$ and $y$).

### 5.3. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় *(To find the equation to a Parabola)* :

মনে কর, $S$ নাভি (Focus), $ZM$ নিয়ামক (Directrix), $A$ শীর্ষবিন্দু (Vertex), $S$ হইতে নিয়ামকের উপর $SZ$ লম্ব। এই লম্ব অধিবৃত্তকে $A$ বিন্দুতে ছেদ করে। $A$ বিন্দুকে মূলবিন্দু হিসাবে ধরিয়া লও। $AX$-কে $x$-অক্ষ এবং $AX$-এর উপর লম্ব $AY$-কে $y$-অক্ষ ধর। অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু লও। মনে কর, $AS=a$. ∴ $AS=AZ=a$.

$SP$ যোগ কর। $P$ বিন্দু হইতে $AX$-এর উপর $PN$ লম্ব এবং $ZM$-এর উপর $PM$ লম্ব টান। এখানে $SP=PM$ ( ∵ $e=1$ )

∴ $SP^2=PM^2$

এখন, $PNS$ সমকোণী ত্রিভুজের $SN^2+PN^2=SP^2$

বা, $PN^2=SP^2-SN^2$

$=PM^2-SN^2=ZN^2-SN^2$

( ∵ $PM=ZN$ )

এখন, $SN=AN-AS=x-a$

$ZN=AN+AZ=x+a$

$PN=y$

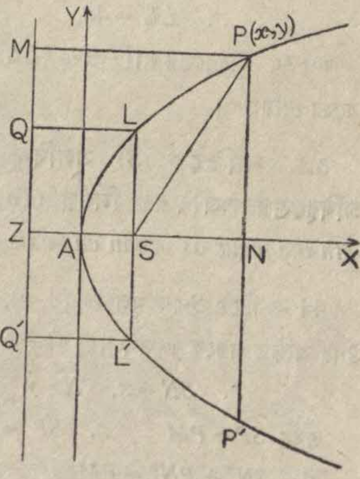



Fig. 44

∴ $PN^2=ZN^2-SN^2$

বা, $y^2=(x+a)^2-(x-a)^2$

বা, $y^2 = x^2 + a^2 + 2ax - x^2 - a^2 + 2ax$

বা, $y^2 = 4ax.$

$\therefore$ অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y^2 = 4ax.$

**মন্তব্য :** অধিবৃত্তের উপরিস্থিত $P$ বিন্দুর ভুজ হইল $AN$ এবং কোটি হইল $PN$। $A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, নাভি $S$-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $x = -a.$

এখন যদি $PN$-কে বর্ধিত করা যায় তাহা হইলে উহা অধিবৃত্তকে $P'$ বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষেত্রে $P'$ বিন্দুরও ভুজ হইবে $AN$। $PNP'$-কে দ্বিকোটি (double ordinate) বলা হয়। নাভি $S$-এর মধ্য দিয়া $LSL'$ double ordinate-কে অধিবৃত্তের নাভিলম্ব (Latusrectum) বলে।

আমরা জানি, $SA = AZ = a$

$\therefore \quad SZ = 2a.$

এখানে $SL = LQ,\ SL' = L'Q',$

$$\therefore \quad LL' = SL + SL' = LQ + L'Q'$$
$$= SZ + SZ = 2SZ = 2.2a = 4a$$
$$\therefore \quad LL' = 4a.$$

অতএব অধিবৃত্তের নাভিলম্বের ($LL'$) দৈর্ঘ্য নাভি ($S$) হইতে শীর্ষবিন্দুর ($A$) দূরত্বের চারিগুণ।

### 5.4. নাভিকে (S) মূলবিন্দু এবং অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (*To find the equation of a Parabola with the focus as origin and axis as the x-axis*) :

44 নং চিত্রে $S$-কে মূলবিন্দু $(0, 0)$, $SX$-কে $x$-অক্ষ, $S$ বিন্দু দিয়া $SX$-এর উপর অঙ্কিত লম্বকে $y$-অক্ষ ধরা হইল।

$$\therefore \quad SN = x,\ PN = y$$

এখন $SP = PM \quad \therefore \quad SP^2 = PM^2$

বা, $SN^2 + PN^2 = PM^2 \qquad (\because \quad SP^2 = SN^2 + PN^2)$

বা, $SN^2 + PN^2 = ZN^2 \qquad (\because \quad PM = ZN)$

বা, $SN^2 + PN^2 = (ZS + SN)^2$

বা, $x^2+y^2=(2a+x)^2$

বা, $x^2+y^2=4a^2+x^2+4ax$

$\therefore\ y^2=4a(x+a)$, ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** এক্ষেত্রে $S$-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, $A$-এর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$, $ZM$-এর সমীকরণ $x=-2a$.

**5.5. অক্ষকে x-অক্ষ এবং নিয়ামককে (Directrix) y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a Parabola where the axis is x-axis and the Directrix is the y-axis*) :

44 নং চিত্রে $Z$-কে মূলবিন্দু $(0, 0)$, $ZX$-কে $x$-অক্ষ, $ZM$-কে $y$-অক্ষ ধরা হইল।

$\therefore\ ZN=x,\ PN=y$ এবং $SP=PM \quad (\because\ e=1)$

$\therefore\ SP^2=PM^2$

বা, $SN^2+PN^2=ZN^2 \quad (\therefore\ SP^2=SN^2+PN^2$ এবং $PM=ZN)$

বা, $(ZN-ZS)^2+PN^2=ZN^2 \quad (\therefore\ SN=ZN-ZS=x-2a)$

বা, $(x-2a)^2+y^2=x^2$

বা, $x^2+4a^2-4ax+y^2=x^2$

বা, $y^2=4ax-4a^2$

$\therefore\ y=4a(x-a)$, ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** এখানে $Z$-এর স্থানাঙ্ক $(2a, 0)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $x=0$.

অনুরূপভাবে অধিবৃত্তের অক্ষকে $y$-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি পাওয়া যায় :

(i) $x^2=4ay$, $A$-কে মূলবিন্দু ধরিয়া ;

(ii) $x^2=4a(y+a)$, $S$-কে মূলবিন্দু ধরিয়া ;

(iii) $x^2=4a(y-a)$, অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু যখন মূলবিন্দু।

**5.6. অধিবৃত্তের সমীকরণের বিভিন্ন রূপ** (*Different forms of the equation of a Parabola*) :

(i) নাভি ($S$) যদি শীর্ষবিন্দু ($A$)-এর ডানদিকে থাকে, অধিবৃত্তের অক্ষ $x$-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু ($A$) মূলবিন্দু হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2=4ax$.

এখানে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক ($a$, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=-a$. [Fig. 45]

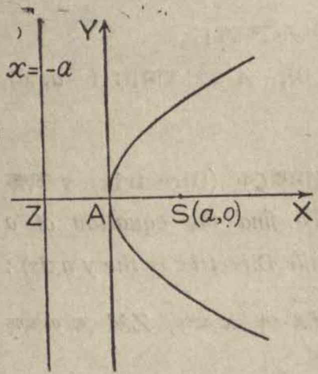



Fig. 45

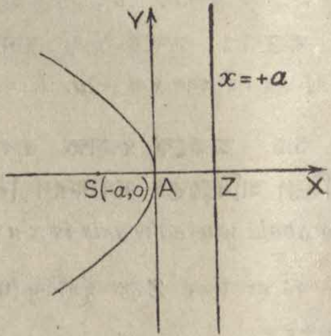



Fig. 46

(ii) নাভি ($S$) যদি শীর্ষবিন্দুর ($A$) বামদিকে থাকে, অধিবৃত্তের অক্ষ $x$-অক্ষ, শীর্ষবিন্দু ($A$) মূলবিন্দু হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2=-4ax$.

এখানে শীর্ষবিন্দু ($A$)-এর স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক ($-a$, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=a$. [Fig. 46]

(iii) যদি অধিবৃত্তের অক্ষ $y$-অক্ষ, নাভি যদি $A$-এর উপর দিকে থাকে, $A$ মূলবিন্দু হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2=4ay$.

এখানে শীর্ষবিন্দুর ($A$) স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক (0, $a$) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y=-a$. [Fig 47]

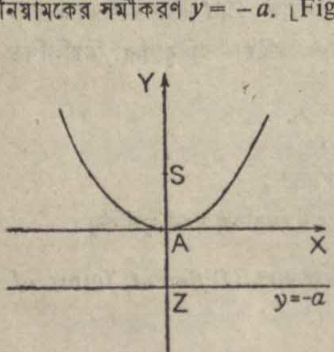



Fig. 47

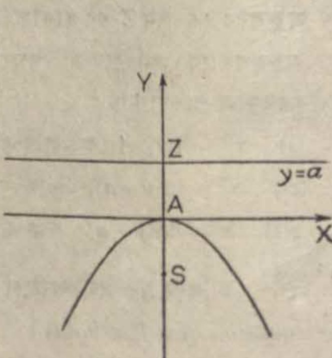



Fig. 48

(iv) অধিবৃত্তের অক্ষ $y$-অক্ষ, নাভি ($S$) শীর্ষবিন্দু $A$-এর নীচের দিকে থাকে, শীর্ষবিন্দু $A$ হইল মূলবিন্দু, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2 = -4ay$.

এখানে শীর্ষবিন্দু $A$-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, নাভির ($S$)-এর স্থানাঙ্ক $(0, -a)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y = a$. [Fig. 48]

**5.7. অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** ***(To find the equation of a Parabola when the axis of the Parabola is parallel to x-axis) :***

মনে কর, অধিবৃত্তের অক্ষ $x$-অক্ষের সমান্তরাল। মনে কর, $A$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$। মনে কর, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ ($OX$ ও $OY$ অক্ষ দুইটি অনুসারে)

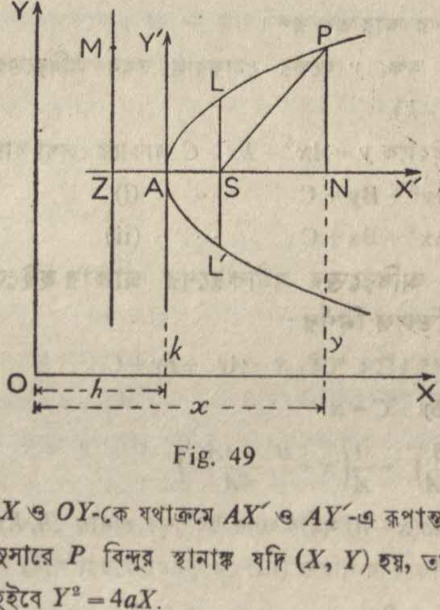



Fig. 49

এখন যদি $OX$ ও $OY$-কে যথাক্রমে $AX'$ ও $AY'$-এ রূপান্তরিত করা যায় এবং এই অক্ষ অনুসারে $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি $(X, Y)$ হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $Y^2 = 4aX$.

এখন $X = x - h$, $Y = y - k$

$\therefore$ $Y^2 = 4aX$ সমীকরণ হইতে পাই, $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.

দ্রষ্টব্য : নাভির স্থানাঙ্ক $(a+h, k)$, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$, নাভিলম্ব $LL' = 4a$.

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ $x = h - a$, $LL'$-এর সমীকরণ $x = h + a$.

মন্তব্য : (i) অনুরূপভাবে অধিবৃত্তের অক্ষ যদি $y$-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $(x-h)^2=4a(y-k)$.

(ii) অধিবৃত্তের অক্ষ যখন $x$-অক্ষের সমান্তরাল অধিবৃত্তের সমীকরণ

$$(y-k)^2=4a(x-h)$$

বা, $y^2+k^2-2yk=4ax-4ah$

বা, $4ax=y^2+k^2-2yk+4ah$

$$\therefore\ x=\frac{y^2}{4a}-\frac{k}{2a}y+\frac{k^2+4ah}{4a}$$

ইহাকে লেখা যায় $x=Ay^2+By+C$

ইহা সমীকরণের আর এক রূপ।

আবার যখন অক্ষ, $y$-অক্ষের সমান্তরাল তখন অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $(x-h)^2=4a(y-k)$.

অনুরূপভাবে ইহাকে $y=Ax^2+Bx+C$ আকারে লেখা যায়।

5.8. $\mathbf{x=Ay^2+By+C}$ ... (i)

$\mathbf{y=Ax^2+Bx+C}$ ... (ii)

**এই দুইটি অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হইতে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও নাভিলম্ব নির্ণয় :**

(i) নং সমীকরণ হইতে পাই, $x=Ay^2+By+C$

বা, $Ay^2+By+C=x$

$$\text{বা, } \left(y+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{1}{A}\left(x+\frac{B^2-4AC}{4A}\right) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

$(y-k)^2=4a(x-h)$ সমীকরণের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$

$\therefore$ এই সমীকরণের সহিত (iii)-কে তুলনা করিয়া পাই, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{B^2-4AC}{4A}, -\frac{B}{2A}\right)$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{A}$.

(ii) নং সমীকরণ $y=Ax^2+Bx+C$ কে অনুরূপভাবে

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{1}{A}\left(y+\frac{B^2-4AC}{4A}\right) \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

এখন, $(x-h)^2=4a(y-k)$ সমীকরণের সহিত (iv)-কে তুলনা করিলে দেখা যায় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$ এবং নাভিলম্ব $\frac{1}{A}$.

5.9. **অধিবৃত্তের নাভি ($S$) এবং নিয়ামক (Directrix) দেওয়া থাকিলে অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the general equation of a Parabola when its focus and the equation of the directrix are given*) :

মনে কর, নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $Ax+By+C=0$। অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু লও। $SP$ যোগ কর। $P$ হইতে নিয়ামকের উপর $PM$ লম্ব টান।

$\therefore \quad SP=PM$

বা, $SP^2=PM^2 \quad \cdots \quad$ (i)

এখন যেহেতু $S$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ এবং $P$-এর স্থানাঙ্ক $(x, y)$,

$\therefore \quad SP^2=(x-h)^2+(y-k)^2$

$P(x, y)$ হইতে নিয়ামক $Ax+By+C=0$ এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$PM=\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

আবার যেহেতু $SP^2=PM^2$

$$\therefore \quad (x-h)^2+(y-k)^2=\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

বা, $(A^2+B^2)\{(x-h)^2+(y-k)^2\}=(Ax+By+C)^2$

ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

5.10. **$y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়** (*To find the condition that the straight line $y=mx+c$ may touch the Parabola $y^2=4ax$*) :

$y=mx+c$ হইতে $y$-এর মান $y^2=4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$(mx+c)^2=4ax$

বা, $m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ $x$-এর দুইটি বীজ হইবে।

সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি এই বীজ দুইটি সমান হয়। বীজ দুইটি সমান হইবার শর্ত হইল

$$4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$$

বা, $m^2c^2+4a^2-4amc-m^2c^2=0$

বা, $4amc = 4a^2$

$\therefore \quad c = \dfrac{a}{m}$

$\therefore \quad y = mx + c$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি $c = \dfrac{a}{m}$ হয়।

$\therefore \quad y = mx + \dfrac{a}{m}$ হইল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ।

এখন আমরা স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিব।

$y = mx + \dfrac{a}{m}$ হইতে $y$-এর মান $y^2 = 4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$\left(mx + \dfrac{a}{m}\right)^2 = 4ax \qquad$ বা, $\left(mx - \dfrac{a}{m}\right)^2 = 0$

বা, $mx = \dfrac{a}{m}, \dfrac{a}{m} \qquad \therefore \quad x = \dfrac{a}{m^2}, \dfrac{a}{m^2}$.

$x$-এর মান $y = mx + \dfrac{a}{m}$ এই সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y = m.\frac{a}{m^2} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$$

$\therefore \quad y = \dfrac{2a}{m}, \dfrac{2a}{m}$

$\therefore$ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$.

**5.11. $y = mx + c$ সরলরেখার সহিত $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের ছিন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়** (*To find the length of the chord of the Parabola $y^2 = 4ax$ intercepted on the line $y = mx + c$*) :

মনে কর, $y = mx + c \qquad \cdots \qquad$ (i)

সরলরেখা $y^2 = 4ax \qquad \cdots \qquad$ (ii)

অধিবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে।

(i) নং হইতে $y$-এর মান $y^2 = 4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$(mx + c)^2 = 4ax$$

বা, $\quad m^2x^2 + 2x(mc - 2a) + c^2 = 0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ $x$-এর দুইটি বীজ হইবে। মনে কর, বীজ দুইটি $x_1$ এবং $x_2$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{2(mc-2a)}{m^2}, x_1x_2 = \frac{c^2}{m^2}$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \frac{4(mc-2a)^2}{m^4} - \frac{4c^2}{m^2} = \frac{16a(a-mc)}{m^4}.$$

যেহেতু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি $y = mx + c$ সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad y_1 = mx_1 + c,\ y_2 = mx_2 + c$$

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

$\therefore$ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}}$

$$= \sqrt{\frac{16a(a-mc)}{m^4}^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16a(a-mc)}{m^4} + m^2\frac{16a(a-mc)}{m^4}}$$

$$= \frac{4}{m^2}\sqrt{(1+m^2)a(a-mc)}$$

$$= \frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a(a-mc)}.$$

**মন্তব্য ঃ** যখন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= 0$ তখন $y = mx + c$ রেখা $y^2 = 4ax$-এর স্পর্শক হইবে। স্পর্শক হইবার শর্ত হইল $\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a(a-mc)} = 0$.

যেহেতু $m$ অথবা $a$ কোনটাই শূন্য নয়

$$\therefore \quad a - mc = 0$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হইল $c = \frac{a}{m}$.

**5.12. $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the tangent at the point $(x_1, y_1)$ to the Parabola $y^2 = 4ax$*) :

মনে কর, অধিবৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ ছাড়া আর একটি $P$-এর নিকটস্থ বিন্দু $Q(x_2, y_2)$।

এখন, $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \qquad \dots \qquad \text{(i)}$$

যেহেতু $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ অধিবৃত্তের উপরে অবস্থিত

$\therefore\ y_1^2 = 4ax_1,\ y_2^2 = 4ax_2$

$\therefore\ y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$

বা, $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4a(x_1 - x_2)$

বা, $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \qquad \dots \qquad \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে পাই, $y - y_1 = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$.

এখন যদি $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু ক্রমশঃ অগ্রসর হইয়া $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যায় তবে $y_2 = y_1$, $x_2 = x_1$ হইবে এবং সরলরেখাটি $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

বা, $yy_1 = y_1^2 - 2ax_1 + 2ax = 4ax_1 - 2ax_1 + 2ax$

বা, $yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

**5.13. $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the normal at the point $(x_1, y_1)$ to the Parabola $y^2 = 4ax$*) :

$(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ
$yy_1 = 2a(x + x_1)$

বা, $$y = \frac{2a}{y_1}(x + x_1) \qquad \dots \qquad \text{(i)}$$

$(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \dots \qquad \text{(ii)}$$

ইহা স্পর্শকের উপর লম্ব হইবে যদি $m \times \frac{2a}{y_1} = -1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m = -\frac{y_1}{2a}$ হয়।

(ii) নং সমীকরণ হইতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

বা, $2ay - 2ay_1 = -y_1 x + y_1 x_1$

বা, $y_1 x + 2ay = y_1(x_1 + 2a)$

ইহা হইল অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ।

**5.14. প্রবণতা (m)-এর দ্বারা অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of the normal in terms of the Gradient)* :

আমরা জানি, $m = -\frac{y_1}{2a} \quad \therefore \; y_1 = -2am.$

আবার $y_1^2 = 4ax_1, \quad \therefore \; x_1 = \frac{y_1^2}{4a} = \frac{4a^2m^2}{4a} = am^2$

$\therefore \; y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ সমীকরণ হইতে পাই,

বা, $y + 2am = +\frac{2am}{2a}(x - am^2)$

বা, $y + 2am = mx - am^3$

$\therefore \; y = mx - 2am - am^3 - am^3$ হইল অভিলম্বের সমীকরণ (Gradient এর দ্বারা)।

**মন্তব্য:** অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে এই অভিলম্ব সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am^2, -2am)$।

**5.15. কোন বিন্দু (h, k) হইতে অধিবৃত্তের ($y^2 = 4ax$) তিনটি অভিলম্ব টানা যায়** *[Through any point (h, k) three normals can be drawn to a Parabola ($y^2 = 4ax$)]* :

মনে কর, $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y = mx - 2am - am^3$। যদি ইহা $(h, k)$ বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে

$$k = mh - 2am - am^3$$

বা, $am^3 + 2am - mh + k = 0$ বা, $am^3 + m(2a - h) + k = 0$

ইহা $m$-এর ত্রিঘাত সমীকরণ। সুতরাং $m$-এর তিনটি বীজ থাকিবে।

∴ যে-কোন বিন্দু $(h, k)$ হইতে অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর উপরে তিনটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়।

**মন্তব্য :** মনে কর, $m$-এর বীজগুলি $m_1, m_2, m_3$।

∴ যে তিনটি বিন্দুতে অভিলম্ব অঙ্কন করা হইবে তাহাদের স্থানাঙ্ক হইবে $(am_1^2, -2am_1), (am_2^2, -2am_2), (am_3^2, -2am_3)$।

**5.16. বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু (h, k) হইতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়** [*Two tangents can be drawn to a Parabola $y^2 = 4ax$ from an external point $(h, k)$*] :

মনে কর, $y = mx + \frac{a}{m}$ হইল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। যদি এই স্পর্শক $(h, k)$ বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে $k = mh + \frac{a}{m}$ হইবে।

বা, $m^2h - mk + a = 0$.

ইহা $m$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব $m$-এর দুইটি মান পাওয়া যায়।

∴ $(h, k)$ এই বহিঃস্থ বিন্দু হইতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

**5.17. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা (Chord of Contact)-এর সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the chord of contact of any point with respect to the Parabola $y^2 = 4ax$*) :

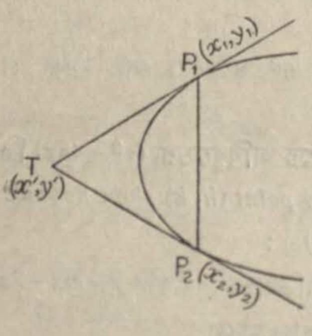



Fig. 50

মনে কর, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটিতে $P_1T$ এবং $P_2T$ এই দুইটি স্পর্শক হইয়াছে।

$P_1(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ... (i)

$P_2(x_2, y_2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_2 = 2a(x + x_2)$ ... (ii)

যদি স্পর্শক দুইটি $T(x', y')$ বিন্দুতে মিলিত হয় তাহা হইলে

$$y'y_1 = 2a(x' + x_1) \quad \cdots \text{(iii)}$$

$$y'y_2 = 2a(x' + x_2) \quad \cdots \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) হইতে আমরা দেখিতে পাই যে $yy' = 2a(x + x')$ এই সরলরেখা $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি দিয়া যায়। অর্থাৎ এই সরলরেখা $T(x', y')$ বিন্দু হইতে যে দুইটি স্পর্শক টানা হইয়াছে তাহাদের স্পর্শ-বিন্দু দিয়া $yy' = 2a(x + x')$ সরলরেখা যায়।

$\therefore$ $(x', y')$ বিন্দুর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ হইল $yy' = 2a(x + x')$

**5.18. উপস্পর্শক (*Subtangent*) ও উপঅভিলম্ব (*Subnormal*) :**

$P$ হইল অধিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $P$ বিন্দুতে $PT$ স্পর্শক এবং $PG$ অভিলম্ব। অক্ষের উপর $PN$ লম্ব টান। স্পর্শক $PT$ এবং অভিলম্ব $PG$ অক্ষকে যথাক্রমে $T$ ও $G$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $PN$ হইল $P$ বিন্দুর কোটি (ordinate)। তাহা হইলে $NT$-কে বলা হয় $P$-এর উপস্পর্শক এবং $NG$-কে বলা হয় $P$-এর উপঅভিলম্ব।

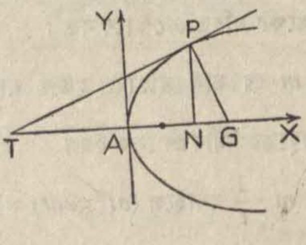



Fig. 51

**5.19. উপস্পর্শক ও উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (*To find the length of the Subtangent and the Sub-normal*) :**

মনে কর, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$।

$P$ বিন্দুতে স্পর্শক $PT$-এর সমীকরণ হইল $yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \cdots$ (i)

যেহেতু স্পর্শক $PT$, $x$-অক্ষকে $T$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, অতএব $T$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির করিতে হইলে (i) নং সমীকরণে $y = 0$ হইবে।

$$\therefore \quad x = -x_1 \quad \cdots \text{(ii)}$$

আমরা জানি, $A$ মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং $AN = x_1$, $PN = y_1$

$\therefore$ $T$ বিন্দুর ভুজ $= -x_1$, অর্থাৎ $AT$-এর দূরত্ব $x_1$

আবার যেহেতু $AN = x_1$ $\therefore$ $AT = AN$.

$\therefore$ $NT = AN + AT = 2AN = P$-এর ভুজের দ্বিগুণ।

অতএব দেখা গেল Subtangent $NT$, শীর্ষবিন্দু $A$-তে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

আবার যেহেতু $GNP$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ, $\therefore \quad PN^2 = TN.NG$

$$\therefore \quad \text{Sub-normal } NG = \frac{PN^2}{TN} = \frac{PN^2}{2AN} = \frac{y_1^2}{2x_1} = \frac{4ax_1}{2x_1} = 2a.$$

$\therefore \quad NG = 2a =$ নাভিলম্বের অর্ধেক।

**মন্তব্য :** নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য যেহেতু ধ্রুবক, অতএব অধিবৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্যও ধ্রুবক হইবে।

**5.20. পরমাত্রিক স্থানাঙ্ক** (*Parametric Co-ordinates*) :

আমরা জানি, $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ যেখানে $m = \tan\theta$ এবং স্পর্শক $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত।

$m$-এর মান যাহাই হউক না কেন $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ বিন্দুটি দ্বারা সর্বদাই অধিবৃত্তের সমীকরণ সিদ্ধ হয়।

$m = \frac{1}{t}$ বসাইলে $(at^2, 2at)$ অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয়।

$(at^2, 2at)$ বিন্দুটি $t$-এর সমান মানের জন্য $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। $(at^2, 2at)$ বিন্দুটিকে সাধারণতঃ সংক্ষেপে '$t$' বলা হয়।

অধিবৃত্তকে $x = at^2$, $y = 2at$ সমীকরণের দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি মনে রাখা দরকার :

(i) $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yt = x + at^2$

(ii) $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y + tx = 2at + at^3$.

**5.21. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা $(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ নির্ণয়** [ *To find the equation to a chord of the parabola biseted at the point (h, k)* ] :

মনে কর, $y = mx + c$ হইল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের একটি জ্যা।

$y = mx + c$ সমীকরণ হইতে আমরা পাই,

$$x = \frac{y - c}{m}$$

65. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার কেন্দ্র (3, 4) এবং বৃত্তটি $5x+12y-11=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

66. $x^2+y^2=25$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $4x+3y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

67. $x^2+y^2-3x+10y-15=0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $12x+5y=1$ সরলরেখার উপর লম্ব। স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

68. দেখাও যে $x-y+2=0$ সরলরেখা $x^2+y^2=2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

69. $x+y=7$ সরলরেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

70. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা মূলবিন্দুগামী এবং $3x+4y-12=0$ সরলরেখা $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে সেই দুইটি বিন্দু দিয়া যায়।

71. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তকে $3x+4y+7=0$ সরলরেখা স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

72. দেখাও যে $x^2+y^2=25$ বৃত্তের (3, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x^2+y^2-8x+6y=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

73. প্রমাণ কর যে $y=mx$ সরলরেখা $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $(g+mf)^2=c(1+m^2)$ হয়।

74. $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা $3x+4y+5=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

75. (2, 3) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=4$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

76. (4, 7) বিন্দু হইতে $x^2-4x+y^2-6y+12=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

77. $(h, k)$ বিন্দু হইতে $x^2+y^2=6$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2+y^2+3x+3y=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে

$$h^2+k^2+4h+4k+2=0.$$

# পঞ্চম অধ্যায়

## শঙ্কুচ্ছেদ (Conic Sections)

5.1. যদি কোন সমতলে কোন বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে ঐ তলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ঐ বিন্দুটির দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সবসময় ধ্রুবক (Constant) থাকে, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে (Locus) একটি **শঙ্কুচ্ছেদ (Conic Section)** বলে।

ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে **নাভি** (Focus) বলে এবং সাধারণত ইহাকে $S$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। এই ধ্রুবক অনুপাতকে (Constant ratio) উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) বলে এবং ইহাকে $e$ দ্বারা স্থচিত করা হয় এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাকে **নিয়ামক** (Directrix) বলা হয়। যে সরলরেখা Focus-এর মধ্য দিয়া যায় এবং Directrix-এর উপর লম্ব তাহাকে **অক্ষ** (Axis) বলা হয়। এই অক্ষ (Axis) Conic Section-কে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ঐ Conic Section-এর **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে। সাধারণতঃ Vertex-কে $A$ দ্বারা স্থচিত করা হয়।

(i) যখন উৎকেন্দ্রতা $(e)=1$ হয়, তখন Conic Section-টিকে অধিবৃত্ত (Parabola) বলা হয়।

(ii) যখন উৎকেন্দ্রতা $(e)<1$ হয়, তখন Conic Section-টিকে উপবৃত্ত (Ellipse) বলা হয়।

(iii) যখন উৎকেন্দ্রতা $(e)>1$ হয়, তখন Conic Section-টিকে পরাবৃত্ত (Hyperbola) বলা হয়।

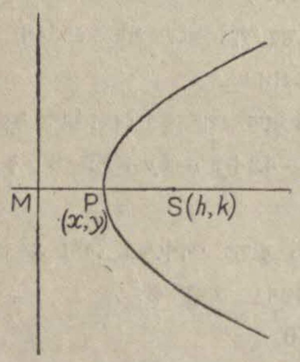



Fig. 43

5.2. **Conic Section-এর সাধারণ সমীকরণ** (*General equation of the Conic Section*) :

মনে কর, নাভি (Focus) $S$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ এবং নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ $lx+my+n=0$। আবার মনে কর, চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$। যদি $P$ হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব $PM$ টানা যায়, তাহা হইলে $SP=ePM$ হইবে।

$\therefore$ Conic Section-এর সমীকরণ হইবে,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}.$$

ইহাকে সরল করিলে Conic Section-এর সাধারণ রূপ হইবে,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

যেখানে $a$, $b$, $h$, $g$, $f$, $c$ সহগগুলি $x$ ও $y$ হইতে স্বাধীন (free from $x$ and $y$).

### 5.3. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় *(To find the equation to a Parabola)* :

মনে কর, $S$ নাভি (Focus), $ZM$ নিয়ামক (Directrix), $A$ শীর্ষবিন্দু (Vertex), $S$ হইতে নিয়ামকের উপর $SZ$ লম্ব। এই লম্ব অধিবৃত্তকে $A$ বিন্দুতে ছেদ করে। $A$ বিন্দুকে মূলবিন্দু হিসাবে ধরিয়া লও। $AX$-কে $x$-অক্ষ এবং $AX$-এর উপর লম্ব $AY$-কে $y$-অক্ষ ধর। অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু লও। মনে কর, $AS=a$. $\therefore$ $AS=AZ=a$.

$SP$ যোগ কর। $P$ বিন্দু হইতে $AX$-এর উপর $PN$ লম্ব এবং $ZM$-এর উপর $PM$ লম্ব টান। এখানে $SP=PM$ ( $\because$ $e=1$ )

$\therefore$ $SP^2=PM^2$

এখন, $PNS$ সমকোণী ত্রিভুজের $SN^2+PN^2=SP^2$

বা, $PN^2=SP^2-SN^2$

$=PM^2-SN^2=ZN^2-SN^2$

( $\because$ $PM=ZN$ )

এখন, $SN=AN-AS=x-a$

$ZN=AN+AZ=x+a$

$PN=y$

$\therefore$ $PN^2=ZN^2-SN^2$

বা, $y^2=(x+a)^2-(x-a)^2$

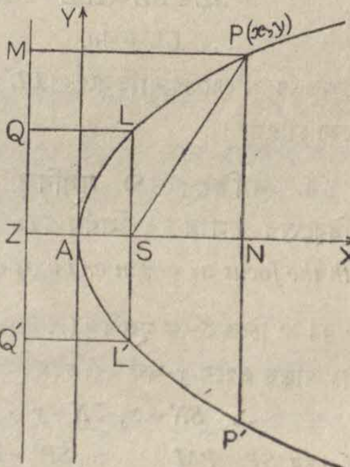



Fig. 44

বা, $y^2 = x^2 + a^2 + 2ax - x^2 - a^2 + 2ax$

বা, $y^2 = 4ax.$

$\therefore$ অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y^2 = 4ax.$

**মন্তব্য :** অধিবৃত্তের উপরিস্থিত $P$ বিন্দুর ভুজ হইল $AN$ এবং কোটি হইল $PN$। $A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, নাভি $S$-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $x = -a.$

এখন যদি $PN$-কে বর্ধিত করা যায় তাহা হইলে উহা অধিবৃত্তকে $P'$ বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষেত্রে $P'$ বিন্দুরও ভুজ হইবে $AN$। $PNP'$-কে দ্বিকোটি (double ordinate) বলা হয়। নাভি $S$-এর মধ্য দিয়া $LSL'$ double ordinate-কে অধিবৃত্তের নাভিলম্ব (Latusrectum) বলে।

আমরা জানি, $SA = AZ = a$

$\therefore \quad SZ = 2a.$

এখানে $SL = LQ,\ SL' = L'Q',$

$\therefore \quad LL' = SL + SL' = LQ + L'Q'$

$= SZ + SZ = 2SZ = 2.2a = 4a$

$\therefore \quad LL' = 4a.$

অতএব অধিবৃত্তের নাভিলম্বের $(LL')$ দৈর্ঘ্য নাভি $(S)$ হইতে শীর্ষবিন্দুর $(A)$ দূরত্বের চারিগুণ।

**5.4. নাভিকে $(S)$ মূলবিন্দু এবং অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a Parabola with the focus as origin and axis as the x-axis*) :

44 নং চিত্রে $S$-কে মূলবিন্দু $(0, 0)$, $SX$-কে $x$-অক্ষ, $S$ বিন্দু দিয়া $SX$-এর উপর অঙ্কিত লম্বকে $y$-অক্ষ ধরা হইল।

$\therefore \quad SN = x,\ PN = y$

এখন $SP = PM \quad \therefore \ SP^2 = PM^2$

বা, $SN^2 + PN^2 = PM^2 \qquad (\because \ SP^2 = SN^2 + PN^2)$

বা, $SN^2 + PN^2 = ZN^2 \qquad (\because \ PM = ZN)$

বা, $SN^2 + PN^2 = (ZS + SN)^2$

বা, $x^2+y^2=(2a+x)^2$

বা, $x^2+y^2=4a^2+x^2+4ax$

$\therefore$ $y^2=4a(x+a)$, ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** এক্ষেত্রে $S$-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, $A$-এর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$, $ZM$-এর সমীকরণ $x=-2a$.

**5.5. অক্ষকে x-অক্ষ এবং নিয়ামককে (Directrix) y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (*To find the equation of a Parabola where the axis is x-axis and the Directrix is the y-axis*) :**

44 নং চিত্রে $Z$-কে মূলবিন্দু $(0, 0)$, $ZX$-কে $x$-অক্ষ, $ZM$-কে $y$-অক্ষ ধরা হইল।

$\therefore$ $ZN=x$, $PN=y$ এবং $SP=PM$ $\quad(\because e=1)$

$\therefore$ $SP^2=PM^2$

বা, $SN^2+PN^2=ZN^2$ $\quad(\therefore SP^2=SN^2+PN^2$ এবং $PM=ZN)$

বা, $(ZN-ZS)^2+PN^2=ZN^2$ $\quad(\therefore SN=ZN-ZS=x-2a)$

বা, $(x-2a)^2+y^2=x^2$

বা, $x^2+4a^2-4ax+y^2=x^2$

বা, $y^2=4ax-4a^2$

$\therefore$ $y=4a(x-a)$, ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** এখানে $Z$-এর স্থানাঙ্ক $(2a, 0)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $x=0$.

অনুরূপভাবে অধিবৃত্তের অক্ষকে $y$-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি পাওয়া যায় :

(i) $x^2=4ay$, $A$-কে মূলবিন্দু ধরিয়া ;

(ii) $x^2=4a(y+a)$, $S$-কে মূলবিন্দু ধরিয়া ;

(iii) $x^2=4a(y-a)$, অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু যখন মূলবিন্দু।

**5.6. অধিবৃত্তের সমীকরণের বিভিন্ন রূপ (*Different forms of the equation of a Parabola*) :**

(i) নাভি ($S$) যদি শীর্ষবিন্দু ($A$)-এর ডানদিকে থাকে, অধিবৃত্তের অক্ষ $x$-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু ($A$) মূলবিন্দু হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2=4ax$.

এখানে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক ($a$, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=-a$. [Fig. 45]

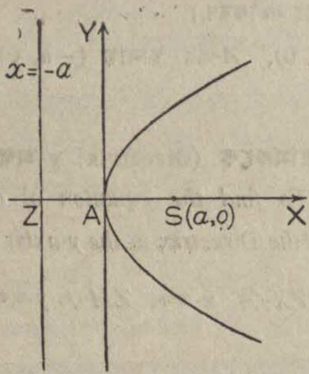



Fig. 45

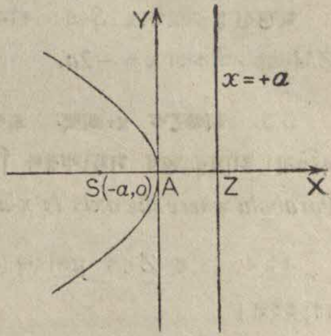



Fig. 46

(ii) নাভি ($S$) যদি শীর্ষবিন্দুর ($A$) বামদিকে থাকে, অধিবৃত্তের অক্ষ $x$-অক্ষ, শীর্ষবিন্দু ($A$) মূলবিন্দু হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2=-4ax$.

এখানে শীর্ষবিন্দু ($A$)-এর স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক ($-a$, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=a$. [Fig. 46]

(iii) যদি অধিবৃত্তের অক্ষ $y$-অক্ষ, নাভি যদি $A$-এর উপর দিকে থাকে, $A$ মূলবিন্দু হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2=4ay$.

এখানে শীর্ষবিন্দুর ($A$) স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভি ($S$)-এর স্থানাঙ্ক (0, $a$) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y=-a$. [Fig 47]

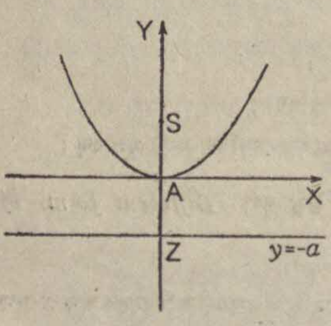



Fig. 47

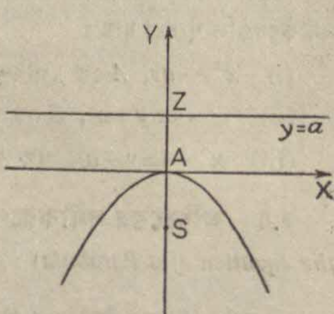



Fig. 48

(iv) অধিবৃত্তের অক্ষ $y$-অক্ষ, নাভি ($S$) শীর্ষবিন্দু $A$-এর নীচের দিকে থাকে, শীর্ষবিন্দু $A$ হইল মূলবিন্দু, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2 = -4ay$.

এখানে শীর্ষবিন্দু $A$-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, নাভির ($S$)-এর স্থানাঙ্ক $(0, -a)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y = a$. [Fig. 48]

**5.7. অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of a Parabola when the axis of the Parabola is parallel to x-axis)* :

মনে কর, অধিবৃত্তের অক্ষ $x$-অক্ষের সমান্তরাল। মনে কর, $A$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$। মনে কর, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$ ($OX$ ও $OY$ অক্ষ দুইটি অনুসারে)

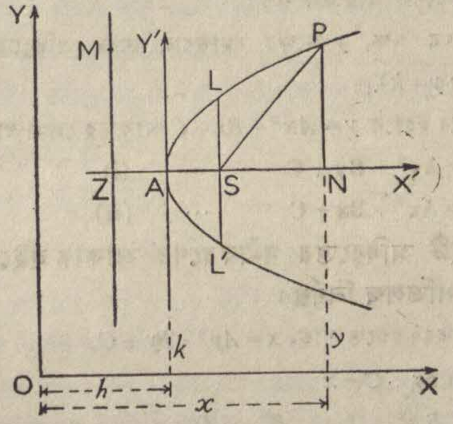



Fig. 49

এখন যদি $OX$ ও $OY$-কে যথাক্রমে $AX'$ ও $AY'$-এ রূপান্তরিত করা যায় এবং এই অক্ষ অনুসারে $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি $(X, Y)$ হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $Y^2 = 4aX$.

এখন $X = x - h$, $Y = y - k$

$\therefore$ $Y^2 = 4aX$ সমীকরণ হইতে পাই, $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.

**দ্রষ্টব্য :** নাভির স্থানাঙ্ক $(a+h, k)$, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$, নাভিলম্ব $LL' = 4a$.

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ $x = h - a$, $LL'$-এর সমীকরণ $x = h + a$.

**মন্তব্য :** (i) অনুরূপভাবে অধিবৃত্তের অক্ষ যদি $y$-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $(x-h)^2=4a(y-k)$.

(ii) অধিবৃত্তের অক্ষ যখন $x$-অক্ষের সমান্তরাল অধিবৃত্তের সমীকরণ

$$(y-k)^2=4a(x-h)$$

বা, $y^2+k^2-2yk=4ax-4ah$

বা, $4ax=y^2+k^2-2yk+4ah$

$$\therefore\ x=\frac{y^2}{4a}-\frac{k}{2a}y+\frac{k^2+4ah}{4a}$$

ইহাকে লেখা যায় $x=Ay^2+By+C$

ইহা সমীকরণের আর এক রূপ।

আবার যখন অক্ষ, $y$-অক্ষের সমান্তরাল তখন অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $(x-h)^2=4a(y-k)$.

অনুরূপভাবে ইহাকে $y=Ax^2+Bx+C$ আকারে লেখা যায়।

**5.8.** $\mathbf{x=Ay^2+By+C}$ ··· (i)

$\mathbf{y=Ax^2+Bx+C}$ ··· (ii)

## এই দুইটি অধিবৃত্তের সমীকরণের আকার হইতে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও নাভিলম্ব নির্ণয় :

(i) নং সমীকরণ হইতে পাই, $x=Ay^2+By+C$

বা, $Ay^2+By+C=x$

$$\text{বা, }\left(y+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{1}{A}\left(x+\frac{B^2-4AC}{4A}\right)\quad\cdots\quad\text{(iii)}$$

$(y-k)^2=4a(x-h)$ সমীকরণের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$

$\therefore$ এই সমীকরণের সহিত (iii)-কে তুলনা করিয়া পাই, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{B^2-4AC}{4A}, -\frac{B}{2A}\right)$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{A}$.

(ii) নং সমীকরণ $y=Ax^2+Bx+C$ কে অনুরূপভাবে

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{1}{A}\left(y+\frac{B^2-4AC}{4A}\right)\quad\cdots\quad\text{(iv)}$$

এখন, $(x-h)^2=4a(y-k)$ সমীকরণের সহিত (iv)-কে তুলনা করিলে দেখা যায় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$ এবং নাভিলম্ব $\frac{1}{A}$.

**5.9. অধিবৃত্তের নাভি (S) এবং নিয়ামক (Directrix) দেওয়া থাকিলে অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the general equation of a Parabola when its focus and the equation of the directrix are given*) :

মনে কর, নাভি (S)-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $Ax+By+C=0$। অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু লও। $SP$ যোগ কর। $P$ হইতে নিয়ামকের উপর $PM$ লম্ব টান।

$\therefore \quad SP = PM$

বা, $SP^2 = PM^2 \qquad \cdots \qquad$ (i)

এখন যেহেতু $S$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$ এবং $P$-এর স্থানাঙ্ক $(x, y)$,

$\therefore \quad SP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

$P(x, y)$ হইতে নিয়ামক $Ax+By+C=0$ এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$PM = \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

আবার যেহেতু $SP^2 = PM^2$

$$\therefore \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

বা, $(A^2+B^2)\{(x-h)^2+(y-k)^2\} = (Ax+By+C)^2$

ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**5.10. $y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়** (*To find the condition that the straight line $y=mx+c$ may touch the Parabola $y^2=4ax$*) :

$y=mx+c$ হইতে $y$-এর মান $y^2=4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$(mx+c)^2 = 4ax$

বা, $m^2x^2 + 2x(mc-2a) + c^2 = 0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ $x$-এর দুইটি বীজ হইবে।

সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি এই বীজ দুইটি সমান হয়। বীজ দুইটি সমান হইবার শর্ত হইল

$$4(mc-2a)^2 - 4m^2c^2 = 0$$

বা, $m^2c^2 + 4a^2 - 4amc - m^2c^2 = 0$

বা, $4amc=4a^2$

$\therefore \quad c=\frac{a}{m}$

$\therefore \quad y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি $c=\frac{a}{m}$ হয়।

$\therefore \quad y=mx+\frac{a}{m}$ হইল $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ।

এখন আমরা স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিব।

$y=mx+\frac{a}{m}$ হইতে $y$-এর মান $y^2=4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\left(mx+\frac{a}{m}\right)^2=4ax \qquad \text{বা,} \quad \left(mx-\frac{a}{m}\right)^2=0$$

বা, $mx=\frac{a}{m}, \ \frac{a}{m} \qquad \therefore \quad x=\frac{a}{m^2}, \ \frac{a}{m^2}.$

$x$-এর মান $y=mx+\frac{a}{m}$ এই সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y=m.\frac{a}{m^2}+\frac{a}{m}=\frac{2a}{m}$$

$\therefore \quad y=\frac{2a}{m}, \ \frac{2a}{m}$

$\therefore$ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \ \frac{2a}{m}\right)$.

**5.11. $y=mx+c$ সরলরেখার সহিত $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের ছিন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়** (*To find the length of the chord of the Parabola $y^2=4ax$ intercepted on the line $y=mx+c$*) :

মনে কর, $y=mx+c \quad \cdots \quad$ (i)

সরলরেখা $y^2=4ax \quad \cdots \quad$ (ii)

অধিবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে।

(i) নং হইতে $y$-এর মান $y^2=4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$(mx+c)^2=4ax$$

বা, $m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ $x$-এর দুইটি বীজ হইবে। মনে কর, বীজ দুইটি $x_1$ এবং $x_2$.

$$x_1+x_2=-\frac{2(mc-2a)}{m^2},\ x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}$$

$$\therefore\ (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{4(mc-2a)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}=\frac{16a(a-mc)}{m^4}.$$

যেহেতু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি $y=mx+c$ সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore\ y_1=mx_1+c,\ y_2=mx_2+c$$

$$\therefore\ y_1-y_2=m(x_1-x_2)$$

$\therefore$ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}$

$$=\sqrt{\frac{16a(a-mc)^2}{m^4}+m^2(x_1-x_2)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{16a(a-mc)}{m^4}+m^2\frac{16a(a-mc)}{m^4}}$$

$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{(1+m^2)a(a-mc)}$$

$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a(a-mc)}.$$

**মন্তব্য ঃ** যখন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=0$ তখন $y=mx+c$ রেখা $y^2=4ax$-এর স্পর্শক হইবে। স্পর্শক হইবার শর্ত হইল $\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a(a-mc)}=0$.

যেহেতু $m$ অথবা $a$ কোনটাই শূন্য নয়

$$\therefore\ a-mc=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হইল $c=\frac{a}{m}$.

**5.12. $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the tangent at the point $(x_1, y_1)$ to the Parabola $y^2=4ax$*) :

মনে কর, অধিবৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ ছাড়া আর একটি $P$-এর নিকটস্থ বিন্দু $Q(x_2, y_2)$।

এখন, $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ অধিবৃত্তের উপরে অবস্থিত

$\therefore \; y_1^2 = 4ax_1, \; y_2^2 = 4ax_2$

$\therefore \; y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$

বা, $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4a(x_1 - x_2)$

বা, $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে পাই, $y - y_1 = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$.

এখন যদি $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু ক্রমশঃ অগ্রসর হইয়া $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যায় তবে $y_2 = y_1$, $x_2 = x_1$ হইবে এবং সরলরেখাটি $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

বা, $yy_1 = y_1^2 - 2ax_1 + 2ax = 4ax_1 - 2ax_1 + 2ax$

বা, $yy_1 = 2a(x + x_1)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

**5.13. $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় (*To find the equation of the normal at the point $(x_1, y_1)$ to the Parabola $y^2 = 4ax$*) :**

$(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

$yy_1 = 2a(x + x_1)$

বা, $$y = \frac{2a}{y_1}(x + x_1) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

ইহা স্পর্শকের উপর লম্ব হইবে যদি $m \times \frac{2a}{y_1} = -1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m = -\frac{y_1}{2a}$ হয়।

(ii) নং সমীকরণ হইতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

বা, $2ay - 2ay_1 = -y_1x + y_1x_1$

বা, $y_1x + 2ay = y_1(x_1 + 2a)$

ইহা হইল অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ।

**5.14. প্রবণতা (m)-এর দ্বারা অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of the normal in terms of the Gradient)* :

আমরা জানি, $m = -\frac{y_1}{2a}$ $\therefore$ $y_1 = -2am.$

আবার $y_1^2 = 4ax_1$, $\therefore$ $x_1 = \frac{y_1^2}{4a} = \frac{4a^2m^2}{4a} = am^2$

$\therefore$ $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ সমীকরণ হইতে পাই,

বা, $y + 2am = +\frac{2am}{2a}(x - am^2)$

বা, $y + 2am = mx - am^3$

$\therefore$ $y = mx - 2am - am^3 - am^3$ হইল অভিলম্বের সমীকরণ (Gradient এর দ্বারা)।

**মন্তব্য :** অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে এই অভিলম্ব সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am^2, -2am)$।

**5.15. কোন বিন্দু (h, k) হইতে অধিবৃত্তের ($y^2 = 4ax$) তিনটি অভিলম্ব টানা যায়** *[Through any point (h, k) three normals can be drawn to a Parabola ($y^2 = 4ax$) ]* :

মনে কর, $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y = mx - 2am - am^3$। যদি ইহা $(h, k)$ বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে

$$k = mh - 2am - am^3$$

বা, $am^3 + 2am - mh + k = 0$ বা, $am^3 + m(2a - h) + k = 0$

ইহা $m$-এর ত্রিঘাত সমীকরণ। সুতরাং $m$-এর তিনটি বীজ থাকিবে।

$\therefore$ যে-কোন বিন্দু $(h, k)$ হইতে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$-এর উপরে তিনটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়।

**মন্তব্য ঃ** মনে কর, $m$-এর বীজগুলি $m_1, m_2, m_3$।

$\therefore$ যে তিনটি বিন্দুতে অভিলম্ব অঙ্কন করা হইবে তাহাদের স্থানাঙ্ক হইবে $(am_1^2, -2am_1), (am_2^2, -2am_2), (am_3^2, -2am_3)$।

**5.16. বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু (h, k) হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়** [ *Two tangents can be drawn to a Parabola $y^2=4ax$ from an external point $(h, k)$* ] :

মনে কর, $y=mx+\frac{a}{m}$ হইল $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। যদি এই স্পর্শক $(h, k)$ বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে $k=mh+\frac{a}{m}$ হইবে।

বা, $m^2h-mk+a=0$.

ইহা $m$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব $m$-এর দুইটি মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ $(h, k)$ এই বহিঃস্থ বিন্দু হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

**5.17. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা ( Chord of Contact)-এর সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the chord of contact of any point with respect to the Parabola $y^2=4ax$*) :

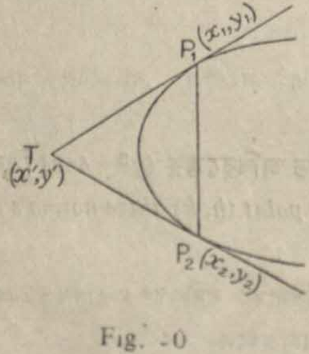



Fig. 20

মনে কর, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটিতে $P_1T$ এবং $P_2T$ এই দুইটি স্পর্শক হইয়াছে।

$P_1(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$ ... (i)

$P_2(x_2, y_2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_2=2a(x+x_2)$ ... (ii)

যদি স্পর্শক দুইটি $T(x', y')$ বিন্দুতে মিলিত হয় তাহা হইলে

$$y'y_1 = 2a(x' + x_1) \quad \cdots \text{(iii)}$$

$$y'y_2 = 2a(x' + x_2) \quad \cdots \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) হইতে আমরা দেখিতে পাই যে $yy' = 2a(x + x')$ এই সরলরেখা $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি দিয়া যায়। অর্থাৎ এই সরলরেখা $T(x', y')$ বিন্দু হইতে যে দুইটি স্পর্শক টানা হইয়াছে তাহাদের স্পর্শ-বিন্দু দিয়া $yy' = 2a(x + x')$ সরলরেখা যায়।

$\therefore$ $(x', y')$ বিন্দুর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ হইল $yy' = 2a(x + x')$

**5.18. উপস্পর্শক** (*Subtangent*) **ও উপঅভিলম্ব** (*Subnormal*) :

$P$ হইল অধিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $P$ বিন্দুতে $PT$ স্পর্শক এবং $PG$ অভিলম্ব। অক্ষের উপর $PN$ লম্ব টান। স্পর্শক $PT$ এবং অভিলম্ব $PG$ অক্ষকে যথাক্রমে $T$ ও $G$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $PN$ হইল $P$ বিন্দুর কোটি (ordinate)। তাহা হইলে $NT$-কে বলা হয় $P$-এর উপস্পর্শক এবং $NG$-কে বলা হয় $P$-এর উপঅভিলম্ব।

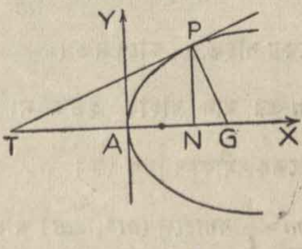



Fig. 51

**5.19. উপস্পর্শক ও উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়** (*To find the length of the Subtangent and the Sub-normal*) :

মনে কর, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1)$।

$P$ বিন্দুতে স্পর্শক $PT$-এর সমীকরণ হইল $yy_1 = 2a(x + x_1)$ $\cdots$ (i)

যেহেতু স্পর্শক $PT$, $x$-অক্ষকে $T$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, অতএব $T$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির করিতে হইলে (i) নং সমীকরণে $y = 0$ হইবে।

$$\therefore \quad x = -x_1 \quad \cdots \text{(ii)}$$

আমরা জানি, $A$ মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং $AN = x_1$, $PN = y_1$

$\therefore$ $T$ বিন্দুর ভুজ $= -x_1$, অর্থাৎ $AT$-এর দূরত্ব $x_1$

আবার যেহেতু $AN = x_1$ $\therefore$ $AT = AN$

$\therefore$ $NT = AN + AT = 2AN = P$-এর ভুজের দ্বিগুণ।

অতএব দেখা গেল Subtangent $NT$, শীর্ষবিন্দু $A$-তে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

আবার যেহেতু $GNP$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ, $\therefore \quad PN^2 = TN.NG$

$$\therefore \text{ Sub-normal } NG = \frac{PN^2}{TN} = \frac{PN^2}{2AN} = \frac{y_1^2}{2x_1} = \frac{4ax_1}{2x_1} = 2a.$$

$\therefore \quad NG = 2a =$ নাভিলম্বের অর্ধেক।

**মন্তব্য :** নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য যেহেতু ধ্রুবক, অতএব অধিবৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্যও ধ্রুবক হইবে।

**5.20. পরমাত্রিক স্থানাঙ্ক** (*Parametric Co-ordinates*) :

আমরা জানি, $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ যেখানে $m = \tan\theta$ এবং স্পর্শক $x$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণে নত।

$m$-এর মান যাহাই হউক না কেন $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ বিন্দুটি দ্বারা সর্বদাই অধিবৃত্তের সমীকরণ সিদ্ধ হয়।

$m = \frac{1}{t}$ বসাইলে $(at^2, 2at)$ অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয়।

$(at^2, 2at)$ বিন্দুটি $t$-এর সমান মানের জন্য $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। $(at^2, 2at)$ বিন্দুটিকে সাধারণতঃ সংক্ষেপে '$t$' বলা হয়।

অধিবৃত্তকে $x = at^2$, $y = 2at$ সমীকরণের দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি মনে রাখা দরকার :

(i) $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yt = x + at^2$

(ii) $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y + tx = 2at + at^3$.

**5.21. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা $(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ নির্ণয়** [ *To find the equation to a chord of the parabola bisected at the point (h, k)* ] :

মনে কর, $y = mx + c$ হইল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের একটি জ্যা।

$y = mx + c$ সমীকরণ হইতে আমরা পাই,

$$x = \frac{y - c}{m}$$

$x$-এর মান $y^2 = 4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y^2 = 4a\frac{(y-c)}{m}$$

বা, $y^2m - 4ay + 4ac = 0$

ইহা $y$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ এবং উহার বীজদ্বয় $y_1, y_2$.

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = \frac{4a}{m}$$

বা, $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{2a}{m}$

যেহেতু $(h, k)$ হইল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু,

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2a}{m} \qquad \therefore \quad m = \frac{2a}{k}.$$

পুনরায়, যেহেতু $(h, k)$ বিন্দু $y = mx + c$ রেখার উপর অবস্থিত,

অতএব $k = mh + c$.

$c$-কে অপনয়ন করিয়া পাই, $y = mx + c$

বা, $y = mx + (k - mh)$ বা, $y - k = m(x - h)$

বা, $y - k = \dfrac{2a}{k}(x - h)$ বা, $(y - k).k = 2a(x - h)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $k(y - k) = 2a(x - h)$.

**5.22. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে একটি সরলরেখা এবং ইহা অক্ষের সমান্তরাল** *(The locus of the middle points of a system of parallel chords of a Parabola is a straight line parallel to its axis)* :

মনে কর, অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির প্রত্যেকটি $y = mx$-এর সমান্তরাল ( যেখানে $m$-এর মান প্রত্যেক ক্ষেত্রে একই )।

মনে কর, $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ অধিবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু এবং এই বিন্দু দুইটি যোগ করিলে যে জ্যা উৎপন্ন হয় তাহার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

বা, $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

বা, $\dfrac{(y-y_1)(y_1+y_2)}{y_1^2-y_2^2}=\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}$

বা, $\dfrac{(y-y_1)(y_1+y_2)}{4a(x_1-x_2)}=\dfrac{(x-x_1)}{(x_1-x_2)}$ $\left[\because y_1^2=4ax_1\right.$ $y_2^2=4ax_2$ এবং $\left.y_1^2-y_2^2=4a(x_1-x_2)\right]$

বা, $(y-y_1)(y_1+y_2)=4a(x-x_1)$

বা, $y(y_1+y_2)-y_1^2-y_1y_2=4a(x-x_1)$

বা, $y(y_1+y_2)-4ax_1-y_1y_2-4ax+4ax_1=0$

বা, $y(y_1+y_2)=y_1y_2+4ax$

$\therefore\ y=\dfrac{4a}{y_1+y_2}+\dfrac{y_1y_2}{(y_1+y_2)}$

যেহেতু এই জ্যা-টি $y=mx$-এর সমান্তরাল

$\therefore\ m=\dfrac{4a}{y_1+y_2}$ অর্থাৎ $y_1+y_2=\dfrac{4a}{m}$

বা, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2a}{m}$

মনে কর, $(h, k)$ হইল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$\therefore\ k=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2a}{m}=$ ধ্রুবক (constant)।

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল $y=\dfrac{2a}{m}$.

ইহা একটি সরলরেখা এবং অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে একটি সরলরেখা এবং ইহা অক্ষের সমান্তরাল।

**মন্তব্য :** অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ যে সরলরেখা সেই সরলরেখাকে অধিবৃত্তের ব্যাস বলে।

5.23. **পরস্পরের উপর লম্ব এইরূপ দুইটি অধিবৃত্তের স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল উহার নিয়ামক** *(The locus of the perpendicular tangents to a parabola is the directrix)* :

আমরা জানি, $y=mx+\dfrac{a}{m}$ ...(i) সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

$m$-এর পরিবর্তে $-\frac{1}{m}$ লিখিলে (i) নং স্পর্শকের উপর লম্বের সমীকরণ হইবে $y = -\frac{x}{m} - am$ ··· (ii)

ইহাও অধিবৃত্তের স্পর্শক।

(i) হইতে (ii)-কে বিয়োগ করিলে স্পর্শক দুইটির ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে, $0 = x\left(m + \frac{1}{m}\right) + a\left(m + \frac{1}{m}\right)$

বা, $x + a = 0$ $\therefore$ $x = -a$

$\therefore$ $x + a = 0$ হইল নিয়ামকের সমীকরণ।

**উদাহরণ 1.** নিম্নলিখিত অধিবৃত্তের শীর্ষ (Vertex), নাভি (Focus), নাভিলম্ব (Latusrectum), নিয়ামক (Directrix) নির্ণয় কর।

(i) $y^2 = 12x$ (ii) $y^2 = 12(x+1)$

(iii) $x^2 = 3y$ (iv) $y^2 + 12x - 6y - 45 = 0$

(i) $y^2 = 12x$

বা, $y^2 = 4.3.x$ ··· (i)

আমরা জানি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ ···(ii) হইলে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, নাভিলম্ব $LL' = 4a$, নিয়ামকের সমীকরণ $x = -a$ হয়।

$y^2 = 4.3.x$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), নাভির স্থানাঙ্ক (3, 0), নাভিলম্ব $LL' = 4 \times 3 = 12$, নিয়ামকের সমীকরণ $x = -3$ বা, $x + 3 = 0$.

(ii) $y^2 = 12(x+1)$ ··· (i)

$x + 1 = X$ ধরিলে সমীকরণের আদর্শ রূপ

$y^2 = 12X$ বা, $y^2 = 4.3.X$

ইহার শীর্ষবিন্দু (0, 0), নাভি (3, 0), $LL' = 12$, নিয়ামকের সমীকরণ $X = -3$ বা, $x + 1 = -3$ বা, $x + 4 = 0$.

(iii) $x^2 = 3y$

এই অধিবৃত্তের অক্ষ হইল $y$-অক্ষ। নাভি $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

$x^2 = 3y$ বা, $x^2 = 4.\frac{3}{4}y$

শীর্ষবিন্দু $(0,0)$, নাভি $(0,\frac{3}{4})$, নাভিলম্ব $LL'=4a=4\times\frac{3}{4}=3$, নিয়ামকের সমীকরণ $y=-a$, অর্থাৎ $y=-\frac{3}{4}$ বা, $4y+3=0$.

(iv) $y^2+12x-6y+45=0$

বা, $(y-3)^2-9+12+45$

বা, $(y-3)^2=-12x-36$

বা, $(y-3)^2=-12(x+3)$

$x+3=X$ এবং $y-3=Y$ ধরিলে সমীকরণের আদর্শ রূপ হইবে

$$Y^2=-4.3.X.$$

ঋণাত্মক (Negative) চিহ্নের অর্থ অধিবৃত্ত $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থিত। ইহার শীর্ষ $(0, 0)$, নাভি $(-3, 0)$, নিয়ামকের সমীকরণ $X=3$.

যেহেতু $x=X-3$, $y=Y+3$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের জন্য শীর্ষ $(-3, 3)$, নাভি $(-6, 3)$, নিয়ামকের সমীকরণ $x=0$, নাভিলম্ব $LL'=12$.

**উদাহরণ 2.** নিম্নলিখিত অধিবৃত্তের শীর্ষ (Vertex), নাভি (Focus), নাভিলম্ব (Latusrectum), নিয়ামক (Directrix) নির্ণয় কর :

$$x^2+6x-y+4=0.$$

$$x^2+6x-y+4=0 \text{ বা, } (x+3)^2=(y+5)$$

$(x+3)=X$, $y+5=Y$ ধরিলে সমীকরণের আদর্শ রূপ হয় $X^2=Y$, $X^2=4.\frac{1}{4}Y$.

ইহার শীর্ষ $(0, 0)$, নাভি $(0, \frac{1}{4})$, নাভিলম্ব $=1$, নিয়ামকের সমীকরণ $Y=-\frac{1}{4}$.

যেহেতু $x=X-3$, $y=Y-5$, অতএব প্রদত্ত সমীকরণের শীর্ষ $(-3,-5)$, নাভি $(-3, -\frac{19}{4})$, নাভিলম্ব $LL'=1$, নিয়ামকের সমীকরণ $y=-\frac{21}{4}$ বা, $4y+21=0$.

**উদাহরণ 3.** $y^2=12px$ অধিবৃত্তটি $(3, 2)$ বিন্দুগামী। ইহার নাভিলম্ব, নাভি ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু $(3, 2)$ বিন্দুটি $y^2=12px$-এর উপর অবস্থিত,

$\therefore\ 4=12p.3 \quad \therefore\ p=\frac{1}{9}$

$\therefore\ y^2=\frac{12}{9}x=\frac{4}{3}x=4.\frac{1}{3}x$

$\therefore$ নাভিলম্ব $LL' = \frac{1}{3}$, নাভি $(\frac{1}{3}, 0)$, নিয়ামকের সমীকরণ $x = -\frac{1}{3}$.
বা, $3x + 1 = 0$.

**উদাহরণ 4.** $(-1, 1)$ বিন্দুতে যাহার নাভি এবং $x + y + 1 = 0$ যাহার নিয়ামকের সমীকরণ সেই অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু এবং নাভি $(S)$-এর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$.

এখন $SP = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$

নিয়ামক $x + y + 1 = 0$ হইতে $P$ বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{x + y + 1}{\sqrt{2}}$

যেহেতু $P$ হইতে নাভি $(S)$-এর দূরত্ব $= P$ হইতে নিয়ামকের দূরত্ব

$$\therefore \quad \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{x + y + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা,} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2 - 2y = \frac{x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2y + 2x}{2}$$

$$\text{বা,} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2xy - 6y + 3 = 0$$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2 + y^2 + 2x - 2xy - 6y + 3 = 0$.

**উদাহরণ 5.** একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার শীর্ষ $(2, 4)$, নাভি $(6, 4)$।

এখানে শীর্ষ (Vertex) এবং নাভি (Focus) যোগ করিলে যে সরলরেখা হইবে উহা $x$-অক্ষের সমান্তরাল। এখানে নাভি, শীর্ষবিন্দুর ডানদিকে অবস্থিত হইবে।

$$\therefore \quad a = \sqrt{(2-6)^2 + (4-4)^2} = 4$$

অধিবৃত্তের সমীকরণ $(y - k)^2 = 4a(x - h)$

বা, $(y - 4)^2 = 4.4(x - 2)$

বা, $y^2 + 16 - 8y - 16x + 32 = 0$

বা, $y^2 - 8y - 16x + 48 = 0$.

**উদাহরণ 6.** অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার শীর্ষ হইল মূলবিন্দু এবং নাভি (i) $(-4, 0)$ (ii) $(4, 0)$ (iii) $(0, -4)$ (iv) $(0, 4)$.

(i) অধিবৃত্তের অক্ষ হইল $x$-অক্ষ এবং ইহা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

যেহেতু নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4.4 = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y^2 = -16x$.

(ii) অধিবৃত্তের অক্ষ হইল $x$-অক্ষ এবং ইহা $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

যেহেতু নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4.4 = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y^2 = -16x$.

(iii) অধিবৃত্তের অক্ষ হইল $y$-অক্ষ এবং ইহা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

যেহেতু নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4 \times 4 = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 = -16y$.

(iv) অধিবৃত্তের অক্ষ $y$-অক্ষ এবং ইহা $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

যেহেতু নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4 \times 4 = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 = 16y$.

**উদাহরণ** 7. $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের $(1, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$yy_1 = 2a(x + x_1)$

এখানে $a = 1, x_1 = 1, y_1 = 3$

$\therefore$ $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের $(1, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y.3 = 2.1\ (x + 1)$

বা, $3y - 2x - 2 = 0$ ... (i)

$(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y - 3 = -\frac{3}{2.1}(x - 1)$

বা, $3x + 2y - 9 = 0$.

**অন্য প্রণালী ঃ** $(1, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3y - 2x - 2 = 0$.

$3y - 2x - 2 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $2y + 3x + k = 0$

যেহেতু ইহা $(1, 3)$ বিন্দুগামী

$\therefore$ $2.3 + 3.1 + k = 0$ $\quad\therefore$ $k = -9$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ হইল $3x + 2y - 9 = 0$.

**উদাহরণ 8.** $y^2=8x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $x-y+3=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

$x-y+3=0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$x-y+k=0$ ... (i)

বা, $y=x+k$

$y^2=8x$ সমীকরণে $y$-এর মান বসাইয়া পাই,

$(x+k)^2=8x$

বা, $x^2+k^2+2kx-8x=0$

বা, $x^2+x(2k-8)+k^2=0$ ... (ii)

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ। $x-y+k=0$ স্পর্শক হইবে যদি (ii)-এর বীজদ্বয় পরস্পর সমান হয়।

অর্থাৎ যদি $(2k-8)^2-4.k^2=0$ হয়

বা, $4k^2+64-32k-4k^2=0$ $\therefore$ $k=2$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক $x-y+2=0$.

**উদাহরণ 9.** দেখাও যে $y-x=1$ সরলরেখা $y^2=4x$-কে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি $y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $c=\frac{a}{m}$ হয়।

এখানে $y=x+1$ সরলরেখায় $m=1$, $c=1$, এবং $y^2=4x$ হইতে $a=1$ পাই।

$\therefore$ $\frac{a}{m}=\frac{1}{1}=1=c$ $(\because$ $c=1)$

এখানে $c=\frac{a}{m}$ হইল।

$\therefore$ $y=x+1$ সরলরেখা $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

**অন্য প্রণালী :** $y^2=4x$

বা, $(x+1)^2=4x$ $(\because$ $y=x+1)$

বা, $x^2+1+2x-4x=0$

বা, $x^2-2x+1=0$ বা, $(x-1)^2=0$ $\therefore$ $x=1, 1$

এখন $y=x+1$ $\therefore$ $y=2, 2.$

$\therefore$ $y=x+1$ সরলরেখা $y^2=4x$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 2)

**উদাহরণ 10.** প্রমাণ কর যে $lx+my+n=0$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে যদি $am^2=ln$ হয়।

$lx+my+n=0$ বা, $x=-\dfrac{my+n}{l}$ ... (i)

$y^2=4ax$ এতে $x$-এর মান বসাইয়া পাই,

$y^2=-4a\dfrac{my+n}{l}$

বা, $ly^2=-4a(my+n)$

বা, $ly^2+4amy+4an=0$ ... (ii)

$lx+my+n=0$ সরলরেখা $y^2=4ax$-কে স্পর্শ করিবে যদি (ii) নং সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হয়,

অর্থাৎ যদি $16a^2m^2-4l-4an=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $am^2=ln$ হয়।

**উদাহরণ 11.** $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা (2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা $(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ $k(y-k)=2a(x-h)$

বা, $3(y-3)=2.2(x-2)$

বা, $3y-9=4x-8$

বা, $4x-3y+1=0.$

## প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির শীর্ষ (Vertex), নাভি (Focus), নাভিলম্ব (Latusrectum) এবং নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $x^2=9x$ (ii) $x^2+6x-3y+6=0$

(iii) $y^2+4x-2y+2=0$

2. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার

(i) নাভির (Focus) স্থানাঙ্ক (2, 0), নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ $x=0$.

(ii) নাভির (Focus) স্থানাঙ্ক (0, 4), নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ $y=0$.

(iii) নাভির (Focus) স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$, নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ $x=2$.

(iv) নাভির (Focus) স্থানাঙ্ক (0, 0), নিয়ামকের (Directrix) সমীকরণ $y=4$.

3. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির শীর্ষ, নাভি, নাভিলম্ব ও অক্ষ নির্ণয় কর :

(i) $y^2-4y+4x=0$ (ii) $x^2-2ax+2ay=0$

(iii) $x^2-4x+4y=0$

4. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার শীর্ষবিন্দু হয় মূলবিন্দু এবং নাভি :

(i) (3, 0) (ii) $(-5, 0)$ (iii) $(0, -3)$ (iv) (0, 2).

5. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটি যদি $(2, -3)$ বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে নাভি, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

6. $4(y-1)^2=-7(x-3)$ অধিবৃত্তের শীর্ষ, নাভি এবং নাভিলম্ব নির্ণয় কর।

7. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার নাভি এবং নিয়ামকের সমীকরণ নীচে দেওয়া হইল :

(i) নাভি $(3, -4)$, নিয়ামক $6x-7y=-5$

(ii) নাভি $(3, -2)$, নিয়ামক $2x-y+3=0$

(iii) নাভি (0, 1), নিয়ামক $5x+12y-13=0$

(iv) নাভি (0, 0), নিয়ামক $2x+y-1=0$

8. $y^2=16x$ অধিবৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহার $y$-স্থানাঙ্ক $x$-স্থানাঙ্কের দ্বিগুণ।

9. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার (i) নাভি (5, 0), নিয়ামক $3x-4y+2=0$. (ii) নাভি $(0, -4)$ এবং নাভিলম্ব 16 এবং নিয়ামক $x$-অক্ষের সমান্তরাল। (iii) শীর্ষ এবং নাভি $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং মূলবিন্দু হইতে যথাক্রমে $a$ ও $a'$ দূরত্বে অবস্থিত। (iv) নাভি (5, 3) এবং নিয়ামক (1, 1) বিন্দুগামী এবং $3x-4y+5=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

10. প্রমাণ কর যে $y^2+2ax+2by+c=0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যাহার অক্ষটি $x$-অক্ষের সমান্তরাল এবং ইহার শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

11. নিম্নলিখিত সরলরেখা ও অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুগুলি নির্ণয় কর :

(i) $y=3x-1$ এবং $y^2=4x$

(ii) $3x+2y=30$ এবং $4y^2=81x$

12. $3y^2=4x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব ও নাভি নির্ণয় কর এবং $2x-3y=0$ সরলরেখা যে বিন্দুগুলিতে $3y^2=4x$ অধিবৃত্তকে ছেদ করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

13. দেখাও যে নিম্নলিখিত সরলরেখা অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং প্রতি ক্ষেত্রেই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) $y=x+1$ সরলরেখা $y^2=4x$-কে স্পর্শ করে।

(ii) $3y=x+3$ সরলরেখা $y^2=3x$-কে স্পর্শ করে।

(iii) $4x-2y+3=0$ সরলরেখা $y^2=12x$-কে স্পর্শ করে।

14. যদি $2x+3y=1$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে তাহা হইলে নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

15. কি শর্তে $ax+by+c=0$ সরলরেখা $y^2=4px$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে তাহা নির্ণয় কর।

16. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা

(i) $2x-3y+7=0$ সরলরেখার সমান্তরাল ;

(ii) $y-3x-1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব।

17. প্রমাণ কর $x+y=1$ সরলরেখা $y=x-x^2$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

18. প্রমাণ কর $y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4a(x+a)$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি $c=ma+\dfrac{a}{m}$ হয়।

19. অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y^2=9x$ অধিবৃত্তের (4, 6) বিন্দুতে ;

(ii) $y^2=12x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের শেষ দুই প্রান্তে ;

(iii) $x^2=8y$ অধিবৃত্তের $(-4, 2)$ বিন্দুতে।

20. $y^2=9x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা (4, 10) বিন্দুগামী।

21. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেখানে ঐ বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত $30^\circ$ কোণে নত।

22. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক $y=3x+5$ সরলরেখার সহিত $45^\circ$ কোণে নত। ঐ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

23. প্রমাণ কর যে $2x+4y=9$ সরলরেখা $y^2=8x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব। অভিলম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

24. প্রমাণ কর যে $y-2x-1=0$ সরলরেখা $y^2=8x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

25. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(am_1{}^2, -2am_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব পুনরায় অধিবৃত্তকে $(am_2{}^2, -2am_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর $m_1{}^2+m_1m_2+2=0.$

26. $y^2=\frac{5}{2}x$ অধিবৃত্তের $(-1, -2)$ বিন্দু হইতে স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

27. $y^2=5x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা $(3, -2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

28. $y^2=4ax$ ও $x^2=4by$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ $y=mx+c$ হইলে দেখাও যে জ্যাটির মধ্যবিন্দু $\left(\frac{2a-mc}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ হইবে।

# ষষ্ঠ অধ্যায়

## উপবৃত্ত (Ellipse)

**6.1.** উপবৃত্ত এমন একটি শঙ্কুচ্ছেদ (Conic Section) যাহার উৎকেন্দ্রতা $e<1$. উপবৃত্তের শীর্ষ, নাভি, নিয়ামক, উৎকেন্দ্রতা ইত্যাদি সম্বন্ধে নীচে আলোচনা করা হইল।

চিত্রে নির্দিষ্ট বিন্দু $S$ হইল উপবৃত্তের নাভি। নির্দিষ্ট সরলরেখা $ZM$ নিয়ামক। উপবৃত্তের উপর $P$ একটি বিন্দু। $SP$ যোগ কর। $P$ হইতে নিয়ামক $ZM$-এর উপর $PM$ লম্ব টান।

এখন $\dfrac{SP}{PM}=e$ যেখানে $e<1$.

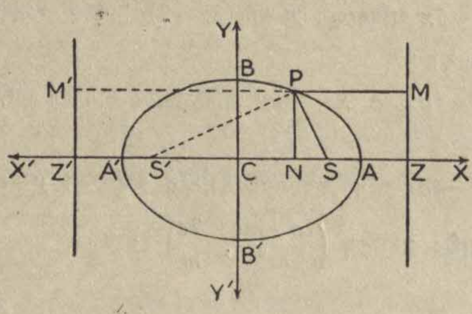



Fig. 52

নিয়ামক $ZM$-এর উপর $SZ$ লম্ব টানা হইল। $SZ$ রেখাকে পরাক্ষরেখা (Line of Major Axis) বলা হয়। পরাক্ষরেখা $SZ$ উপবৃত্তকে $A$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই $A$ বিন্দুকে উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (Vertex) বলে। এখন $ZS$-কে বর্ধিত করা হইল ( উপবৃত্তের উপর যে প্রান্তে $A$ আছে তাহার বিপরীত প্রান্তের দিকে )। যেহেতু $e<1$, $ZS$-এর বর্ধিতাংশের উপর এমন একটি বিন্দু ( $A'$ ) পাওয়া যাইবে যেন $\dfrac{SA'}{A'Z}=e$ ( যেখানে $e<1$ ) হয়। $A'$ হইল উপবৃত্তের উপর অবস্থিত আর একটি বিন্দু। এই $A'$ বিন্দুকে উপবৃত্তের দ্বিতীয় শীর্ষবিন্দু বলে। শীর্ষবিন্দু $A$ ও $A'$-এর মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র (Centre) বলে।

সাধারণতঃ কেন্দ্রকে $C$ দ্বারা সূচিত করা হয়। কেন্দ্র $C$ দিয়া পরাক্ষরেখার (Major Axis) উপর লম্ব টানিলে যে জ্যা হয়, তাহাকে উপাক্ষরেখা (Minor Axis) বলে। নাভিগামী যে জ্যা পরাক্ষরেখার উপর লম্ব তাহাকে উপবৃত্তের নাভিলম্ব বলে। উপবৃত্তের আর একটি করিয়া নাভি ও নিয়ামক থাকে। চিত্রে $S'$ আরও একটি নাভি এবং $Z'M'$ আর একটি নিয়ামক।

এখানে $CS = CS'$, $CZ = CZ'$.

**6.2. কেন্দ্রকে মূলবিন্দু, পরাক্ষরেখাকে x-অক্ষ, উপাক্ষরেখাকে y-অক্ষ ধরিয়া উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** *(To find the equation of an ellipse taking the centre as Origin and the Major Axis as x-axis and Minor Axis as y-axis)* :

মনে কর, $S$ নাভি, $ZM$ নিয়ামক। নাভি $S$ হইতে নিয়ামকের উপর $SZ$ লম্ব টান। $A$ ও $A'$ দুইটি শীর্ষবিন্দু। মনে কর, উপবৃত্তের কেন্দ্র $C$ হইল

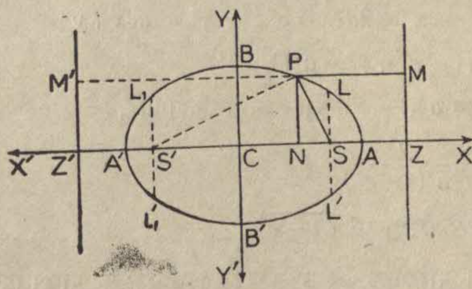



Fig. 53

মূলবিন্দু। $CX$-কে $x$-অক্ষ এবং $CY$-কে $y$-অক্ষ ধর। মনে কর, উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু। $CX$-এর উপর $PN$ লম্ব এবং $ZM$-এর উপর $PM$ লম্ব টান। $SP$ যোগ কর।

এখন $\dfrac{SA}{AZ} = e \quad \therefore \; SA = e.AX \quad \cdots \quad (i)$

এবং $\dfrac{SA'}{A'Z} = e \quad \therefore \; SA' = e.A'Z \quad \cdots \quad (ii)$

মনে কর, $AA' = 2a$. যেহেতু $C$ মূলবিন্দু $\therefore \; CA = CA' = a$

এখন $SA = CA - CS$, $AZ = CZ - CA$

∴ (i) নং হইতে পাই $SA = eAZ$

বা, $(CA - CS) = e(CZ - CA)$

বা, $a - CS = e(CZ - a)$ $\cdots$ (iii)

পুনরায় $SA' = e.A'Z$ বা, $(CS + CA') = e(CZ + CA')$

বা, $(CS + a) = e(CZ + a)$ $\cdots$ (iv)

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই, $CS = ae$ $\cdots$ (v)

(iii) ও (iv) যোগ করিয়া পাই, $a = eCZ$ বা, $CZ = \frac{a}{e}$ $\cdots$ (vi)

এখন $SN = CS - CN = ae - x$

$SP = ePM = eNZ = e(CZ - CN)$

∴ $SP = a - ex$ ( ∵ $eCZ = a$, $eCN = x$ )

যেহেতু $SP^2 = SN^2 + PN^2$

∴ $(a - ex)^2 + (ae - x)^2 + y^2$

বা, $a^2 + e^2x^2 - 2aex = e^2e^2 + x^2 - 2aex + y^2$

বা, $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$

উভয়পক্ষকে $a^2(1 - e^2)$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad \cdots \text{(vii)}$$

যখন $x = 0$, $y = \pm a\sqrt{1 - e^2}$

∴ দেখা যাইতেছে যে $y$-অক্ষ উপবৃত্তকে দুইটি বাস্তব বিন্দু $B$ ও $B'$ তে ( ∵ $e < 1$ ) ছেদ করে।

$B$ ও $B'$ বিন্দু দুইটি হইল $C$ বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ এবং $CB = CB'$।

ইহাদের প্রত্যেকের সাংখ্যমান $a\sqrt{1 - e^2}$.

এখন $CB = CB' = a\sqrt{1 - e^2} = b$ ধর; তাহা হইলে $a^2(1 - e^2) = b^2$.

(vii) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \cdots \quad \text{(viii)}$$

∴ উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

**অনুসিদ্ধান্ত :**

(i) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $(AA') = 2a$.

(ii) উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $(BB') = 2b$.

(iii) $b = a\sqrt{1-e^2}$ বা, $b^2 = a^2(1-e^2)$

বা, $a^2e^2 = a^2 - b^2$ বা, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$$\therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

(iv) এখন যদি $a = b$ হয় তাহা হইলে (viii) নং সমীকরণ হইতে পাই, $x^2 + y^2 = a^2$। ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ। $\therefore$ যে উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি সমান সেটি একটি বৃত্ত এবং $e = \sqrt{1-1} = 0$ হয়।

**6.3. প্রমাণ কর উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি S′ এবং দ্বিতীয় নিয়ামক Z′M′।**

$AC$-কে বর্ধিত করিয়া ( $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে ) তাহার উপর $S'$ এবং $Z'$ দুইটি বিন্দু এমনভাবে লও যেন $CS' = CS$, $CZ' = CZ$ হয়।

$AZ'$-এর উপর $M'Z$ লম্ব টান।

$$CS' = ae, \quad eCZ' = a$$

$$S'N = CS' + CN = ae + x$$

$\therefore$ $(ae - x)^2 + y^2 = (a - ex)^2$ সমীকরণে উভয় পক্ষকে $4aex$ যোগ করিয়া পাই,

$$a^2e^2 + x^2 - 2aex + y^2 + 4aex = a^2 + e^2x^2 - 2aex + 4aex$$

বা, $(ae + x)^2 + y^2 = (a + ex)^2$

বা, $(S'N)^2 + y^2 = e^2(CZ' + CN)^2$

বা, $(S'N)^2 + y^2 = e^2(PM')^2$ $\quad (\because \; PM' = NZ' = CN + CZ')$

বা, $(S'N)^2 + PN^2 = (ePM')^2$

বা, $S'P^2 = e^2PM'^2$ $\quad (\because \; S'P^2 = S'N^2 + PN^2)$

$\therefore$ $S'P = ePM'$

$\therefore$ $S'$ কে নাভি, $Z'M'$ কে নিয়ামক, $e$ কে উৎকেন্দ্রতা লইলে একই উপবৃত্ত পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রত্যেক উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি $S'$ এবং দ্বিতীয় নিয়ামক $Z'M'$ থাকে।

**মন্তব্য ঃ** (i) যেহেতু $CA=a$, $CA'=-a$, $CS=ae$, $CS'=-ae$

∴ শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$ ।

(ii) আবার যেহেতু $eCZ=a$, $eCZ'=-a$

নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $x=CZ=\frac{a}{e}$

বা, $ex=a$ বা, $ex-a=0$

এবং নিয়ামক $Z'M'$-এর সমীকরণ $x=CZ'=-\frac{a}{e}$ বা, $ex+a=0$.

( 53 নং চিত্র ধরিয়া প্রমাণ করা হইল )

### 6.4. নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় :

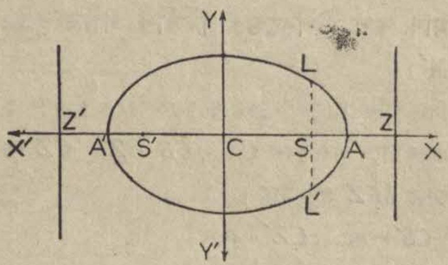



Fig. 54

মনে কর $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $S$ নাভি। নাভিলম্ব $LL'$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। আমরা জানি $CS=ae$, নাভি $S$-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$।

∴ $L$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(ae, SL)$ এবং ইহা উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

∴ $\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{SL^2}{b^2}=1$ বা, $\frac{SL^2}{b^2}=1-e^2$

বা, $SL^2=b^2(1-e^2)=b^2.\frac{a^2(1-e^2)}{b^2}=b^2.\frac{b^2}{a^2}$

[ $\because$ $b^2=a^2(1-e^2$ ]

বা, $SL^2=\frac{b^4}{a^2}$ ∴ $SL=\frac{b^2}{a}$

∴ নাভিলম্ব $LL'=2SL=2.\frac{b^2}{a}$.

6.5. প্রমাণ কর যে উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর নাভি দুইটি হইতে দূরত্ব দুইটির যোগফল পরাক্ষের সমান। অর্থাৎ P যদি উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু হয়, তাহা হইলে $SP+S'P=AA'$ হইবে (*The sum of the focal distance of any point on an ellipse is constant and equal to the major axis*) :

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু।

এখন $SP=ePM=eNZ=e(CZ-CN)=eCZ-eCN=a-ex$

$$S'P=e.P'M'=eNZ'=e(CZ'+CN)=eCZ'+eCN=a+ex$$

$\therefore \quad SP+S'P=a-ex+a+ex=2a=AA'.$

মন্তব্য : 53 নং চিত্র ধরিয়া প্রমাণ করা হইল।

6.6. প্রমাণ কর $\frac{PN^2}{A'N.AN}=\frac{CB^2}{CA^2}$.

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

বা, $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{a^2}$

বা, $\frac{PN^2}{b^2}=\frac{(A'C+CN)(AC-CN)}{a^2}=\frac{A'N\,AN}{a^2}$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{A'N.AN}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{CB^2}{CA^2}$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{A'N.AN}=\frac{CB^2}{CA^2}.$$

মন্তব্য : 53 নং চিত্র ধরিয়া প্রমাণ করা হইল।

1. কেন্দ্র $C(0, 0)$-কে মূলবিন্দু, পরাক্ষকে $x$-অক্ষ ; উপাক্ষকে $y$-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

2. নাভি $S(ae, 0)$-কে মূলবিন্দু, পরাক্ষকে $x$-অক্ষ এবং পরাক্ষের উপর $S$ বিন্দুতে লম্বকে $y$-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3. শীর্ষ $A(a, 0)$-কে মূলবিন্দু, পরাক্ষকে $x$-অক্ষ, পরাক্ষের উপর $A$ বিন্দুতে লম্বকে $y$-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে $\frac{(x+a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4. $Z\left(\frac{a}{e}, 0\right)$-কে মূলবিন্দু, $ZX$-কে $x$-অক্ষ, $ZM$-কে $y$-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে $\frac{\left(x+\frac{a}{e}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ( 53 নং চিত্র ধরিয়া ) নাভি, শীর্ষ, ইত্যাদির স্থানাঙ্কগুলি নিম্নে দেওয়া হইল :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $(a>b)$ কেন্দ্র $C$, নাভিদ্বয় $S$ ও $S'$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় $A$ ও $A'$ ইত্যাদির স্থানাঙ্কগুলি এবং নাভিলম্বদ্বয় $LL'$ ও $L_1L'_1$-এর দৈর্ঘ্য, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ ইত্যাদি নিম্নে দেওয়া হইল। এইগুলি মনে রাখা একান্ত প্রয়োজন।

(i) কেন্দ্র $C$-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

(ii) শীর্ষদ্বয় $A$ ও $A'$-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0), (-a, 0)$.

(iii) $B$ ও $B'$-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b), (0, -b)$.

(iv) $S$ ও $S'$-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(ae, 0), (-ae, 0)$.

(v) $Z$ ও $Z'$-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$, $\left(-\frac{a}{e}, 0\right)$.

(vi) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $AA'=2a$.

(vii) উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $BB'=2b$.

(viii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $LL'=\frac{2b^2}{a}$.

(ix) উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

(x) নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $ex-a=0$.
নিয়ামক $Z'M'$-এর সমীকরণ $ex+a=0$.

(xi) পরাক্ষের সমীকরণ $y=0$, উপাক্ষের সমীকরণ $x=0$.

(xii) নাভিলম্ব $LL'$-এর সমীকরণ $x=ae$.
নাভিলম্ব $L_1L'_1$-এর সমীকরণ $x=-ae$.

মন্তব্য ঃ 1. উপবৃত্তের যখন পরাক্ষ $y$-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ $x$-অক্ষ বরাবর হয় তখন উপবৃত্তের সমীকরণ হয় $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, $(b>a)$.

যদি কোন সময় $b>a$ হয়, তাহা হইলে উপরের সূত্রগুলি $a$-এর পরিবর্তে $b$ এবং $b$-এর পরিবর্তে $a$ ধরিলেই প্রয়োজনীয় ফল (result) পাওয়া যাইবে।

2. পরাক্ষ $x$-অক্ষের সমান্তরাল, উপাক্ষ $y$-অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র $C$-এর স্থানাঙ্ক যদি $(h, k)$ হয় তখন উপবৃত্তের সমীকরণ হয়

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

### 6.7. যে-কোন নাভি ও নিয়ামক লইয়া উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (*To find the equation of a parabola when its focus and the equation of directrix are given*) :

মনে কর, নাভি $S$-এর স্থানাঙ্ক $(h, k)$, নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $lx+my+n=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $e$। উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে-কোন একটি বিন্দু লও। $SP$ যোগ কর। $P$ হইতে নিয়ামকের উপর $PM$ লম্ব টান।

$$\therefore \quad SP=ePM$$

$$\text{বা,} \quad SP^2=e^2PM^2. \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

এখানে $S$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h, k)$, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$।

$$\therefore \quad SP^2=(x-h)^2+(y-k)^2.$$

$P(x, y)$ হইতে $lx+my+n=0$-এর উপর লম্বদৈর্ঘ্য

$$PM=\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$\text{বা,} \quad PM^2=\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$$

(i) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}.$$

ইহাই হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

6.8. $y=mx+c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবার শর্ত (*To find the condition that* $y=mx+c$ *may touch the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$) :

$y=mx+c$ হইতে $y$-এর মান $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

বা, $b^2x^2+a^2m^2x^2+a^2c^2+2a^2cmx-a^2b^2=0$

বা, $x^2(b^2+a^2m^2)+2a^2cm.x+a^2(c^2-b^2)=0.$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $x$-এর দুইটি বীজ আছে। অতএব সরলরেখা উপবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। এই দুইটি ছেদবিন্দু যখন একটি মাত্র ছেদবিন্দুতে সমাপতিত হয় তখন ঐ সরলরেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ সরলরেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি এই বীজ দুইটি সমান হয়।

এই বীজ দুইটি সমান হওয়ার শর্ত হইল

$$4a^4c^2m^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)=0$$

বা, $a^2m^2c^2-(a^2m^2+b^2)(c^2-b^2)=0$

বা, $a^2m^2c^2-a^2m^2c^2+a^2m^2b^2+b^4-b^2c^2=0$

বা, $b^2c^2=b^2(a^2m^2+b^2)$

বা, $c^2=a^2m^2+b^2$

$\therefore\ c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$\therefore\ c=\pm\sqrt{(a^2m^2+b^2)}$ হইলে $y=mx+c$ সরলরেখাটি

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

**মন্তব্য :** $m$-এর মান শূন্য ছাড়া যে-কোন মানেই $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ এবং $y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখা দুইটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক হইবে।

**6.9 $y = mx + c$ সরলরেখার সহিত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ছিন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়** *(To find the length of the chord of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ intercepted on the line $y=mx+c$) :*

মনে কর, $y = mx + c$ ··· (i) সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ··· (ii) উপবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) নং হইতে $y$-এর মান লইয়া (ii) নং সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

বা, $(b^2+a^2m^2)x^2+2mca^2x+a^2(c^2-b^2)=0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $x$-এর দুইটি বীজ।

মনে কর, বীজদ্বয় $x_1$, এবং $x_2$,

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2ma^2c}{a^2m^2+b^2},\ x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore\ (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{4m^2c^2a^4}{(a^2m^2+b^2)^2}-\frac{4a^2(c^2-b^2)}{(a^2m^2+b^2)}$$

$$=\frac{4a^2b^2(a^2m^2+b^2-c^2)}{(a^2m^2+b^2)^2}.$$

যেহেতু $y=mx+c$ সরলরেখা $(x_1, y_1)$ এবং $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী

$$\therefore\ y_1=mx_1+c$$

$$y_2=mx_2+c$$

$$\therefore\ y_1-y_2=m(x_1-x_2)$$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{(1+m^2)(x_1-x_2)^2}$$

$$=\frac{2ab\sqrt{1+m^2}\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}.$$

**মন্তব্য :** $y = mx + c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $P$ ও $Q$ দুইটি বিন্দু $P$ বিন্দুতে সমাপতিত হয়,

অর্থাৎ যদি জ্যা $(PQ)$-এর দৈর্ঘ্য $= 0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\sqrt{a^2m^2 + b^2 - c^2} = 0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c^2 = a^2m^2 + b^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ হয়।

$\therefore$ $c = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ হইলে, $y = mx + c$ সরলরেখা

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-এর স্পর্শক হইবে।

**6.10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** [*To find the equation of tangent to an ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *at* $(x_1, y_1)$] :

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ ছাড়া $Q(x_2, y_2)$ একটি অপর বিন্দু।

$P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \cdots\text{(i)}$$

যেহেতু $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \cdots\text{(ii)}$$

$$\text{এবং} \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \cdots\text{(iii)}$$

(ii) ও (iii) হইতে পাই, $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$

বা, $\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = -\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2}$

বা, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$

(i)নং সমীকরণ হইতে পাই, $y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{(x_1+x_2)(x-x_1)}{(y_1+y_2)}$

ইহা স্পর্শক হইবে যদি $Q$ বিন্দু $P$ বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়, অর্থাৎ যদি $x_2=x_1, y_2=y_1$ হয়।

$\therefore$ $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1{}^2=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

বা, $yy_1-y_1{}^2=-\frac{b^2}{a^2}(xx_1-x_1{}^2)$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1 \qquad \left(\because\ \frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1\right)$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$

**6.11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** [*To find the equation of normal to the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *at the point* $(x_1, y_1)$ ] :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

বা, $y=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}+\frac{b^2}{y_1} \qquad \cdots \quad (i)$

আবার $(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots \quad (ii)$$

যেহেতু (ii) নং সরলরেখা স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুতে লম্ব

$\therefore$ $m\times\left(-\frac{b^2}{y_1}\times\frac{x_1}{a^2}\right)=-1$ বা, $m=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-y_1=\dfrac{a^2y}{b^2x_1}(x-x_1)$

$$\text{বা,}\quad \frac{x-x_1}{\dfrac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{y_1}{b^2}}$$

ইহাই হইল অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ।

**6.12. বহিঃস্থ কোন বিন্দু $(x', y')$ হইতে উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন :**

আমরা জানি, $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখা $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

যদি এই স্পর্শক $(x', y')$ বিন্দুগামী হয়, তাহা হইলে

$$y'=mx'+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

বা, $(y'-mx')^2=a^2m^2+b^2$

বা, $y'^2+m^2x'^2-2x'y'm-a^2m^2-b^2=0$

বা, $m^2(x'^2-a^2)-2x'y'm+(y'^2-b^2)=0$

ইহা $m$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $m$-এর দুইটি মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

**6.13. উপবৃত্তের পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয়** *(To find the locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to an ellipse)* :

মনে কর, $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ $\cdots$(i)

সরলরেখা $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

(i) নং স্পর্শকের উপর লম্ব সেইরূপ স্পর্শকের সমীকরণ

$$y=-\frac{x}{m}+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$$

[(i) নং সমীকরণে $m$-এর পরিবর্তে $-\dfrac{1}{m}$ লিখিয়া পাওয়া গেল।]

বা, $my+x=\sqrt{a^2+b^2m^2}$ $\cdots$(ii)

(i) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যায় $y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2}$ $\cdots$(iii)

এবং (ii) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যায় $ym+x=\sqrt{a^2+m^2b^2}$ $\cdots$(iv)

এই দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা একই সঙ্গে (iii) ও (iv) সমীকরণ সিদ্ধ হয়। (iii) ও (iv) সমীকরণ দুইটি হইতে $m$-কে অপনয়ন (eliminate) করিলেই ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ পাওয়া যায়।

(iii) ও (iv)-কে বর্গ করিয়া এবং পরে যোগ করিয়া পাই,

$$y^2+m^2x^2-2yxm+m^2y^2+x^2+2xym$$
$$=m^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)$$

বা, $y^2(1+m^2)+x^2(1+m^2)=(a^2+b^2)(1+m^2)$

বা, $(1+m^2)(x^2+y^2)=(a^2+b^2)(1+m^2)$

$\therefore\ x^2+y^2=a^2+b^2.$

$\therefore$ লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল

$$x^2+y^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2.$$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং উপবৃত্তের কেন্দ্র হইল ইহার কেন্দ্র এবং ইহার ব্যাসার্ধ হইল $\sqrt{a^2+b^2}$।

এই বৃত্তটিকে উপবৃত্তটির নিয়ামক বৃত্ত (Director circle) বলে।

**6.14. সহকারী বৃত্ত (*Auxiliary Circle*) :**

কোন উপবৃত্তের পরাক্ষকে (Major axis) ব্যাস লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কন করা হয় সেই বৃত্তকে উপবৃত্তের সহকারী বৃত্ত বলে। সহকারী বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$।

**ব্যাস** (Diameter) : কোন উপবৃত্তের যে সকল জ্যা সমান্তরাল তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা। এই সরলরেখাটিকে উপবৃত্তটির ব্যাস (Diameter) বলে এবং জ্যাগুলিকে উহার Double ordinate বলে।

**অনুবন্ধী ব্যাস বা প্রতিযোগী ব্যাস (*Conjugate Diameters*) :** দুইটি ব্যাস যদি এমনভাবে অবস্থান করে যে, একটি ব্যাস অপরটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে উহাদিগকে অনুবন্ধী ব্যাস বলে।

**6.15. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা** (*To show that the locus of the middle points of a system of parallel chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is a straight line*) :

মনে কর, $y=mx+c$ ... (i) সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (ii) উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যে যে-কোন একটি জ্যা।

(i) ও (ii) নং হইতে পাই, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$

বা, $x^2(b^2+a^2m^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $x$-এর দুইটি বীজ। মনে কর, বীজ দুইটি $x_1$ এবং $x_2$ ।

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{b^2+a^2m^2} \qquad \text{... (iii)}$$

মনে কর, $(h, k)$ হইল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \quad h=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mc}{b^2+a^2m^2} \qquad \text{... (iv)}$$

যেহেতু $(h, k)$ বিন্দু $y=mx+c$ জ্যা-এর উপর অবস্থিত $\therefore \quad k=mh+c.$

$$\therefore \quad k=mh+\frac{(b^2+a^2m^2)h}{(-a^2m)} \quad \text{[ (iv)-এর সাহায্যে ]}$$

$$\text{বা,} \quad k=\frac{-a^2m^2h+b^2h+a^2m^2h}{a^2m}$$

$$\therefore \quad k=-\frac{b^2h}{a^2m} \qquad \text{... (v)}$$

$\therefore$ $(h, k)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল $y=-\frac{b^2x}{a^2m}.$

ইহা একটি সরলরেখার সমীকরণ যাহা মূলবিন্দু দিয়া যায় অর্থাৎ অধিবৃত্তের কেন্দ্রগামী হয়।

**মন্তব্য ঃ** এই সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্তের ব্যাস।

(i) $-\frac{b^2}{a^2m}$-কে যদি $m'$ ধরা হয়, তাহা হইলে $mm'=-m\frac{b^2}{a^2m}=-\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore$ $y=m'x$ ব্যাসটি $y=mx$ ব্যাসের সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে যদি $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ হয়।

আবার যদি $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ হয়, তাহা হইলে $y=mx$ ব্যাসটি $y=m'x$ ব্যাসের সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

$\therefore \quad mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ হইলে $y = mx$ এবং $y = m'x$ ব্যাস দুইটি পরস্পরের অনুবন্ধী (conjugate) হইবে।

### 6.16. সহকারী বৃত্ত (*Auxiliary Circle*) :

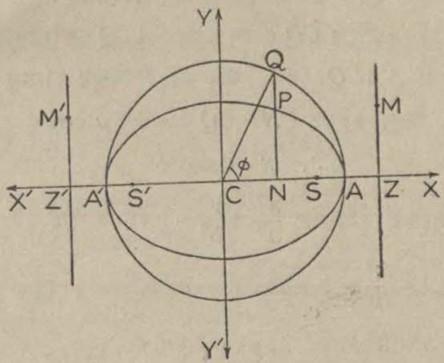



Fig. 55

এখানে পরাক্ষ (Major axis) $AA'$-কে ব্যাস ধরিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। এই বৃত্তকে সহকারী বৃত্ত বলে। কেন্দ্র $C$ হইল সহকারী বৃত্তের কেন্দ্র এবং $AA' = 2a$. $\therefore \quad CA = CA' = a.$

সহকারী বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$ $\cdots$ (i)

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\cdots$ (ii)

উপবৃত্তের উপর $P$ একটি বিন্দু। $CX$-এর উপর $PN$ লম্ব টান এবং $NP$-কে বর্ধিত করা হইল এবং ইহা সহকারী বৃত্তকে $C$ বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore$ $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(CN, NP)$ এবং $Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(CN, NQ)$।

এখন (i) ও (ii) হইতে পাই, $CN^2 + NQ^2 = a^2$

$$\text{বা,} \quad \frac{CN^2}{a^2} + \frac{NQ^2}{a^2} = 1 \quad \ldots \text{(iii)}$$

$$\therefore \quad \frac{CN^2}{a^2} + \frac{NP^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) হইতে পাই, $\frac{PN^2}{b^2} = \frac{QN^2}{a^2}$

$$\therefore \frac{PN}{QN} = \frac{b}{a} = \frac{\text{অর্ধ-উপাক্ষ}}{\text{অর্ধ-পরাক্ষ}}$$

এই $Q$ বিন্দুকে $P$ বিন্দুর অনুরূপ (corresponding) বিন্দু বলে।

**6.17. উৎকেন্দ্রিক কোণ (*Eccentric Angle*) :**

পূর্ব পৃষ্ঠার 55 নং চিত্রে $CQ$ যোগ কর। $ACQ$ কোণকে উৎকেন্দ্রিক কোণ বলে। মনে কর, $\angle ACQ = \phi$। মনে কর, $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$। এখন $QNC$ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে $CN = CQ \cos\phi = a\cos\phi$,

$$\therefore \quad x = a\cos\phi$$

এখন উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ হইতে পাই,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = 1 - \cos^2\phi = \sin^2\phi$$

বা, $y^2 = b^2\sin^2\phi \qquad \therefore \quad y = b\sin\phi.$

$\therefore$ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\phi, b\sin\phi)$।

$x = a\cos\phi$, $y = b\sin\phi$ সমীকরণ দুইটি হইতে $\phi$-কে অপনয়ন করিলেই উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ পাওয়া যাইবে।

$(a\cos\phi, b\sin\phi)$ বিন্দুকে সংক্ষেপে '$\phi$' বলা হয়।

$\left.\begin{array}{l} x = a\cos\phi \\ y = b\sin\phi \end{array}\right\}$ এই দুইটি সমীকরণকে একত্রে উপবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ (Parametric equation) বলে, যেখানে $\phi$ হইল variable parameter।

**6.18. প্রমাণ কর $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যে জ্যা (h, k) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ $\frac{h}{a^2}(x-h) + \frac{k}{b^2}(y-k) = 0$.**

(*Show that the equation of the chord of the ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *which is bisected at the point* $(h, k)$ *is* $\frac{h}{a^2}(x-h) + \frac{k}{b^2}(y-k) = 0$) :

মনে কর, $y = mx + c$ সরলরেখা হইল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের একটি জ্যা। 6.14 অনুচ্ছেদের (v) সমীকরণ হইতে পাই,

$$k = -\frac{b^2}{a^2} \frac{h}{m}$$

বা, $m = -\dfrac{b^2h}{a^2k}$

$\therefore$ $y = mx + c$ জ্যা-এর $m$ হইল $-\dfrac{b^2h}{a^2k}$ এবং ইহা $(h, k)$ বিন্দু দিয়া যায়।

$\therefore$ $k = mh + c$ বা, $c = k - mh = k + \dfrac{b^2h^2}{a^2k}$

$$\therefore \quad c = \frac{k^2a^2 + b^2h^2}{ka^2}$$

$\therefore$ জ্যাটির সমীকরণ হইল $y = -\dfrac{b^2h}{a^2k}x + \dfrac{k^2a^2 + b^2h^2}{ka^2}$

বা, $ka^2y + b^2hx - k^2a^2 - b^2h^2 = 0$

বা, $\dfrac{ky}{b^2} + \dfrac{xh}{a^2} - \dfrac{k^2}{b^2} - \dfrac{h^2}{a^2} = 0$

বা, $\dfrac{h}{a^2}(x-h) + \dfrac{k}{b^2}(y-k) = 0$

ইহা হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**6.19. উপবৃত্তের যে-কোন ব্যাসের একটি প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শক এই ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যাগুলির সমান্তরাল হইবে** *(To an ellipse at either end of any diameter is parallel to the chords bisected by the diameter)* :

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$y = mx$-এর সমান্তরাল জ্যাগুলিকে যে ব্যাস সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ $y = m_1x$ যেখানে $m_1 = -\dfrac{b^2}{a^2m}$ ... (i)

মনে কর, $y = m_1x$ ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু $(x_1, y_1)$।

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $y_1 = -\dfrac{b^2}{a^2m}x_1$

$$\therefore \quad m = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} \qquad \text{... (ii)}$$

এখন, $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \text{বা,} \quad \frac{yy_1}{b^2}=-\frac{xx_1}{a^2}+1$$

$$\text{বা,} \quad y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1}$$

$\therefore$ স্পর্শকের gradient $=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=m$ [ (ii) এর সাহায্যে ]

$\therefore$ স্পর্শকটি $y=mx$-এর সমান্তরাল।

$\therefore$ ব্যাসের যে-কোন প্রান্তে যদি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তাহা হইলে এই স্পর্শক ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যাগুলির সমান্তরাল হইবে।

**6.20. উপস্পর্শক (*Subtangent*) এবং উপঅভিলম্ব (*Subnormal*) :**

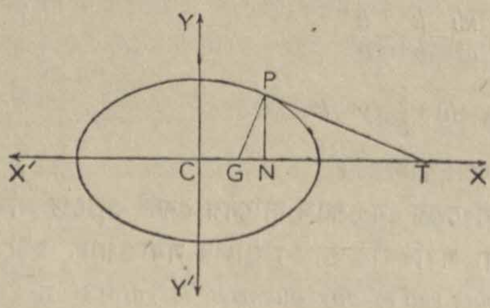



Fig. 56

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। $P$ বিন্দুতে $PT$ স্পর্শক এবং $PG$ অভিলম্ব টানা হইয়াছে। $PT$ এবং $PG$ $x$-অক্ষকে যথাক্রমে $T$ ও $G$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $CX$-এর উপর $PN$ লম্ব টান। অতএব $P$ বিন্দুতে $NT$ হইল উপস্পর্শক (Subtangent) এবং $NG$ হইল উপঅভিলম্ব (Subnormal)।

উদাহরণ 1. $4x^2+5y^2=20$ উপবৃত্তের পরাক্ষ দৈর্ঘ্য, উপাক্ষ দৈর্ঘ্য, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির সমীকরণ $4x^2+5y^2=20$

বা, $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=0$

এখানে, $a=\sqrt{5}, b=2$

যেহেতু $a>b$, $\therefore$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=2\sqrt{5}$

উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=2.2=4$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.4}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

উৎকেন্দ্রতা $(e)=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$

শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$ বা, $(\sqrt{5}, 0)$, এবং $(-\sqrt{5}, 0)$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং $(-ae, 0)$ বা, $(1, 0)$ এবং $(-1, 0)$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x=\frac{a}{e}$ এবং $x=-\frac{a}{e}$

বা, $x=\frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=5$ অর্থাৎ $x-5=0$

এবং $x=-\frac{a}{e}=-\frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-5$ অর্থাৎ $x+5=0$

$\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল $x-5=0$ এবং $x+5=0$.

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $x=ae$ এবং $x=-ae$

বা, $x=\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}=1$ বা, $x-1=0$

এবং $x=-ae=-1$ বা, $x+1=0$

$\therefore$ নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $x-1=0$ এবং $x+1=0$.

**উদাহরণ 2.** $4x^2+3y^2=12$ উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য, উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, পরাক্ষ ও উপাক্ষের সমীকরণ, নিয়ামকদ্বয় ও নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণ $4x^2+3y^2=12$ বা, $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

এখানে $a=\sqrt{3}, b=2$, যেহেতু $b>a$, অতএব $y$-অক্ষে পরাক্ষ, $x$-অক্ষে উপাক্ষ অবস্থিত।

∴ শীর্ষবিন্দু দুইটি ও নাভি দুইটি $y$-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং নাভিলম্বদ্বয় ও নিয়ামকদ্বয় $x$-অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

∴ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=2.2=4$.

উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=2.\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2a^2}{b}=\dfrac{2.3}{2}=3$.

উৎকেন্দ্রতা $(e)=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$.

শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, b)$ এবং $(0, -b)$ বা, $(0, 2)$ এবং $(0, -2)$.

নাভিদুইটির স্থানাঙ্ক $(0, be)$ এবং $(0, -be)$ বা $(0, 1)$ এবং $(0, -1)$

পরাক্ষের সমীকরণ $x=0$, উপাক্ষের সমীকরণ $y=0$,

নিয়ামক দুইটির সমীকরণ $y=\dfrac{b}{e}$ এবং $y=-\dfrac{b}{e}$

বা, $y=4$ এবং $y=-4$

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $y=be$ এবং $y=-be$ বা, $y=1$ এবং $y=-1$.

**উদাহরণ** 3. $16x^2+9y^2-32x+36y-92=0$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়, অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণ $16x^2+9y^2-32x+36y-92=0$ ··· (i)

বা, $16(x-1)^2+9(y+2)^2=144$

বা, $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

$x-1=X$, $y+2=Y$ ধরিলে সমীকরণের আদর্শ রূপ হয়

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{16}=1 \qquad \cdots \text{(ii)}$$

এখানে $a=3, b=4$, দেখা যাইতেছে যে $b>a$

∴ পরাক্ষ রেখা $y$-অক্ষের উপর এবং উপাক্ষ রেখা $x$-অক্ষের উপর অবস্থিত।

∴ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=2.4=8$

উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2.3 = 6$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2.9}{4} = \frac{9}{2}$

প্রদত্ত সমীকরণের জন্য ইহাদের মানের কোন পরিবর্তন হইবে না।

(ii) নং নূতন সমীকরণে কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, -2)$

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

নূতন সমীকরণে নাভি $(0, \pm be)$ বা $(0, \pm \sqrt{7})$

প্রদত্ত সমীকরণে নাভি $(1, \pm \sqrt{7} - 2)$

নূতন সমীকরণে নিয়ামকের সমীকরণ

$$y = \pm \frac{b}{e}$$

বা, $y = \pm \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$

[$\because$ $x - 1 = X$
$\therefore$ $x = X + 1 = 1 + 0 = 1$
এবং $y + 2 = Y$
বা, $y = Y - 2 = \pm \sqrt{7} - 2$]

প্রদত্ত সমীকরণে নিয়ামকের সমীকরণ

$$y + 2 = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$$

[$\because$ $y + 2 = Y$
বা, $y + 2 = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$]

নূতন সমীকরণে পরাক্ষের সমীকরণ $X = 0$

প্রদত্ত সমীকরণে পরাক্ষের সমীকরণ $x - 1 = 0$

নূতন সমীকরণে উপাক্ষের সমীকরণ $Y = 0$

প্রদত্ত সমীকরণে উপাক্ষের সমীকরণ $y + 2 = 0$.

**উদাহরণ 4.** একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার নাভি $(-1, 1)$, নিয়ামকের সমীকরণ $x - y + 3 = 0$ এবং $e = \frac{1}{2}$.

মনে কর, উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু।

$P(x, y)$ ও $(-1, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$

আবার $P(x, y)$ বিন্দু হইতে $x - y + 3 = 0$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব

$$= \frac{x - y + 3}{\sqrt{2}}$$

10

∴ উপবৃত্তের সূত্র অনুসারে

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\frac{x-y+3}{2\sqrt{2}}$$

বা, $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0.$

**উদাহরণ 5.** $2x^2+3y^2=30$ উপবৃত্তের (2, 3) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণ $2x^2+3y^2=30$ বা, $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

(2, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x.2}{15}+\frac{y.3}{10}=1$

$$\text{বা,}\quad 4x+9y-30=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার $4x+9y-30=0$ সরলরেখার উপর লম্ব যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $9x-4y+k=0$

যেহেতু ইহা (2, 3) বিন্দুগামী, ∴ $18-12+k=0$ ∴ $k=-6.$

∴ অভিলম্বের সমীকরণ $9x-4y-6=0.$

**উদাহরণ 6.** $x^2+2y^2=8$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $y-2x=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y-2x=0$ ··· (i) সরলরেখার সহিত সমান্তরাল এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ $y-2x+k=0$ ··· (ii)

(ii) হইতে পাই, $y=2x-k$

$x^2+2y^2=8$ সমীকরণে $y$-এর মান বসাইয়া পাই,

$$x^2+2(2x-k)^2=8$$

$$\text{বা,}\quad x^2+2(2x-k)^2-8=0$$

$$\text{বা,}\quad 9x^2-8kx+(2k^2-8)=0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

কিন্তু $y-2x+k=0$ সরলরেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি ছেদবিন্দু দুইটি একটি বিন্দুতে সমাপতিত হয়; এই শর্তে (iii) নং সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

∴ $64k^2-4.9(2k^2-8)=0$

বা, $k^2=36$ ∴ $k=\pm 6$

(ii) নং সমীকরণ হইতে পাই, $y-2x\pm 6=0$

$\therefore$ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হইল $y - 2x + 6 = 0$

এবং $y - 2x - 6 = 0.$

**উদাহরণ 7.** দেখাও যে $y = x + 4$ সরলরেখা $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{11} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$y = x + 4$ সমীকরণ হইতে $y$-এর মান $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{11} = 1$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{5} + \frac{(x+4)^2}{11} = 1$$

বা, $16x^2 + 40x + 25 = 0$

বা, $(4x+5)^2 = 0 \quad \therefore \; x = -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}$

$y = x + 4 = -\frac{5}{4} + 4 = \frac{11}{4}$

এবং $y = x + 4 = -\frac{5}{4} + 4 = \frac{11}{4}.$

এখানে দেখা যাইতেছে যে ছেদবিন্দু দুইটি একটি বিন্দুতে সমাপতিত হইয়াছে।

$\therefore$ $y = x + 4$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{11} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$.

**উদাহরণ 8.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $x$-অক্ষের সহিত $60^\circ$ কোণে নত।

মনে কর, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ সরলরেখাদ্বয় $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

এখানে $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয় হইল $y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{3a^2 + b^2}$.

**উদাহরণ 9.** $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তের $3y - 2x = 0$ ব্যাসটির প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\therefore$ $a^2 = 9, \; b^2 = 4$

প্রদত্ত ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{2}{3}x$, $\quad\therefore\quad m=\frac{2}{3}$

মনে কর, প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ $y=m_1x$

$\therefore\quad mm_1=-\dfrac{b^2}{a^2}$

বা, $\frac{2}{3}m_1=-\frac{4}{9}\quad\therefore\quad m_1=-\frac{2}{3}$

$\therefore$ প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ $y=-\frac{2}{3}x$

বা, $2x+3y=0$.

**উদাহরণ 10.** প্রমাণ কর যে $2x^2+3y^2=6$ উপবৃত্তের যে ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ $x-2y=0$ এবং $4x+3y=0$ উহারা দুইটি প্রতিযোগী ব্যাস।

উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

এখানে $a^2=3$, $b^2=2$

ব্যাস দুইটির সমীকরণ $y=\dfrac{x}{2}$, $y=-\frac{4}{3}x$.

$\therefore\quad mm_1=\frac{1}{2}\times-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$ ... (i)

এবং $-\dfrac{b^2}{a^2}=-\frac{2}{3}$ ... (ii)

(i) ও (ii) হইতে পাই, $mm_1=-\dfrac{b^2}{a^2}$. ইহাই হইল ব্যাস দুইটি প্রতিযোগী হওয়ার শর্ত। $\therefore$ $x-2y=0$, $4x+3y=0$ ব্যাস দুইটি প্রতিযোগী ব্যাস।

**উদাহরণ 11.** প্রমাণ কর যে উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে যে-কোন স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল ধ্রুবক।

মনে কর, $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ($m$-এর যে-কোন মান হউক না কেন) সরলরেখা হইল $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের একটি স্পর্শক।

মনে কর, এই স্পর্শকের উপর $S$ হইতে লম্বের দূরত্ব $SY$ এবং $S'$ হইতে লম্বের দূরত্ব $S'Y'$।

এই উপবৃত্তের $S$-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং $S'$-এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$.

$$\therefore\quad SY=\frac{mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

এবং $$S'Y'=\frac{-mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\therefore \quad SY.S'Y' = \frac{a^2m^2 + b^2 - a^2m^2e}{1+m^2} \qquad \left(\because \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{mb^2 + b^2}{1+m^2} = b^2 \text{ (ধ্রুবক)।}$$

## প্রশ্নমালা 6

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেক উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্ব, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $4x^2 + 5y^2 = 1$ (ii) $9x^2 + 4y^2 = 36$

(iii) $2x^2 + 3y^2 = 6$ (iv) $3x^2 + 4y^2 = 12$

(v) $3x^2 + 4y^2 = 48$

2. নিম্নলিখিত প্রত্যেক উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্ব, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 0$

(ii) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$

3. $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, এবং শীর্ষ-বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. একটি উপবৃত্তের নাভিলম্ব পরাক্ষের অর্ধেক। উহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

5. অক্ষদ্বয়কে স্থানাঙ্কের অক্ষ এবং কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) যাহার নাভিলম্ব 5, $e = \frac{2}{3}$

(ii) যাহার পরাক্ষ 8, $e = \frac{1}{2}$

(iii) যাহার নাভির স্থানাঙ্ক $(\pm 4, 0)$, $e = \frac{1}{3}$

(iv) যাহার নাভিলম্ব 3 এবং $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) যাহা (2, 2) ও (3, 1) বিন্দুদ্বয়গামী

(vi) যাহার নাভি (3, 0), শীর্ষ (2, 0), $e = \frac{2}{3}$

(vii) যাহার পরাক্ষ $2a$, নাভি $(\pm e, 0)$.

6. যে উপবৃত্তের নাভি (2, 1), নিয়ামকের সমীকরণ $2x+y-3=0$, $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. উপবৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) যাহার নাভি (1, 0), $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$, নিয়ামক $x-y+1=0$

(ii) যাহার নাভি (1, −1), $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$, নিয়ামক $2x-y+2=0$

(iii) যাহার নাভি (6, 7), $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$, নিয়ামক $x+y+2=0$

(iv) যাহার নাভি (1, −2), $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$, নিয়ামক $2x-y-1=0$

(v) যাহার নাভি (−1, 1), $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ নিয়ামক $x-y+3=0$.

8. দেখাও যে,

(i) $x-3y-13=0$ সরলরেখা $\frac{y^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$-কে স্পর্শ করে।

(ii) $y=x+4$ সরলরেখা $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{11}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

(iii) $x+y=5$ সরলরেখা $2x^2+3y^2=30$ কে স্পর্শ করে।

প্রতি ক্ষেত্রেই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. নিম্নলিখিত উপবৃত্তের স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $4x^2+9y^2=20$ উপবৃত্তের $(1, \frac{4}{3})$ বিন্দুতে ;

(ii) $x^2+2y^2=6$ উপবৃত্তের (2, 1) বিন্দুতে।

10. দেখাও যে $y=x+\sqrt{\frac{5}{6}}$ সরলরেখাটি $2x^2+3y^2=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

11. $2x^2+y^2=17$ উপবৃত্তের $4x-3y=12$ সরলরেখার সমান্তরাল স্পর্শকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $x^2+2y^2=9$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $4x-y-6=0$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. $a$-এর মান কত হইলে $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{3}=1$ উপবৃত্তটি $(\sqrt{2}, 0)$ এবং $(-\sqrt{2}, 0)$ বিন্দুদ্বয়গামী হয়। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

14. কি শর্তে $lx + my + xn = 0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

15. $3x^2 + 5y^2 = 32$ উপবৃত্ত দ্বারা $x + y = 4$ রেখার উপর ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

16. (3, 2) বিন্দু হইতে অঙ্কিত $2x^2 + 3y^2 = 6$ উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. দেখাও যে $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের $(\frac{16}{5}, \frac{9}{5})$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষদ্বয়কে সমান অংশে ছিন্ন করে।

18. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের যে জ্যা (2, 1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

19. দেখাও যে $3x^2 + 4y^2 = 5$ উপবৃত্তের যে ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ $y + 3x = 0, 4y - x = 0$ তাহা দুইটি প্রতিযোগী ব্যাস।

20. দেখাও যে $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তের প্রতিযোগী ব্যাসগুলি $4x - 3y + 4 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখা দুইটির সমান্তরাল।

21. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তের $y - 2x = 0$ ব্যাসটির প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

22. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের যে জ্যা (2, −1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

23. $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের $3x + 2y = 0$ ব্যাসটির প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

24. $x^2 + 2y^2 = 2$ উপবৃত্তের যে ব্যাস $y = 5x + 3$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির সমদ্বিখণ্ডক তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

25. $4x^2 + 5y^2 = 20$ উপবৃত্তের সেই জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর যেগুলি (−2, 1) বিন্দুগামী।

# সপ্তম অধ্যায়

## পরাবৃত্ত (Hyperbola)

7.1. পরাবৃত্ত এমন একটি শঙ্কুচ্ছেদ (conic section) যাহার উৎকেন্দ্রতা $e>1$। পরাবৃত্তের শীর্ষ, নাভি, নিয়ামক, উৎকেন্দ্রতা ইত্যাদি সম্বন্ধে নিম্নে বিস্তারিত আলোচনা করা হইল।

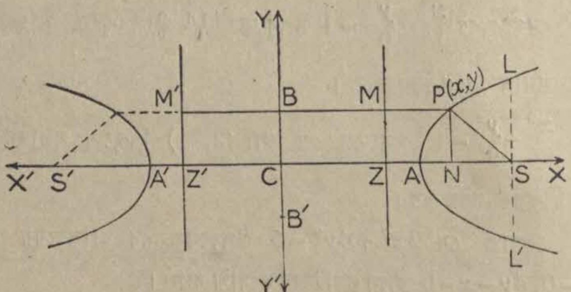



Fig. 57

57 নং চিত্রে নির্দিষ্ট বিন্দু $S$ হইল নাভি, নির্দিষ্ট সরলরেখা $ZM$ নিয়ামক। পরাবৃত্তের আর একটি নাভি $S'$ এবং আর একটি নিয়ামক $Z'M'$ থাকে। $A$ ও $A'$ পরাবৃত্তের দুইটি শীর্ষ। $LL'$ পরাবৃত্তের একটি নাভিলম্ব।

**7.2. পরাবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of a hyperbola taking the centre as origin*) :

মনে কর, পরাবৃত্তের $S$ নাভি, $ZM$ নিয়ামক, $e$ ($e>1$) উৎকেন্দ্রতা। নিয়ামক $ZM$-এর উপর $SZ$ লম্ব টান। পরাবৃত্তকে $SZ$ এমন ভাবে ছেদ করিল যেন $\dfrac{SA}{AZ}=e$ হয় (যেখানে $e>1$)।

বা, $SA=eAZ$ ... (i)

$SZ$-এর বর্ধিত রেখার উপর $A'$ অপর একটি বিন্দু পাওয়া যায় যাহাতে

$$\frac{SA'}{A'Z}=e \quad \text{বা,} \quad SA'=eA'Z \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এখন $A$ ও $A'$ বিন্দু দুইটি পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত থাকিবে। মনে কর, $AA'$-এর মধ্যবিন্দু $C$ এবং $AA'=2a$.

$$\therefore \quad CA=CA'=a$$

(i) এবং (ii)-কে যোগ করিয়া পাই, $SA+SA'=e(AZ+A'Z)$

বা, $(CS-CA)+(CS+CA')=eAA'$

বা, $2CS=2a.e \qquad (\because CA=CA'=a)$

$$\therefore \quad CS=ae \qquad \cdots \qquad \text{(iii)}$$

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া পাই, $SA'-SA=e(A'Z-AZ)$

বা, $AA'=e[(CA'+CZ)-(CA-CZ)]$

বা, $AA'=e.2CZ$ বা, $2a=2e.CZ$

$$\therefore \quad CZ=\frac{a}{e} \qquad \cdots \qquad \text{(iv)}$$

$C$-কে মূলবিন্দু, $CS$-কে $x$-অক্ষ, $C$ বিন্দুতে $CS$-এর উপর লম্ব $CY$-কে $y$-অক্ষ ধর। মনে কর, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। $P$ হইতে $CX$-এর উপর $PN$ লম্ব এবং নিয়ামক $ZM$-এর উপর $PM$ লম্ব টান।

$\therefore \quad SP=ePM$ বা, $SP^2=e^2PM^2=e^2ZN^2 \quad (\because PM=ZN)$

এখন $NSP$ সমকোণী ত্রিভুজে $SP^2=SN^2+PN^2$

বা, $SN^2+PN^2=SP^2$

বা, $(CS-CN)^2+PN^2=e^2.ZN^2$

বা, $(ae-x)^2+y^2=e^2(CN-CZ)^2$

বা, $(ae-x)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1 \qquad \cdots \qquad \text{(v)}$

এখানে যেহেতু $e>1 \quad \therefore \quad e^2-1$ ধনাত্মক হইবে।

$a^2(e^2-1)=b^2$ ধর।

$\therefore$ (v) হইতে পাই, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots \qquad \text{(vi)}$

ইহা হইল পরাবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

**মন্তব্য :** (i) পরাবৃত্তে $a>b$, $a=b$, $a<b$ হইতে পারে।

(ii) $x$-অক্ষের $AA'$ অংশকে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ (Transverse axis) বলে।

যদি $y$-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু এমনভাবে লওয়া হয় যেন $CB=CB'=b$, তাহা হইলে $BB'$-কে বলা হয় অনুবন্ধী অক্ষ (Conjugate axis)।

(iii) এখন $a^2(e^2-1)=b^2$

$$\text{বা,}\quad e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$ ( সর্বদাই ধনাত্মক মান লইতে হইবে )

(iv) $a^2(e^2-1)=b^2$ বা, $a^2e^2=a^2+b^2$

$\therefore$ $CS^2=a^2+b^2$ $(\because CS=ae)$

(v) পরাবৃত্তের সমীকরণে $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x=ae$ এবং $y=SL$ বসাও। কারণ $S$-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং নাভিলম্বের প্রান্ত $L$-এর স্থানাঙ্ক $(ae, SL)$।

$\therefore$ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ হইতে পাই,

$$\frac{a^2e^2}{a^2}-\frac{SL^2}{b^2}=1 \quad \text{বা,}\quad \frac{SL^2}{b^2}=e^2-1=1+\frac{b^2}{a^2}-1=\frac{b^2}{a^2}$$

বা, $SL^2=\dfrac{b^4}{a^2}$ $\therefore$ $SL=\dfrac{b^2}{a}$ ( ধনাত্মক মান লইয়া )

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $LL'=2SL=2\dfrac{b^2}{a}$.

(vi) এখানে যেহেতু $C$ মূলবিন্দু এবং $CS=ae$ $\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ এবং যেহেতু $CZ=\dfrac{a}{e}$ $\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x=\pm\dfrac{a}{e}$.

2. প্রমাণ কর $\dfrac{PN^2}{AN.A'N}=\dfrac{CB^2}{CA^2}$ [ 57 নং চিত্র ধরিয়া ]

এখন পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ হইতে পাই,

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{x^2-a^2}{a^2}=\frac{(x+a)(x-a)}{a^2}$$

বা, $\dfrac{PN^2}{b^2} = \dfrac{(CN + A'C)(CN - AC)}{a^2} = \dfrac{A'N.AN}{a^2}$

$\therefore \dfrac{PN^2}{A'N.AN} = \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{CB^2}{CA^2}$ অর্থাৎ $\dfrac{PN^2}{A'N.AN} = \dfrac{CB^2}{CA^2}$.

7.3. (i) $C$-কে মূলবিন্দু, $CX$ ও $CY$-কে যথাক্রমে $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ ধরিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(ii) নাভি $S(ae, 0)$-কে মূলবিন্দু, $SX$-কে $x$-অক্ষ, $SL$-কে $y$-অক্ষ ধরিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x + ae)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(iii) শীর্ষ $A(a, 0)$-কে মূলবিন্দু, $AX$-কে $x$-অক্ষ, $A$ বিন্দুতে $AX$-এর উপর লম্বকে $y$-অক্ষ ধরিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x + a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ হয়।

(iv) $Z\left(0, \dfrac{a}{e}\right)$-কে মূলবিন্দু, $ZX$-কে $x$-অক্ষ, $ZM$-কে $y$-অক্ষ ধরিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ হয় $\dfrac{\left(x + \dfrac{a}{e}\right)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7.4. **প্রমাণ কর যে পরাবৃত্তে অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর নাভি দুইটি হইতে দূরত্বদ্বয়ের অন্তর হইবে Transverse axis-এর সমান** *(Prove that the difference of the focal distance of any point on the hyperbola is constant as equal to the Transverse axis)* :

(57) নং চিত্র হইতে পাই, $SP = ePM = eZN = e(CN - CZ)$

$$= e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a$$

$$S'P = ePM' = eZ'N = e(CN + CZ') = e\left(x + \frac{a}{e}\right) = ex + a$$

$\therefore \; S'P - SP = (ex + a) - (ex - a) = 2a$

= Transverse axis-এর দৈর্ঘ্য।

**নিম্নলিখিত results-গুলি মনে রাখা একান্ত প্রয়োজন :**

(i) $AA' = 2a$, $CA = CA' = a$, $CS = ae$, $CZ = \dfrac{a}{e}$.

(ii) $C(0, 0)$, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$.

(iii) $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$, $Z\left(\frac{a}{e}, 0\right)$, $Z\left(-\frac{a}{e}, 0\right)$.

(iv) Transverse axis $AA' = 2a$.
Conjugate axis $BB' = 2b$.
Transverse axis-এর সমীকরণ $y = 0$.
Conjugate axis-এর সমীকরণ $x = 0$.

(v) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$.

(vi) নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $x = \pm ae$.

(vii) নিয়ামক $ZM$-এর সমীকরণ $x = \frac{a}{e}$.

নিয়ামক $Z'M'$-এর সমীকরণ $x = -\frac{a}{e}$.

**7.5. $y = mx + c$ সরলরেখার উপর $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের ছেদিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়** *(To find the length of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ on the line $y = mx + c$)* **:**

মনে কর, $y = mx + c$ ···(i) সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... (ii)

পরাবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে।

(i) ও (ii) হইতে পাই,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

বা, $(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2mca^2x + a^2(b^2 + c^2) = 0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $x$-এর দুইটি বীজ।

মনে কর, বীজদ্বয় $x_1$ ও $x_2$।

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mc}{a^2m^2 - b^2}$$

$$x_1x_2 = -\frac{a^2(b^2 + c^2)}{a^2m^2 - b^2}$$

$\therefore \quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$$=\frac{4a^2b^2(b^2-a^2m^2+c^2)}{(a^2m^2-b^2)^2}$$

আবার যেহেতু $(x_1, y_1)$ ও $(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি $y=mx+c$ সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$\therefore \quad y_1=mx_1+c$ এবং $y_2=mx_2+c$

$\therefore \quad y_1-y_2=m(x_1-x_2)$

$\therefore$ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{(1+m^2)(x_1-x_2)^2}$$

$$=\frac{2ab\sqrt{1+m^2}\sqrt{b^2+c^2-a^2m^2}}{a^2m^2-b^2}.$$

**মন্তব্য :** $y=mx+c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়, অর্থাৎ যদি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=0$ হয়,

$\therefore \quad y=mx+c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=0$ হয়।

অর্থাৎ যদি $\sqrt{b^2-a^2m^2+c^2}=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c^2=a^2m^2-b^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ হয়।

$\therefore \quad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ হইল $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের দুইটি স্পর্শক।

**7.6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** [*To find the equation of the tangent to the hyperbola* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *at the point* $(x_1, y_1)$] :

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উপর মনে কর $P(x_1, y_1)$ ছাড়া $Q(x_2, y_2)$ অপর একটি নিকটস্থ বিন্দু।

$PQ$ জ্যা-এর সমীকরণ $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$ ... (i)

যেহেতু $P$ ও $Q$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত

$$\therefore\ \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

বা, $$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

বা, $$\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}\right)-\left(\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}\right)=0 \quad [\text{(ii)}-\text{iii)}]$$

বা, $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{b^2}{a^2}$ $\quad\therefore\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\cdot\frac{b^2}{a^2}.$

$\therefore$ (i) হইতে পাই,

$$y-y_1=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\cdot\frac{b^2}{a^2}(x-x_1) \quad \ldots\text{(iv)}$$

এই সরলরেখা পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $Q$ বিন্দু $P$ বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়।

$\therefore\ x_2=x_1,\ y_2=y_1$ হইলে $Q$ বিন্দু $P$ বিন্দুর উপর সমাপতিত হইবে।

(iv) হইতে পাই,

$$y-y_1=\frac{x_1}{y_1}\cdot\frac{b^2}{a^2}(x-x_1)$$

বা, $$yy_1-y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(xx_1-x_1^2)$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

ইহা হইল স্পর্শকের নির্ণেয় সমীকরণ।

**7.7. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের $(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** [*To find the equation of the normal to the hyperbola* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *at the point* $(x_1, y_1)$ ] :

$(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

বা, $y=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}x-\frac{b^2}{y_1}$ ...(i)

$(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$y-y_1=m(x-x_1)$ ...(ii)

(i) এবং (ii) পরস্পর লম্ব হইবে যদি

$m\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}=-1$ হয়

অর্থাৎ যদি $m=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}$ হয়।

$\therefore$ (ii) হইতে অভিলম্বের সমীকরণ আমরা পাই,

$$y-y_1=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

বা, $\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{-y_1}{b^2}}$

ইহাই হইল অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ।

### 7.8. নিয়ামক বৃত্ত (*Director circle*) :

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের পরস্পরের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হয় একটি বৃত্ত যাহার সমীকরণ হয় $x^2+y^2=a^2-b^2$। এই বৃত্তকে নিয়ামক বৃত্ত বলে। এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2-b^2}$।

যদি $a^2>b^3$ হয়, তাহা হইলে বৃত্তটি বাস্তব হইবে।

যদি $a^2=b^2$ হয়, তাহা হইলে বৃত্তটি point circle হইবে।

যদি $a^2<b^2$ হয়, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কাল্পনিক হইবে। এইরূপ স্থলে পরাবৃত্তের কোন নিয়ামক বৃত্ত থাকিতে পারে না।

### 7.9. পরাবৃত্তের ব্যাস (*Diameter of the hyperbola*) :

কোন পরাবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর যাত্রার পথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা হয়। এই সরলরেখাকে পরাবৃত্তের একটি ব্যাস বলে।

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের ব্যাসটি $y=mx+c$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাহাদের সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ

$y=\frac{b^2}{a^2m}x=m_1x$ যেখানে $m_1=\frac{b^2}{a^2m}$

$\therefore \quad mm_1 = \frac{b^2}{a^2}.$

$\therefore$ $y=m_1x$ ব্যাসটি $y=mx$ ব্যাসের সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে যদি $mm_1=\frac{b^2}{a^2}$ হয়। এখন যদি দুইটি ব্যাস $y=mx$ এবং $y=m_1x$ প্রত্যেকটি অপরটির সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে উহাদিগকে পরস্পর প্রতিযোগী বা অনুবন্ধ (conjugate) ব্যাস বলে।

ব্যাস দুইটি পরস্পর অনুবন্ধ বা প্রতিযোগী (conjugate) হওয়ার শর্ত হইল $mm_1=\frac{b^2}{a^2}$।

### 7.10. অনুবন্ধ পরাবৃত্ত (*Conjugate hyperbola*) :

যদি কোন পরাবৃত্তের conjugate axis অন্য একটি পরাবৃত্তের Transverse axis হয় এবং প্রথমটির Transverse axis দ্বিতীয়টির Conjugate axis হয় তবে একটিকে অপরটির প্রতিযোগী পরাবৃত্ত বা অনুবন্ধ পরাবৃত্ত বলে।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের প্রতিযোগী পরাবৃত্ত হইল $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

### 7.11. সমপরাবৃত্ত (*Rectangular hyperbola*) :

যে পরাবৃত্তের Transverse axis এবং Conjugate axis পরস্পর সমান তাহাকে সমপরাবৃত্ত বলে। সমপরাবৃত্তের $a=b$ হয়। $\therefore$ ইহার সমীকরণ $x^2-y^2=a^2$ হয় এবং $e=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ হয়।

### 7.12. অসীম পথ (*Asymtotes*) :

$m$-এর সকল মানের জন্য $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ সরলরেখা দুইটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হয়।

স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$

এবং $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$

এখন যদি $m = \pm\frac{b}{a}$ লওয়া হয়, তাহা হইলে $a^2m^2 - b^2 = 0$ হয়, তখন স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হয় $y = \pm\frac{b}{a}x$ এবং স্পর্শবিন্দু দুইটি মূলবিন্দু হইতে অসীম দূরত্বে সরিয়া যায়। $\therefore$ $y = \pm\frac{b}{a}x$ সরলরেখা দুইটি হইল $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অসীম পথ।

$y = \pm\frac{b}{a}x$-কে একত্রে লিখিলে

$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ বা, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ হয়।

**উদাহরণ 1.** $6x^2 - 25y^2 = 400$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তের প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ (i)

এখানে $a = 5$, $b = 4$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.16}{5} = \frac{32}{5}$

$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ বা, $(\pm\sqrt{41}, 0)$ শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm a, 0)$ বা, $(\pm 5, 0)$, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e}$ বা, $x = \pm\frac{25}{\sqrt{41}}$.

**উদাহরণ 2.** $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$ পরাবৃত্তের কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষবিন্দুদ্বয়, নাভিদ্বয় ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$

বা, $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

$x + 1 = X$ এবং $y - 2 = Y$ ধর।

নূতন সমীকরণ হইল $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$

নূতন সমীকরণের কেন্দ্র (0, 0), $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$

শীর্ষদ্বয় $(\pm 4, 0)$, নাভিদ্বয় $(\pm ae, 0)$ বা, $(\pm 5, 0)$, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $X=\pm\frac{a}{e}, =\pm\frac{16}{5}$.

Transverse axis-এর সমীকরণ $Y=0$

Conjugate axis-এর সমীকরণ $X=0$

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $X=\pm 5$

প্রদত্ত সমীকরণের কেন্দ্র $(-1, 2)$

$e=\frac{5}{4}$

শীর্ষদ্বয় (3, 2) এবং (–5, 2)

নাভিদ্বয় (4, 2) এবং (–6, 2)

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x=\frac{11}{5}$ বা, $5x-11=0$ এবং $x=-\frac{21}{5}$

বা, $5x+21=0$

Transverse axis-এর সমীকরণ $y=2$

Conjugate axis-এর সমীকরণ $x=-1$

নাভিদ্বয়ের সমীকরণ $x=4$ এবং $x=-6$ বা $x+6=0$.

**উদাহরণ 3.** এমন একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার নাভি (3, 2), নিয়ামক $x+2y=1$ এবং $e=\sqrt{3}$.

মনে কর, পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু $P(x, y)$। এখানে নাভি $S$-এর স্থানাঙ্ক (3, 2)।

$\therefore\ SP=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$

$P(x, y)$ হইতে নিয়ামক $x+2y-1=0$ এর উপর লম্বদূরত্ব

$\frac{x+2y-1}{\sqrt{1+4}}$ বা, $\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}$

পরাবৃত্তের সূত্র অনুযায়ী $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{3}\frac{(x+2y-1)}{\sqrt{5}}$

বা, $(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{3}{5}(x+2y-1)^2$.

**উদাহরণ 4.** $x^2-4y^2=4$ পরাবৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $2x-y+3=0$ সরলরেখার সমান্তরাল।

$2x-y+3=0$ রেখার সহিত সমান্তরাল এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ

$$2x-y+k-0 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

বা, $y=2x+k$

$x^2-4y^2=4$ সমীকরণে $y$-এর মান বসাইয়া পাই,

$$x^2-16x^2-4k^2-16xk-4=0$$

বা, $15x^2+16xk+4(k^2+1)=0$

ইহা $x$-এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

(i) নং সরলরেখা স্পর্শক হইবে যদি $256k^2-4.15.4(k^2+1)=0$ হয়

বা, $k^2=\dfrac{240}{16}=15$

$\therefore \quad k=\pm\sqrt{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $2x-y\pm\sqrt{15}=0$.

**উদাহরণ 5.** $16x^2-9y^2=144$ পরাবৃত্তের $x=2y$ ব্যাসের প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে প্রদত্ত সমীকরণে $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

$a^2=9,\ b^2=16$

প্রদত্ত ব্যাস $y=2x$ এখানে $m=2$

এখন যদি প্রতিযোগী ব্যাসের gradient $m_1$ হয়, তাহা হইলে

$2\times m_1=\frac{16}{9}$ হইবে।

$\therefore \quad m_1-\frac{8}{9}$

প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{8}{9}x$

বা, $9y-8x=0$.

**উদাহরণ 6.** $\dfrac{x^2}{45}-\dfrac{y^2}{20}=1$ পরাবৃত্তের অসীম পথগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$, ( $m$-এর সকল মানের জন্য ) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক।

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{b^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$

$$\text{এবং } \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$$

এখানে $a^2=45,\ b^2=20$.

$y=mx\pm\sqrt{45m-20}$, $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{20}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক।

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{45m}{\sqrt{45m^2-20}}, \frac{20}{\sqrt{45m^2-20}}\right)$ এবং

$$\left(-\frac{45m}{\sqrt{45m^2-20}}, -\frac{20}{\sqrt{45m^2-20}}\right)$$

$m$-এর মান যদি এমনভাবে লওয়া হয় যে $45m^2-20=0$ হয় অর্থাৎ যদি $m=\pm\sqrt{\frac{20}{45}}$ হয়, তাহা হইলে স্পর্শক $y=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}x=\pm\frac{2}{3}x$ এবং স্পর্শবিন্দুদ্বয় মূলবিন্দু হইতে অসীম দূরত্বে সরিয়া যায়।

$\therefore$ $y=\pm\frac{2}{3}x$ হইল অসীম পথগুলির সমীকরণ।

## প্রশ্নমালা 7

1. নিম্নলিখিত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (ii) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$

2. $2x^2-3y^2=5$ পরাবৃত্তের foci নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত পরাবৃত্তের Transverse axis, কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর :

(i) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{4}=1$

(ii) $4x^2-y^2+16x+2y-13=0$

4. $3x^2-4y^2+18x+16y+2=0$ পরাবৃত্তের নাভি, নিয়ামক ও উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

5. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার Transverse axis $x$-অক্ষ, Conjugate axis $y$-অক্ষ এবং

(i) Transverse axis 3, Conjugate axis 4 ;

(ii) Conjugate axis 5, নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 13 ;

(iii) Conjugate axis 7 এবং $(3, -2)$ বিন্দুগামী ;

(iv) নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 16 এবং $e=\sqrt{2}$.

6. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার $e=\frac{5}{4}$, নাভি $(a, 0)$, নিয়ামক $4x-3y=a$.

7. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার নাভি $(-1, 2)$, নিয়ামক $2x-y=1$, $e=\sqrt{2}$.

8. $p$-এর মান কত হইলে $px^2-4y^2=1$ পরাবৃত্ত $(\pm 1, 0)$ বিন্দুগামী হয় ? অক্ষগুলির দূরত্ব এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

9. পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $7x+13y-87=0$ ও $5x-8y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{32\sqrt{2}}{5}$ হইলে $a$ ও $b$ নির্ণয় কর।

10. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার $e=\frac{5}{4}$, নাভি $(a, 0)$, নিয়ামক $4x-3y=a$.

11. দেখাও যে $y=2x+3$ সরলরেখা $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}=1$ কে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

12. $x^2-6y^2=3$ পরাবৃত্তের $(-3, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের $5x-3y=2$ সরলরেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. $4x^2-3y^2=12$ পরাবৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $2x-3y=4$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

15. $2x^2-3y^2=1$ পরাবৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা $2x=3y$ ব্যাসের প্রতিযোগী।

16. যদি $e$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হয় এবং $e'$ ইহার প্রতিযোগী হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$.

17. $25x^2-16y^2=400$ পরাবৃত্তের জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা (5, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

18. দেখাও যে $4x^2-5y^2=20$ পরাবৃত্তের $y=2x$ এবং $5y=2x$ প্রতিযোগী ব্যাস।

19. যদি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতার সমান হয়, তাহা হইলে দেখাও যে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

20. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার $e=\frac{4}{3}$ এবং যাহার diameter circle-এর সমীকরণ $x^2+y^2=2$.

21. নিম্নলিখিত পরাবৃত্তের অসীম পথগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $9x^2-4y^2=36$  (ii) $9x^2-16y^2=144$.

# অষ্টম অধ্যায়

## স্পর্শক ও অভিলম্ব

**8.1. Differential Calculus-এর সাহায্যে স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয় :**

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক সাধারণতঃ $(x', y')$ দ্বারা এবং বক্ররেখার (curve-এর ) উপর কোন বিন্দুর চলমান স্থানাঙ্ক (current co-ordinate) $(x, y)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখন $(x', y')$ বিন্দু দিয়া যে সরলরেখা যায় এবং $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\psi$ কোণে নত হয় এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ হইবে $y-y'=m(x-x')$ যেখানে $m=\tan\psi$।

এখানে আমরা curve-এর tangent এবং normal-এর সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় $(X, Y)$ দ্বারা current co-ordinate-কে প্রকাশ করিব এবং curve-এর যে বিন্দুতে স্পর্শক বা অভিলম্ব হইবে তাহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$ দ্বারা সূচিত হইবে।

**8.2. স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the Tangent*) :

মনে কর, curve-এর সমীকরণ $y=f(x)$ এবং curve-এর উপর $P$ একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(x, y)$। আবার মনে কর, curve-এর উপর $P$ বিন্দুর কাছাকাছি $Q$ অপর একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ যেখানে $\Delta x$ হইল $x$-এর বৃদ্ধি (increment) এবং $\Delta y$ হইল $y$-এর বৃদ্ধি (increment) এবং যখন $P$ বিন্দু হইতে $Q$ বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়।

$PQ$-এর সমীকরণ হইল $$Y-y=\frac{y+\Delta y-y}{x+\Delta x-x}(X-x)$$
$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)$$

$\therefore$ $P$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y-y=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)=\frac{dy}{dx}(X-x),$$ যদি $dy/dx$ সসীম হয়।

∴ $y=f(x)$ curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ( যাহা $y$-অক্ষের সমান্তরাল নয় ) সমীকরণ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \qquad \cdots \qquad \cdots(i)$$

এখন যদি curve-এর সমীকরণ $f(x, y)=0$ হয় তখন

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}, \quad (f_y \neq 0)$$

∴ $f(x, y)=0$ curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$(X-x)f_x+(Y-y)f_y=0 \qquad \cdots \qquad \cdots(ii)$$

Curve-এর সমীকরণ যদি $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ হয় তখন

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}, \quad \phi'(t)\neq 0$$

অতএব '$t$' বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y-\psi(t)=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\left\{X-\phi(t)\right\} \qquad \cdots \qquad \cdots(iii)$$

## 8.3 $\frac{dy}{dx}$-এর জ্যামিতিক অর্থ :

স্পর্শকের (i)নং সমীকরণকে লেখা যায়

$$Y=\frac{dy}{dx}.X+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

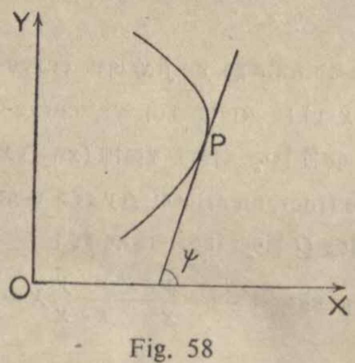



Fig. 58

ইহা $y=mx+c$ আকারের। $\frac{dy}{dx}$ হইল $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের gradient $(m)$। যদি $P$ বিন্দুতে স্পর্শক $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে $\psi$ কোণ করে, তাহা হইলে $\tan\psi=m=\frac{dy}{dx}$ হয়।

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}$ বলিতে কোন কোণের tangent-কে বুঝায় যাহা $P$ বিন্দুতে জ্যামিতিক স্পর্শক $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে $\psi$ কোণে নত থাকে।

**মন্তব্য :** (i) আবার কোন কোন সময় $\dfrac{dy}{dx}$ কে কোন curve-এর $P(x, y)$ বিন্দুতে gradient বলে।

(ii) $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শক $x$-অক্ষের সমান্তরাল হইবে যদি $\psi = 0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\tan\psi = 0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\dfrac{dy}{dx} = 0$ হয়।

(iii) $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শক $x$-অক্ষের উপর লম্ব হইবে যদি $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ হয়, অর্থাৎ যদি $\cot\psi = 0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = 0$ হয় বা, $\dfrac{dx}{dy} = 0$ হয়।

**8.4. অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়** (*To find the equation of the Normal*) :

$(x, y)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$Y - y = m(X - x) \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(i)}$$

$y = f(x)$ curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(ii)}$$

এখন যদি $m\dfrac{dy}{dx} = -1$ হয় অর্থাৎ যদি $m = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ হয়, তাহা হইলে

$y = f(x)$ curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে normal-এর সমীকরণ হইবে

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x)$$

বা, $$(Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0 \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(iii)}$$

$f(x, y) = 0$ curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে অভিলম্বের (normal)-এর সমীকরণ

$$\frac{X - x}{f_x} = \frac{Y - y}{f_y} \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(iv)}$$

$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ curve-এর '$t$' বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\phi'(t)X + \psi'(t)Y = \phi(t)\phi'(t) + \psi(t)\psi'(t) \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(v)}$$

**8.5. দুইটি Curve-এর ছেদবিন্দুতে কোণ নির্ণয়** *(To find the angle of intersection of two curves)* :

দুইটি curve-এর angle of intersection হইল এই দুইটি curve-এর সাধারণ ছেদবিন্দুতে দুইটি স্পর্শকের উৎপন্ন কোণ।

মনে কর, দুইটি curve $f(x, y)=0$ এবং $\phi(x, y)=0$ $(x, y)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকগুলির সমীকরণ

$$Xf_x + Yf_y - (xf_x + yf_y) = 0$$

এবং $$X\phi_x + Y\phi_y - (x\phi_x + y\phi_y) = 0$$

মনে কর, স্পর্শক দুইটি $\psi$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan\psi = \frac{f_x\phi_y \sim \phi_x f_y}{f_x\phi_x + f_y\phi_y}$$

(i) দুইটি curve পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি $\psi=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\tan\psi=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $f_x\phi_y=\phi_x f_y$ হয়।

(ii) যদি দুইটি curve $(x, y)$ বিন্দুতে লম্বভাবে (orthogonally) ছেদ করে তাহা হইলে $\psi=\frac{\pi}{2}$ হয় অর্থাৎ $\cot\psi=0$ হয়, অর্থাৎ $f_x\phi_x+f_y\phi_y=0$ হয়।

**মন্তব্য :** যদি curve দুইটি $y=f(x)$ এবং $y=\phi(x)$ হয়, তাহা হইলে

$$\tan\psi = \frac{f'(x) \sim \phi'(x)}{1+f'(x)\phi'(x)}$$

আবার curve দুইটি লম্বভাবে (orthogonally) ছেদ করিবে

যদি $f'(x)\phi'(x) = -1$ হয়।

**উদাহরণ 1.** $(x, y)$ বিন্দুতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক নির্ণয় কর।

বৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2+y^2-a^2=0$

$\therefore\ f(x, y) \equiv x^2+y^2-a^2=0$

$f_x=2x, \quad f_y=2y$

আমরা জানি $f(x, y)=0$ curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$(X-x)f_x+(Y-y)f_y=0$

বা, $(X-x)2x+(Y-y)2y=0$

বা, $Xx+Yy=x^2+y^2=a^2$

$\therefore$ $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Xx+Yy=a^2$.

**উদাহরণ 2.** $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=1$, curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Curve-এর সমীকরণ $f(x,y)=\frac{(x)^{\frac{2}{3}}}{(a)^{\frac{2}{3}}}+\frac{(y)^{\frac{2}{3}}}{(b)^{\frac{2}{3}}}-1=0$

স্পর্শকের সমীকরণ $(X-x)f_x+(Y-y)f_y=0$

বা, $(X-x)\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+(Y-y)\frac{2}{3}\frac{y^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=0$

বা, $\frac{Xx^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{Yy^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$

বা, $\frac{Xx^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{Yy^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=1$

ইহা হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**উদাহরণ 3.** $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$

বা, $y=2\sqrt{ax}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=2\sqrt{a}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{y^2}{4a}}}\qquad\left(\because\ x=\frac{y^2}{4a}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{4a^2}{y^2}}=\frac{2a}{y}$$

অতএব স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)\quad \text{বা,}\quad Y-y=\frac{2a}{y}(Y-x)$$

বা, $Yy-y^2=2aX-2ax$

বা, $Yy=y^2+2aX-2ax$

বা, $Yy = 4ax - 2ax + 2aX$

বা, $Yy = 2a(X + x)$

ইহা হইল নির্ণেয় সমীকরণ।

**উদাহরণ 4.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে $f(x, y) \equiv \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 \qquad \cdots \qquad (i)$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইবে $(X - x) f_x + (Y - y) f_y = 0$

আমরা (i) নং সমীকরণ হইতে পাই, $f_x = \frac{2x}{a^2}, f_y = \frac{2y}{b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক $(X - x) \frac{2x}{a^2} + (Y - y) \frac{2y}{b^2} = 0$

বা, $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

যেহেতু $(x, y)$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত

বা, $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$

ইহা হইল নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

**উদাহরণ 5.** $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(x, y)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y^2 = 4ax$

বা, $2y.\frac{dy}{dx} = 4a$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

$(x, y)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$(X - x) + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$$

ব, $X - x = -\frac{2a}{y}(Y - y)$

বা, $(X - x)y + 2a(Y - y) = 0.$

## প্রশ্নমালা 8

1. প্রতিটি curve-এর $(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1.$

(ii) $x^3 - 3axy + y^3 = 0.$

2. $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = 2$ curve-এর $(a, b)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ curve-এর $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $x = at^2, y = at^3$ curve-এর '$t$' বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫. $xy^2 = 16 - 4x$ curve $y = x$ সরলরেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $y(x-2)(x-3) = x - 7$ curve-টি যে বিন্দুতে $x$-অক্ষকে ছেদ করে সেই বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. কোন্ কোন্ বিন্দুতে $y = (x-3)^2.(x-2)$ curve-এর স্পর্শকগুলি $x$-অক্ষের সমান্তরাল হইবে ?

8. কোন্ কোন্ বিন্দুতে $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ curve-এর স্পর্শকগুলি $x$-অক্ষের সমান্তরাল হইবে ?

9. কোন্ কোন্ বিন্দুতে $y = (x-3)^2(x-2)$ curve-এর স্পর্শকগুলি $x$-অক্ষের উপর লম্ব হইবে ?

10. প্রমাণ কর যে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা $\frac{x}{a} + \log\left(\frac{y}{b}\right) = 0$ curve-কে স্পর্শ করে।

11. কি শর্তে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$ curve-গুলি লম্বভাবে ছেদ করিবে।

12. প্রমাণ কর যে $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখা $x^m y^n = a^{m+n}$ curve-কে স্পর্শ করিবে যদি $m^n n^n p^{m+n} = (m+n)^{m+n}.a^{m+n} \cos^m \alpha \sin^n \alpha$ হয়।

13. যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ কে স্পর্শ করে তাহা হইলে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2 = p^2$ হইবে।

14. নিম্নলিখিত curve-গুলির ছেদকোণ (Angle of intersection) নির্ণয় কর :

(i) $x^2 - y^2 = a^2$ এবং $x^2 + y^2 = a^2 \sqrt{2}$.

(ii) $x^2 = 4y$ এবং $y(x^2 + 4) = 8$.

(iii) $y = x^3$ এবং $6y = 7 - x^2$.

15. দেখাও যে $x = 3 \cos \theta - \cos^3 \theta$, $y = 3 \sin \theta - \sin^3 \theta$ curve-এর $\theta = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে অভিলম্ব মূলবিন্দুগামী হয়।

16. প্রতিটি curve-এর স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয় কর :

(i) $y^2 = 4ax$ curve-এর $(a, -2a)$ বিন্দুতে।

(ii) $xy = c^2$ curve-এর $(cp, c/p)$ বিন্দুতে।

(iii) $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ curve-এর $x = \frac{a}{2}$ তে।

(iv) $x^2(x - y) + a^2(x + y) = 0$-এর $(0, 0)$ বিন্দুতে।

(v) $x = \frac{2at^2}{t^2}$, $y = \frac{2at^2}{1 + t^2}$-এর $t = \frac{1}{2}$-তে।

17. দেখাও যে $(1, 1)$ বিন্দুতে $3xy^2 - 2x^2y = 1$ curve-এর স্পর্শক $(-\frac{16}{5}, -\frac{1}{20})$ বিন্দুগামী।

## নবম অধ্যায়

## প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন

**9.1. স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে প্রতিফলন, চলন এবং ঘূর্ণনের ব্যাখ্যা** *(Analytical representation of reflection, translation and rotation)* :

পূর্বে তোমরা রূপান্তর জ্যামিতির সাহায্যে প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের সম্যক্ ধারণা লাভ করিয়াছ। এখানে রূপান্তর জ্যামিতির ধারণাসমূহ স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে নতুনভাবে উপস্থিত করা হইবে। কোন জ্যামিতিক চিত্র নানারূপ রূপান্তরের মধ্য দিয়া তাহাদের যে বৈশিষ্ট্য সর্বদা বজায় রাখে, সে সম্পর্কে কিছু আলোচনা স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে করা হইবে এবং এই আলোচনার ফলসমূহ স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বিশেষ ভূমিকা গ্রহণ করে।

**9.2. প্রতিফলন** *(Reflection)* :

পুকুরের ধারে কোন গাছ থাকিলে এবং পুকুরের জল শান্ত থাকিলে তোমরা নিশ্চয়ই দেখিয়াছ যে, গাছটির ছায়া পুকুরে পড়ে। শুধু তাহাই নহে, পুকুরের পাড়ে যাবতীয় বস্তুর ছায়া ঐ শান্ত জলে দেখা যাইবে। আরও দেখিয়াছ যে, ঐ ছায়াগুলি জলের মধ্যে উল্টা দেখা যায়। অর্থাৎ যে বস্তুটি যেমন তাহার ছায়া ঠিক হুবহু তাহার উল্টা। জলের মধ্যে যে বস্তুটি দেখা যায় তাহা নির্দিষ্ট আসল বস্তুটির প্রতিবিম্ব। জলের তীরের প্রতিটি বস্তুরই একটি করিয়া প্রতিবিম্ব জলের মধ্যে দেখা যায়। জলের মধ্যে বস্তুটি নাই, অথচ জলের মধ্যে এই যে বস্তুটির উল্টা **প্রতিবিম্ব** দেখা যায়, এই প্রক্রিয়াটিকে বলে **প্রতিফলন**। তাছাড়া আয়নার সামনে যাবতীয় বস্তুর একটি উল্টা প্রতিচ্ছবি আয়নার ভিতরে দেখা যায়। আয়নার মধ্যে বস্তুটির এই যে ছবি, ইহা ঐ বস্তুটির প্রতিবিম্ব। আয়নার সাপেক্ষে এই **প্রতিবিম্বটি** দেখা গেল। লক্ষ্য করিয়া থাকিবে যে, প্রতিবিম্বটির দূরত্ব বস্তুটির দূরত্বের সমান। অর্থাৎ প্রতিফলক থেকে বস্তু ও বস্তুর প্রতিবিম্বের দূরত্ব সর্বদা সমান থাকে।

**9.3. সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব** *(Reflection in a line)* :

মনে কর, $OX$, $OY$ আয়তক্ষেত্রাকার কার্তেজীয় অক্ষদ্বয় $O$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y)$। মনে কর, $OX$

একটি সরলরেখা এবং $P$ একটি বিন্দু ঐ সমতলে অবস্থিত। $OX$ রেখার সাপেক্ষে $P$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'$ হইবে। স্পষ্টতঃ $PP'$ রেখা $OX$ রেখার সহিত লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে এবং $P'$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, -y)$। অনুরূপভাবে,

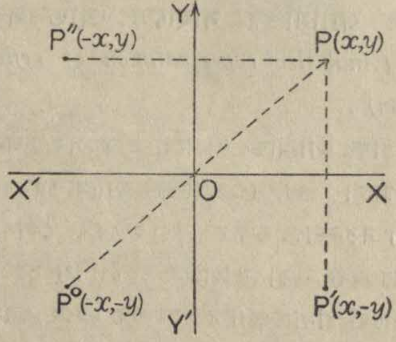



Fig. 59

$OY$ রেখার সাপেক্ষে $P$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে $P''(-x, y)$ এবং মূলবিন্দু $O$-এর সাপেক্ষে $P$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে $P^{\circ}(-x, -y)$।

স্পষ্টতঃ কোন একটি জ্যামিতিক চিত্র $OX$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসাম্য (symmetry) বজায় রাখিলে ঐ চিত্রটির সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকিবে যদি ঐ সমীকরণে $y$-এর পরিবর্তে $-y$ বসান হয়। অনুরূপভাবে ঐ জ্যামিতিক চিত্র $OY$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখিলে উহার সমীকরণ অপরিবর্তিত

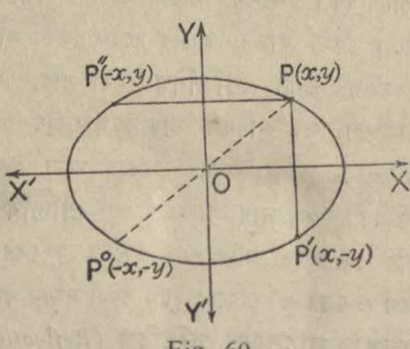



Fig. 60

থাকিবে যদি $x$-এর পরিবর্তে $-x$ বসান হয়। অর্থাৎ ঐ জ্যামিতিক চিত্রের এক অংশ $OX$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিফলিত হইলে অপর অংশ পাওয়া যাইবে।

অনুরূপভাবে ঐ জ্যামিতিক চিত্রের এক অংশ $OY$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিফলিত হইলে অপর অংশ পাওয়া যাইবে। মনে কর,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad \cdots (1)$$

একটি উপবৃত্ত যাহার কেন্দ্রবিন্দু মূলবিন্দুর সহিত মিশিয়া আছে এবং পরাক্ষ (Major axis) $X$-অক্ষের সহিত, উপাক্ষ (Minor axis) $Y$-অক্ষের সহিত মিশিয়া আছে। উপবৃত্তের ছবিটি হইতেই বোঝা যায় যে, ইহা $X$-অক্ষ এবং $Y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে। তাহা ছাড়া $x$-এর পরিবর্তে $-x$ এবং $y$-এর পরিবর্তে $-y$ বসাইলে ঐ সমীকরণ (1) অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং উপবৃত্তটি উভয় অক্ষরেখার সাপেক্ষেই প্রতিসাম্য বজায় রাখে।

তাহা ছাড়া, কোন একটি বিন্দু $P(x, y)$-এর $O$ বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিফলিত বিন্দু $P^0(-x,-y)$। এই বিন্দু $P^0(-x,-y)$-টিও ঐ উপবৃত্তের উপরে আছে, কারণ ইহা ঐ সমীকরণ (1)-কে পরিতৃপ্ত করে। সুতরাং উপবৃত্তটি $x$ অক্ষ, $y$-অক্ষ এবং মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে। অর্থাৎ ইহার কোন অংশ ঐ রেখাদ্বয় বা মূলবিন্দুটির সাপেক্ষে প্রতিফলিত হইলে অপর অংশ পাওয়া যায়।

পুনরায় মনে কর,

$$y^2=4ax \qquad \cdots (2)$$

একটি অধিবৃত্ত যাহার অক্ষ $X$-অক্ষের সহিত মিশিয়া গিয়াছে এবং শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুর উপরে অবস্থিত। এই চিত্রটি $X$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে, কারণ ইহার এক অংশ $X$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত হইলে অপর অংশ পাওয়া যাইবে এবং $y$-এর পরিবর্তে $-y$ বসাইলে সমীকরণ (2) অপরিবর্তিত থাকিবে। কিন্তু $x$-এর পরিবর্তে $-x$ বসাইলে সমীকরণ (2) অপরিবর্তিত থাকে না। সুতরাং ঐ চিত্রটি $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে না। মূলবিন্দুর সাপেক্ষেও চিত্রটি প্রতিসাম্য বজায় রাখে না।

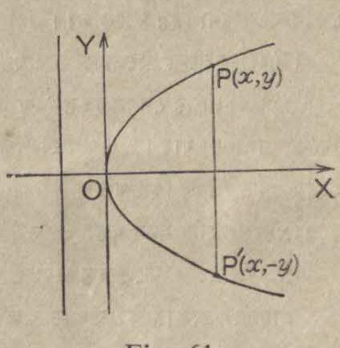


Fig. 61

**9.4. স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিসরে চলন** *(Analytical representation of translation)* :

কোন রকম দিক পরিবর্তন না করিয়া কোন বস্তুর কোন বিশেষ দিকের গতিকে ঐ বস্তুর চলন (Translation) বলে। কোন জ্যামিতিক চিত্রের চলনের ফলে যে নূতন চিত্র পাওয়া যায় তাহাকে উহার চলন প্রতিবিম্ব (Image) বলে। পূর্বের শ্রেণীসমূহে চলন সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হইয়াছে। আমরা দেখিয়াছি,

(*i*) কোন সমতলে কোন বস্তুর প্রতিটি বিন্দুর একই দিকে এবং সমান পরিমাণ গতিকে উহার চলন বলে।

(*ii*) বস্তুর প্রতিটি বিন্দু সমান পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করে।

(*iii*) এক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুগুলির প্রতিবিম্বও এক সরলরেখায় থাকে।

(*iv*) কোন রেখাংশের দুই প্রান্তবিন্দুর মধ্যস্থ বিন্দুর প্রতিবিম্ব তাহার প্রতিবিম্ব রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুইটির মধ্যে থাকিবে।

(*v*) দিক ও পরিমাণ নির্দিষ্ট থাকিলে চলন সুনির্দিষ্টভাবে নির্ণয় করা যায়। যদি $A$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $A'$ হয়, তবে ঐ চলনকে $AA'$ দিয়া প্রকাশ করা হয়।

(*vi*) সমান্তরাল সরলরেখার চলনের ফলে প্রতিবিম্ব সমান্তরাল সরলরেখা উৎপন্ন করে।

(*vii*) চলনের ফলে চলনের দিকের সরলরেখাগুলি স্থির থাকে। অন্য কোন সরলরেখা স্থির থাকে না।

(*viii*) চলনের ফলে প্রতিবিম্বের দিক্‌বিন্যাসের পরিবর্তন হয় না।

(*ix*) চলনের কোন স্থির বিন্দু নাই। কারণ এখানে প্রতিটি বিন্দু নির্দিষ্ট দিকে আগাইয়া যায়। একমাত্র শূন্য চলনে অর্থাৎ বস্তুটি যখন স্থির থাকে তখন ইহার প্রতিটি বিন্দু স্থির থাকে।

(*x*) চলনের সময় বস্তুর প্রতিটি রেখা একই দিকে সমান দূরত্বে গমন করে।

(*xi*) চলনের ফলে বস্তু এবং তাহার প্রতিবিম্ব সর্বসম হয়।

আয়তক্ষেত্রাকার কার্তেজীয় অক্ষদ্বয় $OX$ এবং $OY$-এর সাপেক্ষে যদি কোন জ্যামিতিক চিত্রের সমীকরণ জানা থাকে এবং ঐ চিত্রটির যদি কোন বিশেষ দিকে চলন হয়, তবে উহার চলন প্রতিবিম্ব পাওয়া সহজ। ঐ প্রতিবিম্বের সমীকরণও সহজেই পাওয়া যাইবে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল চলনের সাহায্যে।

$$\text{মনে কর, } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad \cdots (1)$$

একটি উপবৃত্ত যাহার সমীকরণ $OX$, $OY$-এর সাপেক্ষে নির্ধারিত হইয়াছে। এখন ঐ উপবৃত্তটি যদি কোন বিশেষ দিক্ $OO'$-এর দিকে

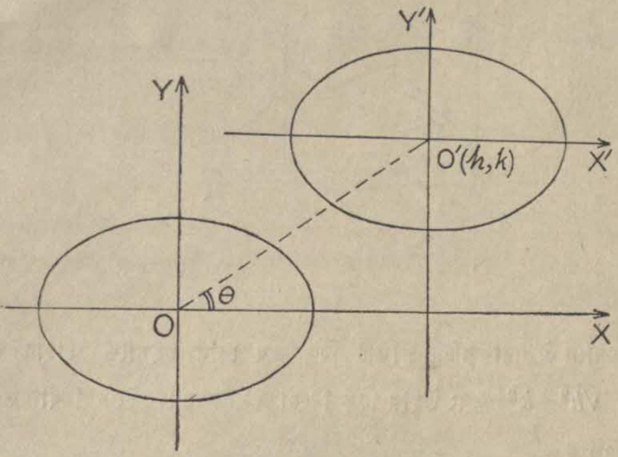



Fig. 62

চালিত হয়, তবে যে নূতন প্রতিবিম্ব চিত্র হইবে তাহার সমীকরণ পাইতে হইলে $x$, $y$-এর পরিবর্তে $x-h$, $y-k$ বসাইতে হইবে। এখানে ঐ চিত্রটির মোট চলন $OO' = \sqrt{h^2+k^2}$ এবং $O$, $O'$ উপবৃত্তটির পূর্ব এবং পরবর্তী কেন্দ্র। নূতন কেন্দ্র $O'$-এর স্থানাঙ্ক পুরাতন কেন্দ্র $O$-এর সাপেক্ষে $(h, k)$। অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরণের স্থানাঙ্ক পরিবর্তন সূত্র হইতে ঐ চলন প্রতিবিম্বের সমীকরণ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-1=0 \qquad \cdots (2)$$

পুনরায় মনে কর, $OX$, $OY$ সমতলে

$$y^2=4ax \qquad \cdots (3)$$

একটি পরাবৃত্ত যাহার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুর সহিত মিশিয়াছে এবং উহার অক্ষরেখা $x$-অক্ষের সহিত মিশিয়া গিয়াছে। এই পরাবৃত্তটির যদি এমন একটি চলন হয় যে উহার শীর্ষবিন্দু $O'\ (h, k)$ বিন্দুতে আসে এবং অক্ষরেখা পুরাতন

অক্ষরেখার সমান্তরাল হয়, তবে এই চলনের ফলে উহার চলন প্রতিবিম্বের সমীকরণ হইবে,

$$(y-k)^2=4a(x-h). \quad \cdots (4)$$

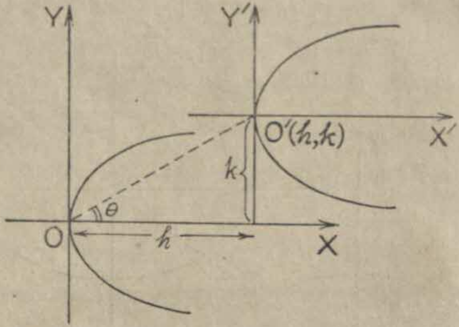



Fig. 63

এখানে ঐ পরাবৃত্তটির প্রতিটি বিন্দুর যে চলন হইয়াছে তাহার পরিমাণ হইবে $\sqrt{h^2+k^2}$ এবং উহার দিক্ নিম্নোক্ত সমীকরণ হইতে নির্ধারিত হইবে

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{k}{h}\\ \theta&=\angle O\,OX\end{aligned}\right\} \quad \cdots (5)$$

অনুরূপভাবে মনে কর, $XOY$ সমতলে $f(x, y)=0$ ... (6)
একটি জ্যামিতিক চিত্র যাহার সমীকরণ (6) আয়তক্ষেত্রাকার কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে লিখিত হইয়াছে। এই চিত্রটির যদি এমন একটি চলন হয় যে উহার প্রতিটি বিন্দুর $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ পরিমাণ সরণ হয়, তবে ঐ চলন প্রতিবিম্বের সমীকরণ হইবে

$$f(x-\alpha, y-\beta)=0. \quad \cdots (7)$$

এইরূপে, যে-কোন জ্যামিতিক চিত্র, যাহার সমীকরণ স্থানাঙ্ক পদ্ধতির সাহায্যে জানা আছে, তাহার চলন প্রতিবিম্ব পাওয়া সম্ভব হইবে।

**9.5. স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিসরে ঘূর্ণন** (*Analytical representation of rotation*) :

কোন একটি স্থিরবিন্দুর চারিদিকে কোন নির্দিষ্ট কোণে কোন বস্তুর ঘোরাকে **ঘূর্ণন** (Rotation) বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে **ঘূর্ণন কেন্দ্র** (Centre of rotation) বলে এবং ঘূর্ণনের ফলে যে চিত্র পাওয়া যায় তাহাকে মূলচিত্রের

**প্রতিবিম্ব** বলে। ঘূর্ণন দুই প্রকার—**ধনাত্মক ও ঋণাত্মক**। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিলে ঘূর্ণনকে **ধনাত্মক** (Positive) ধরা হইবে এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরিলে ঘূর্ণনকে **ঋণাত্মক** (Negative) ধরা হইবে।

পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহে ঘূর্ণন সম্পর্কে তোমরা যে ধারণা লাভ করিয়াছ তাহাতে দেখিয়াছ—

(i) ঘূর্ণনের ফলে একটি বস্তুর উপর দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।

(ii) ঘূর্ণনের ফলে মূলচিত্রের রেখাংশ-এর প্রতিবিম্ব রেখাংশের সমান্তরাল হয় না।

(iii) ঘূর্ণনের ফলে কোণের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে।

(iv) ঘূর্ণনের ফলে মূলবস্তু ও তাহার প্রতিবিম্ব সর্বসম হয়।

মনে কর, $XOY$ সমতলে একটি জ্যামিতিক চিত্র আছে। ঐ জ্যামিতিক

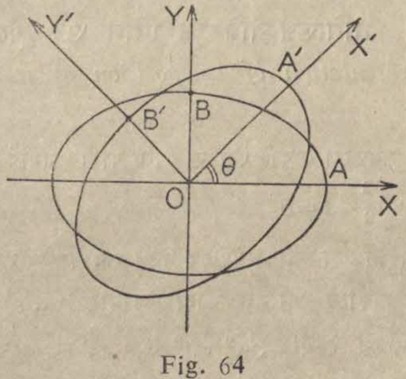



Fig. 64

চিত্রটিকে একটি উপবৃত্ত ধর এবং $OX$, $OY$ অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে উহার সমীকরণ হইবে

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad \cdots (1)$$

এখন উপবৃত্তটির কেন্দ্র $O$ বিন্দুটিকে স্থির রাখিয়া যদি উপবৃত্তটিকে $\theta$ ধনাত্মক কোণে ঘোরান হয় তবে যে প্রতিবিম্ব চিত্রটি পাওয়া যাইবে তাহার সমীকরণ (1) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে; ইহা পাইতে হইলে নূতন স্থানাঙ্ক হইতে পুরাতন স্থানাঙ্ক পাইবার পরিবর্তন-সূত্রের সাহায্য লইতে হইবে।

অর্থাৎ $x$-এর পরিবর্তে $x\cos\theta+y\sin\theta$ এবং $y$-এর পরিবর্তে $-x\sin\theta+y\cos\theta$ বসাইতে হইবে (1) নং সমীকরণে। সুতরাং ঘূর্ণনের ফলে যে ঘূর্ণন-প্রতিবিম্ব পাওয়া গেল তাহার সমীকরণ

$$\frac{(x\cos\theta+y\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2}{b^2}-1=0 \quad \cdots (2)$$

অনুরূপভাবে মনে কর, যে-কোন একটি জ্যামিতিক চিত্রের সমীকরণ

$$f(x, y)=0 \quad \ldots (3)$$

ঐ জ্যামিতিক চিত্রটিকে উহার কোন একটি বিন্দুকে স্থির রাখিয়া ঘুরাইলে যে ঘূর্ণন প্রতিবিম্ব পাওয়া যাইবে তাহার সমীকরণ হইবে

$$f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)=0 \quad \ldots (4)$$

এখানে (1) নং সমীকরণে $x$-এর পরিবর্তে $x\cos\theta+y\sin\theta$ এবং $y$-এর পরিবর্তে $-x\sin\theta+y\cos\theta$ বসাইলেই চলিবে। ইহাই হইল ঘূর্ণন প্রতিবিম্ব পাইবার সূত্র।

**9.6. স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিসরে চলন ও ঘূর্ণনের সংযুক্তি** *(Analytical representation of composition of translation and rotation)* :

মনে কর, $XOY$ সমতলে একটি উপবৃত্ত আছে যাহার সমীকরণ হইল

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad \cdots (1)$$

এই উপবৃত্তটিকে চলন প্রক্রিয়ার সাহায্যে এক নূতন অবস্থায় আনা হইল, যাহাতে ইহার কেন্দ্রবিন্দু যে অবস্থানে আসিল তাহার স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta)$। অর্থাৎ এই উপবৃত্তটির মোট চলনের দৈর্ঘ্য $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ এবং এই চলন যে দিকে হইয়াছে তাহা $x$-অক্ষের সহিত $\theta_0$ কোণে আছে। $\theta_0$ কোণটি পাওয়া যাইবে নিম্নোক্ত সূত্র অনুসারে—

$$\tan\theta_0=\frac{\beta}{\alpha},\ \theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

এক্ষেত্রে আমরা দেখিয়াছি যে, ঐ উপবৃত্তটির চলন প্রতিবিম্বের সমীকরণ পাওয়া যাইবে (1)নং সমীকরণে $x$-এর পরিবর্তে $x-\alpha$ এবং $y$-এর পরিবর্তে $y-\beta$ বসাইয়া।

পুনরায় ঐ চলন প্রতিবিম্বটিকে ঘূর্ণন প্রক্রিয়ার সাহায্যে $\theta$ ধনাত্মক কোণে ঘোরানো হইল। এই ঘূর্ণনের ফলে যে নূতন প্রতিবিম্ব পাওয়া গেল তাহার

সমীকরণ পাইতে হইলে $x$ এবং $y$-এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x\cos\theta+y\sin\theta$ এবং $-x\sin\theta+y\cos\theta$ বসাইতে হইবে। অর্থাৎ, চলন এবং ঘূর্ণন এই দুইটি প্রক্রিয়ার সংযুক্তির ফলে যে নূতন প্রতিবিম্ব পাওয়া যাইবে তাহার সমীকরণ লিখিতে গেলে $x$ এবং $y$-এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x\cos\theta+y\sin\theta-\alpha$ এবং $-x\sin\theta+y\cos\theta-\beta$ বসাইতে হইবে। সুতরাং এই নূতন প্রতিবিম্বের সমীকরণ (1)নং সমীকরণ হইতে পাইবে

$$\frac{(x\cos\theta+y\sin\theta-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(-x\sin\theta+y\cos\theta-\beta)^2}{b^2}-1=0.$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

অনুরূপভাবে, $f(x, y)=0$, কোন জ্যামিতিক চিত্রের সমীকরণ। ঐ চিত্রটির উপর চলন প্র ক্রয়া এবং ঘূর্ণন প্রক্রিয়া এমনভাবে নিয়োগ করা হইল যেন উহার প্রতিটি বিন্দুর $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ দূরত্বে সরণ হইয়াছে এবং উহার পরে চিত্রটি $\theta$ ধনাত্মক কোণে ঘুরিয়াছে। এমন অবস্থায় ঐ চিত্রটির প্রতিবিম্বের সমীকরণ পাইতে হইলে $x$ এবং $y$-এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x\cos\theta+y\sin\theta-\alpha$ এবং $-x\sin\theta+y\cos\theta-\beta$ পূর্বোক্ত সমীকরণে বসাইতে হইবে। সুতরাং ঐ সমীকরণ হইবে

$$f(x\cos\theta+y\sin\theta-\alpha,\ -x\sin\theta+y\cos\theta-\beta)=0.$$

চলন এবং ঘূর্ণনের সংযুক্তির ফলে যে নূতন প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় তাহার সমীকরণ পাইবার ইহাই নির্ণেয় সূত্র।

**উদাহরণ।** প্রতিফলনের ধর্ম হইতে দেখাও যে $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0$ বক্ররেখাটি $x$-অক্ষ এবং $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে, কিন্তু মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে না।

প্রদত্ত বক্ররেখাটির সমীকরণ $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}-1=0$ ... (1)

ইহার অর্ধাংশ $x$-অক্ষে প্রতিফলিত হইলে অপর অর্ধাংশ পাওয়া যায় এবং ইহা $x$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে, কারণ, $y$-এর স্থলে $-y$ বসাইলে বক্ররেখাটির সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে। অনুরূপভাবে এই বক্ররেখার অর্ধাংশ $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত হইলে অপর অর্ধাংশ পাওয়া যায়।

তাছাড়া $x$-এর পরিবর্তে $-x$ বসাইলে উহার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং বক্ররেখাটি $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসাম্য বজায় রাখে। আরও লক্ষ্য করা যায় যে, একই সাথে $x$-এর পরিবর্তে $-x$ এবং $y$-এর পরিবর্তে $-y$ বসাইলে সমীকরণের আকার অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং বক্ররেখাটি মূলবিন্দুর সাপেক্ষেও প্রতিসাম্য বজায় রাখে।

## প্রশ্নমালা 9

1. নিম্নলিখিত বক্ররেখা এবং জ্যামিতিক চিত্রগুলির প্রতিসাম্য অক্ষ এবং বিন্দু বাহির কর :—

(i) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, (ii) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,

(iii) $x^3+y^3=3axy$, (iv) $y^2(a-x)=x^2(a+x)$,

(v) $y=\frac{c}{2}\left(e^{x/c}+e^{-x/c}\right)$.

2. নিম্নলিখিত বক্ররেখা এবং জ্যামিতিক চিত্রগুলির চলন প্রতিবিম্ব বাহির কর যদি ঐ চলনের $x$-অক্ষ এবং $y$-অক্ষের দিকে উপাংশদ্বয় $\alpha$ ও $\beta$ হয়। চলন প্রতিবিম্বগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, (ii) $x^2+y^2-a^2=0$

(iii) $x^3+y^3-a^3=0$, (iv) $x^4+y^4-2a^2x^2y^2-b^2=0$

(v) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0$, (vi) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$

3. নিম্নলিখিত বক্ররেখা ও জ্যামিতিক চিত্রগুলির ঘূর্ণন প্রতিবিম্ব বাহির কর এবং উহাদের সমীকরণগুলি লিপিবদ্ধ কর যদি ঐ ঘূর্ণনের পরিমাণ মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $\theta$ ধনাত্মক কোণে হইয়া থাকে :

(i) $ax^2+by^2-1=0$ (ii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

(iii) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

(iv) $y^2-4ax=0$

# উত্তরমালা

## প্রশ্নমালা 1

1. (i) $\sqrt{29}$ (ii) 25 (iii) $\sqrt{65}$ (iv) $a$ (v) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (vi) $\sqrt{a^2+b^2}$ 2. (i) $\sqrt{32}$ (ii) 5 (iii) $\sqrt{170}$ (iv) 6 (v) $\sqrt{a^2+b^2}$ (vi) $2\sqrt{m^2+n^2}$ (vii) $(a-b)\sqrt{2}$ (viii) $3\sqrt{a^2+b^2}$ (ix) $\sqrt{a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc}$ (x) $a(m_1-m_2)\sqrt{(m_1+m_2)^2+4}$ 3. (i) (8, 5) (ii) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ (iii) (0, 0) (iv) (1, 1) 14. (i) $(2, \frac{5}{3})$ (ii) $(\frac{10}{7}, \frac{33}{7})$ (iii) (5, 3) (iv) $(-11, 16)$ (v) (7, 9) (vi) (10, 5) 15. 3 : 2 16. 5, 15 17. $\sqrt{13}$ 18. $3\sqrt{2}$ ; 3 ; 3 19. $\sqrt{(x+2)^2+y^2}$, $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$, $x=0$ $P$, $OY$-এর উপর অবস্থিত। 20. (i) 1 (ii) $\frac{17}{2}$ (iii) $2ac$ (iv) 37·5 (v) $(b-c)(c-a)(a-b)$ (vi) $a^2(m_2-m_3) \times (m_3-m_1)(m_1-m_2)$ (vii) $\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{2}$

25. $ab'=a'b$ 26. (i) (2, 2) (ii) $(-4, -2)$

27. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ 28. 96 29. (8, 8)

30. $\left(2, \dfrac{11\pi}{16}\right)$ 31. $\frac{1}{4}(8-3\sqrt{3})$ 32. $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

33. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$ 34. $r=2a\cos\theta$.

## প্রশ্নমালা 2

1. (i) $10x+4y-27=0$ (ii) $x+y=9$ (iii) $y=x$ (iv) $x^2-4x+4y-8=0$ 2. $x^2+y^2=25$ 3. $x^2+y^2=3$ 4. $8x^2+8y^2+6x-36y+27=0$ 5. $3x^2+3y^2+18x-10y-14=0$ 6. $x^2+y^2=16$ 7. $x^2+y^2=2$.

## প্রশ্নমালা 3

1. $y=3$ 2. $x-y+1=0$ 3. $y=x+1$ 4. $y=\sqrt{3}x+1$ 5. $x-y\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$ 6. $y+x\sqrt{3}+2=0$ 7. $3x-2y=6$ 8. $x+y=6, y=x+2$ 9. $x+y+1=0, x-y=3$

10. (i) $m=\frac{1}{7}$ (ii) $m=-1$ (iii) $m=3$ 12. (i) $y=-\frac{4}{7}x-\frac{5}{7}$

(ii) $\frac{x}{-\frac{5}{4}}+\frac{y}{-\frac{5}{7}}=1$ 13. (i) $-\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{y}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$

(ii) $\frac{3x}{\sqrt{13}}+\frac{2y}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$ (iii) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{1}{5}$

14. $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ 15. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1$, $\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{4}}=1$

16. $x\cos\frac{5\pi}{4}+y\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}$ 17. (i) $y-x=1$

(ii) $7y+10x=11$ (iii) $ax-by=ab$ (iv) $x-4y=3$

(v) $ax+by=a^2+b^2$ (vi) $x\cos\frac{(\phi_1+\phi_2)}{2}+y\sin\frac{(\phi_1+\phi_2)}{2}$

$=a\cos\frac{(\phi_1-\phi_2)}{2}$ 18. (i) $x+3y+7=0, y-3x=1,$

$y+7x=11$ (ii) $6x+11y=9, 11x+2y=71, 5x-9y=-47$

(iii) $2x+5y=0, 11x-y=57, 3x-2y=0$

(iv) $2x-3y=4, y-3x=1, y+7x=11$

19. (i) $\tan^{-}(\frac{1}{7})$ (ii) 45° (iii) 30° (iv) 90° (v) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$

20. (i) (2, 3), (ii) (2, −1), (iii) (1, 2), (iv) $\left(\frac{a^2+ab}{1-ab}, \frac{b^2+a}{1-ab}\right)$

22. $x-2y+3=0$ 25. (i) $4x-3y+3=0$ (ii) $7x-4y=15$

(iii) $12x-y=13$ (iv) $3x+4y-25=0$ (v) $2x+5y+1=0$

(vi) $7x-8y=118$ (vii) $4y+11x=10$ (viii) $7x+6y=85$

(ix) $x=y$ (x) $2x+3y+1=0$ 26. $x+5y+3=0$,

$5x-y-11=0$ 27. $y-5=\sqrt{3}(x-4)$ 28. $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

29. $x\cos 60°+y\sin 60°=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$ 35. (i) $7x-2y=7$

(ii) $?x+y=2$ 36. (i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) 0 (iii) $\frac{2}{\sqrt{21}}(2\cos 30°+$

$3\sin 30°-4)$ (iv) $2\sin 60°+\cos 60°-2$

(v) $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$ 37. 4 38. $\frac{11}{5}$ 39. $99x-77y-6=0$, $21x+27y+46=0$ 40. (i) $7x+y=0$, $x-7y=0$
(ii) $x+y+8=0$, $x-y=0$ (iii) $x+y-3=0$, $7x-7y+1=0$
(iv) $x-y+36=0$, $7x+7y+12=0$ (v) $y-x+12=0$, $7y+7x-36=0$ 41. $\frac{e-e'}{\sqrt{1+m^2}}$ 42. $Ax'+By+C+\lambda(A'x+B'y+C')=0$ যেখানে $\lambda$-এর মান (i) $-\frac{C}{C'}$ (ii) $-\frac{B}{B'}$
(iii) $-\frac{Ba+C}{B'a+C'}$ (iv) $-\frac{Ax'+By'+C}{A'x'+B'y'+C'}$

## প্রশ্নমালা 4

1. $x^2+y^2=9$ 2. $x^2+y^2-4x-8y-41=0$ 3. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ 4. $x^2+y^2-6x+14y+33=0$ 5. $x^2+y^2=12$ 6. $x^2+y^2+2x+4y+4=0$ 7. $3x^2+3y^2-2x+4y-15=0$ 8. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ 9. $x^2+y^2-2gx+2fy=0$ 10. $\sqrt{1+m^2}(x^2+y^2)-2cx-2mcy=0$ 11. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 12. $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ 13. $x^2+y^2-10x-14y+49=0$ 14. $(-3, 2)$, 4 15. $(-5, -6)$, 10
16. $(-4, -5)$, $2\sqrt{3}$ 17. $(-3, 2)$, $\sqrt{6}$ 18. $(a, -b)$, $(a+b)$
19. $(-a, -b)$, $\sqrt{a^2-b^2}$ 20. $x^2+y^2-22x-4y+25=0$
21. $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ 22. $x^2+y^2-5x-y+4=0$
23. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 24. $x^2+y^2-5x-7y+6=0$
25. $x^2+y^2-4x-6y-13=0$ 26. $x^2+y^2+5y-50=0$
27. $x^2+y^2+2x+10y+1=0$ 28. (*i*) $5x^2-14x+5y^2+7y-24=0$ 28. (*ii*) $15x^2+15y^2-94x+18y+55=0$ 29. (*ii*) $x^2+y^2-6x+4y=0$ 33. $x^2+y^2-8x+10y+13=0$ 37. $x^2+y^2-4y-21=0$ 38. $x^2+y^2-8x-2y-51=0$ 39. $x^2+y^2-6x-8y=0$ 41. $x^2+y^2-4x-3y=0$ 42. $x^2+y^2-4x-5y+4=0$

43. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ 47. $2x^2+2y^2+5x-6y+7=0$ 48. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, 49. $2x^2+2y^2-16x-11y+24=0$ 50. $x^2+y^2-12x-8y+34=0$ 51. $2x+3y=16$, $3x-2y=0$ 52. $2x-y=5$, $x+2y=0$ 53. $3x-4y-10=0$, $4x+3y+27=0$ 54. $x-y-1=0$, $x+y-5=0$ 55. $5x-12y-152=0$, $12x+5y+7=0$ 56. $4x+3y=33$, $3x-4y=6$ 57. $y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{3}$ 58. $x+2y\pm4\sqrt{5}$ 60. $(-1,-1)$

61. $m=\pm\frac{5}{12}$ 62. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$ 64. $x^2+y^2-6x+8y=0$ 65. $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 66. $4x+3y\pm25=0$ 67. $5x-12y+17=0$, $5x-12y-152=0$, $(-1, 1)$, $(4, -11)$ 68. $(-1, 1)$ 69. $(3, 4), (4, 3)$ 70. $x^2+y^2-4x-3y=0$ 71. $(-1,-1)$ 74. $3x+4y=5$, $3x+4y=45$ 75. 3 76. $\sqrt{29}$.

## প্রশ্নমালা 5

1. (i) $(0, 0), (\frac{9}{4}, 0), 9, 4x+9=0$ (ii) $(-3, -1), (-3, -\frac{1}{4}), 3, 4y+7=0$ (iii) $(-\frac{1}{4}, 1), (-\frac{5}{4}, 1), 4, 4x-3=0$
2. (i) $y^2=4(x-1)$ (ii) $x^2=8(y-2)$ (iii) $y^2=-8x$ (iv) $x^2=-8(y-2)$ 3 (i) $(1, 2)$ ; $(0, 2)$ ; 4 ; $y=2$ (ii) $\left(a, \frac{a}{2}\right)$ ; $(a, 0)$ ; $2a$ ; $x=a$ (iii) $(2, 1)$ ; $(2, 0)$ ; 4 ; $x=2$ (v) $x^2=8y$ 4. (i) $y^2=12x$ (ii) $y^2=-20$ (iii) $x^2=-12y$ (iv) $x^2=8y$ 5. $\frac{9}{2}$ ; $(\frac{9}{8}, 0)$ 6. $(3, 1)$ ; $(\frac{41}{16}, 1)$ ; $\frac{7}{4}$
7. (i) $(7x+6y)^2-570x+750y+2100=0$ (ii) $x^2+4xy+4y^2-42x+26y+36=0$ (iii) $144x^2-120xy+25y^2+130x-26y=0$ (iv) $(x-2y)^2+4x-2y-1=0$ 8. $(4, 8)$
9. (i) $16x^2+24xy+9y^2-262x+16y+621=0$ (ii) $x^2=-16y$ (iii) $y^2=4(a'-a)(x-a)$ (iv) $25\{(x-5)^2+(y-3)^2\}=(3x-4y+1)^2$ 10. $\left(\frac{b^2-c}{2a}, -b\right)$ 11. (i) $(1, 2), (\frac{1}{9}, -\frac{2}{3})$ (ii) $(4, 9)$ ; $(25, -\frac{45}{2})$ 12 $\frac{4}{3}$ ; $(\frac{1}{3}, 0)$, $(0, 0)$ ; $(3, 2)$

13. (i) $(1, 2)$ (ii) $(3, 2)$ (iii) $(\frac{3}{4}, 3)$ 14. $\frac{8}{9}$ 15. $ac = pb^2$
16. (i) $2x - 3y + 9 = 0$ (ii) $x + 3y + 18 = 0$ 19. (i) $4y = 3x + 12$, $4x + 3y = 34$ (ii) $y - x = 3$, $y + x = 9$ (iii) $x + y + 2 = 0$, $x - y - 6 = 0$ 20. $4y = 9x + 4$, $4y = x + 36$

21. $\left(\frac{a}{3}, -\frac{2a}{3}\sqrt{3}\right)$ 22. $y + 2x + 1 = 0$, $(\frac{1}{2}, -2)$ $2y = x + 8$ ; $(8, 8)$ 23. $(\frac{1}{2}, 2)$ 24. $(\frac{1}{2}, 2)$ 25. $5x + 8y = 5$ 27. $5x + 4y - 7 = 0$ 28. $b^{\frac{1}{3}}y + a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} = 0$

## প্রশ্নমালা 6

1. (i) $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}, \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{5}}, 0\right)$, $x = \pm 5$ (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{8}{3}$, $(0, \pm\sqrt{5})$, $\sqrt{5}y = \pm 9$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{4}{\sqrt{3}}$, $(\pm 1, 0)$, $x = \pm 3$
(iv) $\frac{1}{2}$, $3$, $(\pm 1, 0)$, $x = \pm 4$ (v) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{8}{3}$, $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $x = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$

2. (i) $\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{21}{2}}$, $(-1 \pm \sqrt{\frac{7}{12}}, 1)$, $x = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{21}$
(ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{8}{3}$, $(-1 \pm \sqrt{5}, -2)$, $x = -1 \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{1}{2}$, 4 এবং $2\sqrt{3}$, $(\pm 2, 0)$ 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. (i) $20x^2 + 36y^2 = 405$
(ii) $3x^2 + 4y^2 = 48$ (iii) $8x^2 + 9y^2 = 115$ (iv) $x^2 + 2y^2 = 9$
(v) $3x^2 + 5y^2 = 32$ (vi) $5x^2 + 9y^2 + 58x + 80 = 0$
(vii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ 6. $11x^2 - 4xy + 14y^2 - 48x - 24y + 66 = 0$ 7. (i) $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$
(ii) $6x^2 + 9y^2 + 4xy - 28x + 24y + 16 = 0$ (iii) $5x^2 + 5y^2 - 76x - 88y - 2xy + 506 = 0$ (iv) $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 26x + 62y + 174 = 0$ (v) $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$

8. (i) $\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, (ii) $\left(-\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right)$ (iii) $(3, 2)$

9. (i) $x + 3y = 5$, $9x - 3y = 5$ (ii) $x + y = 3$, $x - y = 1$

11. $4x-3y=17, 4x-3y=-17$ 12. $x+4y=9, x+4y=-9$
13. $a=2,\ e=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 14. $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ 15. $\sqrt{2}$
16. $x+y=1$ 19. $x+2y=4$ 22. $8x-9y=25$ 23. $x-2y=0$
24. $x+10y=0$ 25. $4x^2+5y^2-4x-5y=0$

## প্রশ্নমালা 7

1. (i) $\frac{5}{4}, (\pm 5, 0), \frac{9}{2}, 5x=\pm 16$ (ii) $\frac{13}{12}, (\pm 13, 0), \frac{25}{6}, 13x=\pm 144$ 2. $\pm 2{\cdot}04,\ 0$ 3. (i) $6, (1, -\frac{1}{2}), 1{\cdot}2$ (ii) $5{\cdot}29, (-2, 1), 2{\cdot}24$ 4. $\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{2}-3,\ 2\right),\ x\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+3=0,\ \ \frac{\sqrt{7}}{2}$

5. (i) $16x^2-9y^2=36$ (ii) $25x^2-144y^2=900$ (iii) $65x^2-36y^2=441$ (iv) $x^2-y^2=32$ 6. $3x^2-y^2=3a^2$ 7. $x^2+4y^2=36$ 8. $1, 2, 1, \frac{\sqrt{5}}{2}$ 9. $\frac{5\sqrt{2}}{2}, 4$ 10. $7y^2+24xy-24ax-6ay+15a^2=0$ 11. $(-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3})$ 12. $x-2y+1=0, 2x+y+7=0$ 13. $5x-3y\pm 3\sqrt{21}=0$ 14. $x-2y=4, 4x+2y=1$ 15. $x+y=3, x+y+3=0$ 17. $125x-48y-481$ 20. $x+3y=0$ 21. (i) $x^2+y^2=a^2-b^2$ (ii) $3x+4y=0$ $3x-4y=0$

## প্রশ্নমালা 8

1. (i) $\frac{Xx^{m-1}}{a^m}+\frac{Yy^{m-1}}{b^m}=1$ (ii) $X(x^2-ay)+Y(y^2-ax)=axy$

2. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 3. $2x+3y+1=0$ 4. $2Y=3tX-at^3$

5. $x+y=4$ 6. $x-20y=7, 20x+y=140$ 7. $(3, 0), (\frac{7}{3}, \frac{4}{27})$ 8. $(3, -12), (-1, 20)$ 9. $(0, 0), (a, 0)$

11. $c^2-a^2=d^2-b^2$ 14. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\tan^{-1} 3$ (iii) $\frac{\pi}{2}$

16. (i) $x+y+a=0$ ; $x-y=3a$ (ii) $x+p^2y=2cp$ ; $p^3x-py=c(p^4-1)$ (iii) $31x\pm 8y+9a=0,\ 8x\pm 31y+42a=0$ (iv) $x+y=0$ ; $x-y=0$ (v) $13x-16y=2a$ ; $16x+13y=9$.

## প্রশ্নমালা 9

1. (i) $x$-অক্ষ, $y$-অক্ষ, মূলবিন্দু। (ii) $x$-অক্ষ, $y$-অক্ষ, মূলবিন্দু। (iii) $y=x$ রেখা, (iv) $x$-অক্ষ (v) $y$-অক্ষ। 2. (i) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

(ii) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$ (iii) $(x-\alpha)^3+(y-\beta)^3=a^3$

(iv) $(x-\alpha)^4+(y-\beta)^4-2a^2(x-\alpha)^2(y-\beta)^2=b^2$

(v) $\left(\frac{(x-\alpha)}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{(y-\beta)}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ (vi) $(x-\alpha)^{\frac{2}{3}}+(y-\beta)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

3. (i) $a(x\cos\theta+y\sin\theta)^2+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2=1$

(ii) $\left(\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{a}\right)^2-\left(\frac{-x\sin\theta+y\cos\theta}{b^2}\right)^2=1$

(iii) $a(x\cos\theta+y\sin\theta)^2+2h(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)+b(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2+2g(x\cos\theta+y\sin\theta)+2f(-x\sin\theta+y\cos\theta)+c=0$ (iv) $(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2-4a(x\cos\theta+y\sin\theta)=0$

ডঃ প্রাণরঞ্জন সেনগুপ্ত ও ডঃ রামগোপাল রায়
প্রণীত

# উচ্চমাধ্যমিক গণিত

## একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণী

## ( দ্বিতীয় খণ্ড )

ব্যাবকলনবিদ্যা, সমাকলনবিদ্যা, স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যা

**(Differential & Integral Calculus, Statics & Dynamics)**

Rs. 22·00